ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIX.

1902

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1902

quali sembrano talvolta provenire direttamente. Però quando i vasi centrali sono parecchi o molti, quelli che man mano seguono verso l'esterno si differenziano ad una maggiore distanza dalle iniziali medesime. Ad ogni modo, quantunque la loro differenziazione abbia luogo di regola in modo rapido, non compariscono contemporaneamente, ma centrifugamente, cioè dal centro verso la periferia, benchè non in modo perfettamente regolare. Le cellule embrionali del parenchima centrale ricche di contenuto e attivamente in segmentazione nella parte più giovane, cessano, di regola, ben presto di segmentarsi per dar luogo agli elementi dei vasi, nel modo che sarà detto più innanzi.

Gli elementi dei raggi vascolari si differenziano più o meno tardi relativamente a quelli dei vasi centrali, sempre però anche dopo la differenziazione dei cordoni cribrosi. Di essi elementi vascolari i primi a comparire, di regola generalissima, sono quelli che stanno più all' interno del futuro raggio, e si seguono man mano in ordine centrifugo, cioè dall' interno verso l'esterno, dai più grandi ai più piccoli, che sono quelli periferici. Il che è reso palese anche dal fatto che il processo di segmentazione cellulare continua ancora alla periferia, quando è già cessato verso l' interno.

Come regola generalissima, di tutti questi vasi i primi a raggiungere la loro completa differenziazione, il loro stato adulto, reso manifesto dal processo di lignificazione della parete e dalla scomparsa del corpo protoplasmatico, sono quelli dei raggi vascolari, e precisamente in modo centripeto, vale a dire, che la lignificazione procede dall'esterno, dai più piccoli elementi vascolari del raggio verso l' interno cioè verso i più grandi del raggio medesimo, e poi a quelli man mano centrali. Talvolta però si modifica profondamente anche il parenchima fondamentale della porzione centrale del cilindro, lignificandosi più o meno. Allora, di regola il processo di lignificazione procede dal centro alla periferia.

Matematica. — *Sugli spazi plurisecanti di una semplice infinità razionale di spazi.* Nota di Francesco Severi, presentata dal Socio Segre.

In una Nota pubblicata in questi medesimi Rendiconti il prof. Segre assegnò l'ordine delle condizioni che s' impongono agli elementi di una matrice volendo ch'essa sia di dato rango [1]. Svariatissime sono le applicazioni

[1] *Gli ordini delle varietà che annullano i determinanti dei diversi gradi estratti da una data matrice* (Rend. de' Lincei, (5), t. IX, 1900). La formola alla quale si allude nel testo è stata dall'A. dedotta da una che Schubert aveva enunciato senza dimostrazione, e che trovasi dimostrata, insieme ad una più generale sulle correlazioni, nella dissertazione di laurea, presentata dal dott. Giambelli, or non è molto, alla Facoltà di scienze dell' Università di Torino.

che si possono fare di questo risultato alla geometria; ed io mi propongo di far vedere in questa Nota come da esso si possa dedurre in una maniera semplice ed elegante, il numero degli spazî plurisecanti di una curva razionale (numero già intuito dal Meyer e dal Tanturri) e, più in generale, il numero degli spazî plurisecanti di una ∞^1 razionale di S_h, nello S_r, ossia il numero degli spazî di data dimensione che contengono il massimo numero di spazî generatori della varietà stessa.

1. Per conseguire il nostro scopo è necessario premettere la risoluzione del seguente problema.

Avendosi nello S_d $d-l$ *sistemi lineari projettivi* ∞^p *di iperpiani, quanti sono gli* $[l]$ *comuni a* $d-l$ *iperpiani omologhi dei suddetti sistemi, i quali si appoggiano a un dato* $[\delta]$ *secondo uno spazio* $[\beta]$, *se* $(\beta+1)(d-\delta-l+\beta)=p$?

Siano

$$\sum_0^p \lambda_i f_i' = 0, \quad \sum_0^p \lambda_i f_i'' = 0, \ldots, \quad \sum_0^p \lambda_i f_i^{(d-l)} = 0,$$

le equazioni dei $d-l$ sistemi di iperpiani, e supponiamo di aver scelto le coordinate interne in ciascuno di essi in guisa che gli iperpiani omologhi si ottengano da quelle equazioni dando alle λ gli stessi valori.

Le coordinate dei punti del dato spazio $[\delta]$ si possono esprimer così:

$$x_i = a_{i0}\mu_0 + a_{i1}\mu_1 + \ldots + a_{i\delta}\mu_\delta \; (i = 0, 1, \ldots, d),$$

ove le x_i son forme indipendenti delle μ; e quindi i punti appartenenti al dato spazio $[\delta]$ e allo spazio $[l]$ comune agli iperpiani dei sistemi dati corrispondenti a fissati valori delle λ, si otterranno dalle equazioni:

$$\sum_0^p \lambda_i f_i' \,(a_{j0}\mu_0 + \ldots + a_{j\delta}\mu_\delta) = 0, \ldots, \quad \sum_0^p \lambda_i f_i^{(d-l)} \,(a_{j0}\mu_0 + \ldots + a_{j\delta}\mu_\delta) = 0,$$

le quali, mettendo in evidenza $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_\delta$, possono scriversi

$$\sum_0^\delta \mu_i \,\varphi_i^{(1)}(\lambda) = 0, \ldots, \quad \sum_0^\delta \mu_i \,\varphi_i^{(d-l)}(\lambda) = 0,$$

ove le φ sono forme lineari di $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_p$.

Volendo che i punti x giacenti nel dato $[\delta]$ e in uno spazio $[l]$ comune agli iperpiani dei dati sistemi corrispondenti a certi valori delle λ, riempiano uno spazio $[\beta]$, bisognerà esprimere che le equazioni precedenti fra le μ si riducono a $\delta-\beta$ distinte, ossia che la matrice $|\varphi_i^{(j)}(\lambda)|$ $(i = 0, 1, \ldots, \delta;$ $j = 1, \ldots, d-l)$ ha il rango $\delta-\beta$.

Applicando la formola citata del prof. Segre, ove si ponga

$$m = \delta\,,\, n = d - l - 1\,,\, q = \delta - \beta - 1$$

avremo l'espressione

$$(1)\qquad \frac{(d+2\beta+1-\delta-l)_u\,(d+2\beta+2-\delta-l)_u \dots (d+\beta-l)_u}{(u)_u\,(u+1)_u \dots (d-l-1)_u}$$

[ove $u = d - \delta + \beta - l$ e il simbolo $(a)_b$ sta invece di $\binom{a}{b}$], come ordine del sistema di condizioni, equivalenti a $(\beta+1)(d-\delta-l+\beta)$ indipendenti, che s'impongono alle λ volendo che la matrice delle φ sia di rango $\delta - \beta$. — Siccome per ipotesi

$$(\beta+1)(d-\delta-l+\beta) = p$$

il numero che richiedevamo, sarà in generale finito ed espresso dalla formola (1).

2. Se $2\beta + 2 \leq \delta$ la (1) può scriversi:

$$\frac{(d+2\beta+1-\delta-l)_u \dots (d-l-1)_u\,(d-l)_u \dots (d-l+\beta)_u}{(u)_u\,(u+1)_u \dots (d+2\beta+1-\delta-l)_u \dots (d-l-1)_u}$$

e quindi sopprimendo i fattori comuni al numeratore e al denominatore

$$(2)\qquad \frac{(d-l)_u\,(d-l+1)_u \dots (d-l+\beta)_u}{(u)_u\,(u+1)_u \dots (d+2\beta-\delta-l)_u}\,.$$

Se $2\beta + 1 = \delta$ la (1) e la (2) coincidono.

Quando infine $2\beta \geq \delta$ moltiplicando numeratore e denominatore della (1) per $(d-l)_u\,(d-l+1)_u \dots (d+2\beta-\delta-l)_u$, avremo ancora il numero di cui ci siamo occupati sotto la forma (2).

Se $\delta = \beta$ allora la formola del prof. Segre diventa illusoria e quindi non si può più scriver la (2) come conseguenza di essa. Ma allora è evidente che l'ordine del sistema di condizioni che s'impongono alle λ volendo che la matrice delle φ sia del rango $\delta - \beta = 0$, è 1, perchè le condizioni suddette si ottengono uguagliando a 0 le φ. La (2), nel caso $\delta = \beta$, riducesi proprio all'unità, e dunque scrivendo il numero che ci ha occupato sotto la forma (2), veniamo a rimuovere ogni caso di eccezione.

3. E passiamo adesso al problema che costituisce l'oggetto di questa Nota.

Rifacciamoci dal caso di una curva razionale d'ordine ν dello spazio $[r]$ e sia C la curva d'ordine ν dello S_ν, di cui la data può pensarsi come projezione.

Gli S_k t-secanti della curva data nello S_r, i quali sono generalmente in numero finito e non nullo quando $(r-k-1)\,t = (k+1)(r-k)$, corrispondono biunivocamente ai $[t-1]$ t-secanti di C, i quali si appoggiano a un dato $[\nu - r - 1]$ secondo un $[t-k-2]$.

Si assumano $\nu - t + 1$ spazî $[\nu - t - 1]$, $(\nu - t)$ — secanti di C, e siano $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_{\nu-t+1}$, come sostegni di altrettanti sistemi lineari $(\Sigma_1), \ldots, (\Sigma_{\nu-t+1})$ di iperpiani; e diciamo che due iperpiani appartenenti rispettivamente a due di quei sistemi sono omologhi, quando, dai rispettivi sostegni, projettano un medesimo $[t-1]$, t — secante di C. Di qual natura sono le corrispondenze che veniamo così a porre fra i sistemi (Σ)? I coni che projettano C da due spazî Σ, p. e. Σ_1 e Σ_2, dànno come traccia su un generico spazio $[t]$ due curve C_1, C_2 d'ordine t, e quindi normali, le quali risultano riferite biunivocamente, e perciò projettivamente, quando si chiamino omologhi due dei loro punti che provengano da uno stesso di C. — Due iperpiani dei sistemi $(\Sigma_1), (\Sigma_2)$ omologhi nella corrispondenza, che, con la legge detta prima, si pone fra i sistemi suddetti, vengono a projettare due $[t-1]$ dello spazio di C_1 e C_2, che sono omologhi nella projettività fra C_1 e C_2; ne segue che anche la corrispondenza fra (Σ_1) e (Σ_2) è una projettività; e così per le altre coppie di sistemi (Σ).

Dopo ciò gli spazî $[t-1]$ t — secanti di C si presentano come spazî d'intersezione di $\nu - t + 1$ iperpiani omologhi di altrettanti sistemi projettivi ∞^t (i sistemi (Σ)). Si tratterà dunque di trovare quanti sono i $[t-1]$ d'intersezione di $\nu - t + 1$ iperpiani omologhi di altrettanti sistemi projettivi ∞^t, i quali si appoggiano a un dato $[\nu - r - 1]$ secondo un $[t - k - 2]$. Applicando la formola (2), nella quale si ponga

$$d = \nu\,,\ l = t - 1\,,\ p = t\,,\ \delta = \nu - r - 1\,,\ \beta = t - k - 2\,,$$

avremo il numero degli S_k t — secanti di una curva razionale di ordine ν dello S_r:

$$\frac{(\nu - t + 1)_{r-k}\,(\nu - t + 2)_{r-k} \ldots (\nu - k - 1)_{r-k}}{(r-k)_{r-k}\,(r - k + 1)_{r-k} \ldots (r - 2k + t - 2)_{r-k}}\ (^1)\,.$$

4. Il procedimento precedente si può estendere per la determinazione del numero degli S_k che contengono il massimo numero di spazî generatori di una ∞^1 di S_h, razionale e dell'ordine ν, appartenente allo S_r.

Se

$$t[(h+1)(r-k) - 1] = (k+1)(r-k)$$

(1) Come abbiamo accennato questa formola trovasi scritta *per induzione* in Meyer, *Apolarität und rationale Curven* (Tübingen, 1883, vedi a p. 363), e in Tanturri, *Ricerche sugli spazî plurisecanti di una curva algebrica* (Annali di Matematica, (3), t. IV, 1900); ma non era stata dimostrata in tutta la sua generalità. Il procedimento del Tanturri permette di assegnare il numero degli spazî plurisecanti di una curva razionale in ogni caso numerico; ma poggia, oltrechè sulla conservazione del numero, sopra certi postulati che non sono peranco dimostrati. Nella mia Nota, *I gruppi neutri con elementi multipli in un' involuzione sopra un ente razionale* (Rendiconti de' Lincei, (5), t. IX, 1901) dalla formola del testo si deduce il numero degli spazî che hanno contatti di dati ordini con una curva razionale dello $[r]$.

esisterà in generale un numero finito e non nullo di spazî S_h contenenti t $[h]$ generatori della nostra varietà; e noi, nel seguito, supporremo che la relazione precedente sia soddisfatta.

Sia V la varietà normale, d'ordine ν, dello spazio $[\nu + h]$, di cui la data varietà può riguardarsi come projezione. Gli spazî $[k]$ che ricerchiamo corrispondono biunivocamente agli spazî $[(h+1)t-1]$ che congiungono a t a t gli spazî generatori di V e che si appoggiano a un dato $[\nu + h - r - 1]$ secondo un $[(h+1)t-k-2]$ (1). Assumiamo in V $\nu + h - (h+1)t + 1$ direttrici ad h dimensioni di ordine $\nu - t$, e siano $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$ gli spazî a $\nu + h - t - 1$ dimensioni in cui esse sono immerse (Bellatalla, loc. cit., n. 2). Fra gli iperpiani dei sistemi lineari (Σ) poniamo delle corrispondenze dicendo omologhi gli iperpiani di quei sistemi quando, dai rispettivi sostegni, projettano le t — ple di spazî generatori di V. Queste corrispondenze saranno projettività come si vede secando tutto con un S_ν e osservando che, per una considerazione svolta al n. 3, le sezioni dei sistemi (Σ) riferiti nel modo detto, sono sistemi lineari projettivi di $S_{\nu-1}$.

Sicchè la nostra questione è ridotta a cercare nello $S_{\nu+h}$, quanti sono gli spazî $[(h+1)t-1]$ comuni a $\nu + h - (h+1)t + 1$ iperpiani omologhi di altrettanti sistemi lineari projettivi ∞^t, i quali si appoggiano a un dato $[\nu + h - r - 1]$ secondo un $[(h+1)t - k - 2]$; e la risposta ad essa l'avremo ponendo nella formola (2)

$$d = \nu + h, k = (h+1)t - 1, p = t, \delta = \nu + h - r - 1, \beta = (h+1)t - k - 2.$$

Verrà allora:

$$\frac{(\nu + h - (h+1)t + 1)_{r-k}(\nu + h - (h+1)t + 2)_{r-k} \ldots (\nu + h - k - 1)_{r-k}}{(r-k)_{r-k}(r-k+1)_{r-k} \ldots (r - 2k + (h+1)t - 2)_{r-k}}.$$

Questa è la formola che dà il numero dei $[k]$ che contengono t S_h generatori di una ∞^1 razionale di spazî, appartenente allo S_r, allorchè, beninteso, questo numero è finito (2).

(1) Qui si suppone, implicitamente, che t $[h]$ generatori di V siano *indipendenti*, per il che bisogna e basta che sia $t \leq m' + 1$ ove m' denota l'ordine di una curva direttrice minima tracciata sopra V. Cfr. Bellatalla, *Sulle varietà razionali normali composte di ∞^1 spazî lineari* (Atti della R. Acc. di Torino, t. XXXVI, 1901) n. 10. Se $t > m' + 1$ il numero di cui ci stiamo occupando nel testo, sarà infinito.

(2) Per $k = r - 1$ si ottiene la formola data dal Tanturri al n. 6 della Nota, *Un problema di geometria numerativa sulle varietà algebriche luogo di ∞^1 spazî.* (Atti della R. Acc. di Torino, t. XXXV, 1900).