ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIX.

1902

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1902

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all' Accademia sino al 17 agosto 1902.

Matematica. — *Sulla teoria invariantiva delle espressioni ai differenziali totali di second' ordine, e su di una estensione dei simboli di Christoffel.* Nota del Corrispondente Ernesto Pascal.

L'argomento cui si riferisce questa Nota è stato da me cominciato a trattare nei due lavori: *Introduzione alla teoria invariantiva delle equazioni ai differenziali totali di second' ordine* (Ann. di Mat. (3), t. 7), e: *Un teorema della teoria invariantiva*, ecc. (Rend. Ist. Lomb. (2), t. 34, 1901), nel primo dei quali ho dimostrato l'esistenza di un invariante simultaneo di una espressione ai differenziali di second' ordine e di una espressione a derivate parziali di second' ordine, analogo al noto invariante per le forme ordinarie pfaffiane; e nel secondo ho dimostrato l'invariantività delle caratteristiche di certe matrici.

Ora mi propongo di trovare altri invarianti e forme differenziali covarianti, e di far vedere come possa costruirsi una teoria la quale può reputarsi una estensione di quella dei simboli di Christoffel relativi alle *forme differenziali quadratiche*; in simile modo otterrò poi anche, per una espressione ai differenziali secondi, l'estensione degli ordinarii *parametri differenziali.*

Dei risultati di questa Nota mi servirò in altro lavoro per trattare il problema dell'applicazione di una trasformazione infinitesima ad una espressione ai differenziali secondi.

1. È necessario richiamare brevemente i simboli e le notazioni introdotte nelle due succitate Memorie.

Sia data la espressione

$$\mathrm{U} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k \, d^2 x_k + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{X}_{ij} \, dx_i \, dx_j \,, \qquad (\mathrm{X}_{ij} = \mathrm{X}_{ji}) \,, \tag{1}$$

e introduciamo i seguenti simboli:

$$\begin{cases} (ij) = \dfrac{\partial \mathrm{X}_i}{\partial x_j} - \dfrac{\partial \mathrm{X}_j}{\partial x_i} \\[2mm] ((ij)) = \dfrac{\partial \mathrm{X}_i}{\partial x_j} - \mathrm{X}_{ij} \\[2mm] \}ij\{ = \dfrac{\partial \mathrm{X}_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial \mathrm{X}_j}{\partial x_i} - 2\mathrm{X}_{ij} \,, \\[2mm] \}ijk\{ = \dfrac{\partial^2 \mathrm{X}_k}{\partial x_i \, \partial x_j} + \dfrac{\partial \mathrm{X}_{ij}}{\partial x_k} - \dfrac{\partial \mathrm{X}_{ik}}{\partial x_j} - \dfrac{\partial \mathrm{X}_{jk}}{\partial x_i} \,. \end{cases} \tag{2}$$

Fra questi sussistono le relazioni:

$$\begin{cases} (ij) = ((ij)) - ((ji)) \\ \}ij\{ = ((ij)) + ((ji)) \\ \}ijk\{ = \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial}{\partial x_i} \}kj\{ + \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial}{\partial x_j} \}ki\{ - \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial}{\partial x_k} \}ij\{ \,. \end{cases} \tag{3}$$

Operando una trasformazione di variabili, questi simboli si trasformano colle formole

$$(ij) = \sum_r \sum_s (rs)' \frac{\partial y_r}{\partial x_i} \frac{\partial y_s}{\partial x_j}$$

$$((ij)) = \sum_r \sum_s ((rs))' \frac{\partial y_r}{\partial x_i} \frac{\partial y_s}{\partial x_j}$$

$$\}ij\{ = \sum_r \sum_s \}rs\{' \frac{\partial y_r}{\partial x_i} \frac{\partial y_s}{\partial x_j} \,,$$

$$\}ijk\{ = \sum_r \sum_s \sum_t \}rts\{' \frac{\partial y_r}{\partial x_i} \frac{\partial y_t}{\partial x_j} \frac{\partial y_s}{\partial x_k} + \sum_s \sum_t \}st\{' \frac{\partial y_t}{\partial x_k} \frac{\partial^2 y_s}{\partial x_i \, \partial x_j}$$

dove le y sono le nuove variabili, e i simboli cogli apici $'$ rappresentano i valori dei medesimi espressi nelle y; le prime di queste formole sono assai facili a trovarsi, l'ultima è stata calcolata nel secondo dei lavori succitati.

2. Si dimostra subito che *le forme differenziali quadratiche*

$$\mathrm{A} = \sum_i \sum_j ((ij)) \, dx_i \, dx_j$$

$$\mathrm{B} = \sum_i \sum_j \}ij\{ \, dx_i \, dx_j = 2\mathrm{A}$$

sono covarianti.

In effetti adoperando le suindicate formole di trasformazione si ha

$$A = \sum_{i,j,r,s,p,q} \ldots \sum ((rs))' \, dy_p \, dy_q \frac{\partial y_r}{\partial x_i} \frac{dy_s}{\partial x_j} \frac{\partial x_i}{\partial y_p} \frac{\partial x_j}{\partial y_q}$$

e osservando al solito che

$$\sum_i \frac{\partial y_r}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_p}$$

è uguale a zero o ad 1, secondochè gli indici r, p sono diversi od uguali, e che lo stesso si ha per il $\sum_j$, si ricava che i termini non zero del precedente sommatorio sestuplo sono solo quelli in cui $p = r$, $q = s$, e quindi resta

$$A = \sum_r \sum_s ((rs))' \, dy_r \, dy_s ,$$

il che mostra la invariantività di A.

È utile ricordare che i covarianti quadratici A o B hanno un altro intimo legame con la data espressione ai differenziali secondi, e tal legame è quello espresso dalla formola, già trovata nella Memoria negli Annali di Matematica:

$$U = d\,V - A = dV - \frac{1}{2} B, \tag{4}$$

in cui è

$$V = \sum_i X_i \, dx_i , \tag{5}$$

e si può osservare *che anche* V *è una forma pfaffiana covariante in rapporto ad* U.

Un fatto importante ad osservare è che *il simbolo* $\}i\,j\,k\{$ *introdotto nei precedenti lavori* nei quali esso ha avuto un posto notevole, *considerato invece in rapporto alla forma differenziale quadratica* B, *si identifica col noto simbolo a tre indici di prima specie di Christoffel*, come risulta immediatamente dall'ultima delle relazioni (3).

Esso è così, considerato in rapporto alla espressione ai differenziali secondi U, una *estensione* del simbolo di Christoffel, e diventerebbe eguale a questo (moltiplicato per -2) quando la U diventasse una ordinaria forma differenziale quadratica, cioè fossero zero i coefficienti X_k.

Da questa osservazione semplicissima *risulta che tutta la teoria dei simboli di Christoffel e delle relazioni fra essi esistenti, resta estesa senz'altro al caso in cui si assume per forma fondamentale la* U. Così p. es. ricordando la nota formola [1] esistente fra i simboli a tre indici di

[1] Vedi p. es. Bianchi, *Geometria differenziale*, 2ª ediz., vol. I, pag. 66.

Christoffel, *si può dedurre fra i simboli relativi alla forma* U *la seguente relazione:*

$$(6) \qquad \sum_i \sum_j \}M'\{_{ij} \}ijk\{ = -\frac{\partial \log \sqrt{\}M'\{}}{\partial x_k} - \sum_i \sum_j \}ik\{ \frac{\partial \}M'\{_{ij}}{\partial x_i}$$

dove $\}M'\{$ rappresenta, giusta una notazione già da noi adoperata nella seconda delle Note citate in principio, il determinante degli elementi $\}i\,j\{$, e le $\}M'\{_{ij}$ rappresentano i complementi algebrici degli elementi del medesimo determinante, divisi per il determinante stesso.

D'altra parte, servendoci di un risultato da noi ottenuto più in generale nella stessa Nota [1], può enunciarsi, per gli ordinarî simboli di Christoffel, un teorema, che potrebbe dimostrarsi anche direttamente, ma che non credo ancora esplicitamente notato.

Ponendo $X_1 = X_2 = \ldots\ldots = X_n = 0$, e osservando che allora le matrici $\}M_i\{$ risultano formate mediante gli ordinarî simboli di Christoffel

$$\begin{bmatrix} i\,j \\ k \end{bmatrix},$$

si deduce che *la matrice*

$$(7) \qquad \left\| \begin{array}{cccc}
0 & X_{11} & \ldots\ldots\ldots & X_{1n} \\
\cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot \\
0 & X_{n1} & \ldots\ldots\ldots & X_{nn} \\
X_{11} & \begin{bmatrix} 1\,,1 \\ 1 \end{bmatrix} & \ldots\ldots\ldots & \begin{bmatrix} 1\,,1 \\ n \end{bmatrix} \\
\cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot \\
X_{1n} & \begin{bmatrix} 1\,,n \\ 1 \end{bmatrix} & \ldots\ldots\ldots & \begin{bmatrix} 1\,,n \\ n \end{bmatrix} \\
X_{21} & \begin{bmatrix} 2\,,1 \\ 1 \end{bmatrix} & \ldots\ldots\ldots & \begin{bmatrix} 2\,,1 \\ n \end{bmatrix} \\
\cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot \\
X_{2n} & \begin{bmatrix} 2\,,n \\ 1 \end{bmatrix} & \ldots\ldots\ldots & \begin{bmatrix} 2\,,n \\ n \end{bmatrix} \\
\cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot
\end{array} \right\|$$

[1] Prendo occasione da ciò per notare che nell'enunciato del teorema alla fine del § 2 del predetto lavoro, con $\sum_i \{M_i\}$ si *deve* intendere la somma di tutti gli $\{M_i\}$, e non, come ivi si è detto, di un arbitrario numero di essi.

Inoltre, alla fine del lavoro, laddove si fa il prodotto *per colonne* della matrice (16) per la (11), bisogna invece intendere eseguito il prodotto delle due matrici, combinando le *linee* di (16) con le colonne di (11).

come anche quella ottenuta da questa colla soppressione della prima colonna, hanno caratteristiche invarianti per qualunque trasformazione di variabili.

In simile modo si può intendere anche estesa la costruzione dei *parametri differenziali* costruendo quelli in rapporto alla forma B, e considerandoli come *parametri differenziali* relativi alla espressione ai differenziali secondi U.

3. Immaginiamo ora una trasformazione infinitesimale

$$\Xi f \equiv \sum_{k=1}^{n} \xi_k \frac{\partial f}{\partial x_k}. \tag{8}$$

Poichè le formole di trasformazione per le ξ_k sono evidentemente identiche a quelle per i differenziali dx_k, dalla invariantivilà di A, B, risulta immediatamente quella delle seguenti forme pfaffiane:

$$\text{(9)} \quad \mathrm{C} = \sum_{ij} ((ij))\, \xi_i\, dx_j\ ,\ \mathrm{D} = \sum_{ij} ((ij))\, \xi_i\, dx_j\ ,\ \mathrm{E} = \sum_{ij} \}ij\{\, \xi_i\, dx_j = \mathrm{C} + \mathrm{D}$$

e similmente delle seguenti formazioni:

$$\mathrm{G} = \sum_{ij} ((ij))\, \xi_i\, \xi_j\ ,\ \mathrm{H} = \sum_{ij} \}ij\{\, \xi_i\, \xi_j\,, \tag{10}$$

Poichè le parentesi $(i\ j)$ si trasformano colle stesse formole che le $((i\ j))$, $\}i\ j\{$, alle forme pfaffiane (9) potrebbe anche aggiungersi la

$$\mathrm{F} = \sum_{ij} (ij)\, \xi_i\, dx_j = \mathrm{C} - \mathrm{D} \tag{11}$$

la quale interviene già nella teoria delle ordinarie forme pfaffiane, quando si studia il risultato dell'applicazione di una trasformazione infinitesima ad una forma di primo ordine, e che è un covariante simultaneo di V, e Ξ, mentre V, a sua volta, è un covariante di U.

Un importante *covariante di second' ordine della forma* U, è il seguente, il quale si presenta, come vedremo in seguito, nello studio dell'applicazione della trasformazione infinitesima Ξ ad U, facendo lo stesso ufficio che la F fa in rapporto a V:

$$\mathrm{L} = \sum_{k} \left[\sum_{r} \}kr\{\, \xi_r \right] d^2 x_k + \sum_{i} \sum_{j} \left[\sum_{r} \}ijr\{\, \xi_r \right] dx_i\, dx_j\,. \tag{12}$$

Trasformando infatti questa espressione nelle y, si ottiene:

$$\sum_{p,q,r,s,k} \}pq\{' \xi_s \frac{\partial y_p}{\partial x_k} \frac{\partial y_q}{\partial x_r} \frac{\partial x_r}{\partial y_s} \left[\sum_h \frac{\partial x_k}{\partial y_h} d^2 y_h + \sum_h \sum_t \frac{\partial^2 x_k}{\partial y_h \partial y_t} dy_h \, dy_t \right] +$$

$$+ \sum_{i,j,r,h,t} \left[\sum_{p,q} \}pq\{' \xi_s \frac{\partial y_q}{\partial x_r} \frac{\partial^2 y_p}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial x_r}{\partial y_s} + \sum_{p,q,k} \}p\,q\,h\{' \xi_s \frac{\partial y_p}{\partial x_i} \frac{\partial y_q}{\partial x_j} \frac{\partial y_k}{\partial x_r} \frac{\partial x_r}{\partial y_s} \right] \times$$

$$\times \frac{\partial x_i}{\partial y_h} \frac{\partial x_j}{\partial y_t} dy_h \, dy_t .$$

Ora si ha identicamente

$$(13) \qquad \sum_r \frac{\partial y_q}{\partial x_r} \frac{\partial x_r}{\partial y_s} = 0 , \qquad \text{se } q \text{ è diverso da } s$$

$$= 1 , \qquad \text{se } q \text{ è uguale a } s$$

donde si ricava, colla derivazione, un' altra formola identica, la quale, scritta con opportuno scambio di indici, è la seguente:

$$\sum_k \frac{\partial y_p}{\partial x_k} \frac{\partial^2 x_k}{\partial y_h \partial y_t} + \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 y_p}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial x_i}{\partial y_h} \frac{\partial x_i}{\partial y_t} = 0 .$$

Con ciò si vede che la somma del secondo e terzo termine della precedente espressione è identicamente zero, ed applicando poi ripetutamente la (13) agli altri termini, si riconosce infine *la invariantività di* L.

Di qui può ricavarsi una serie di altri risultati; così p. es. immaginando una espressione alle derivate parziali di primo e second' ordine

$$(14) \qquad \Xi' f = \sum_k \xi'_k \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_i \sum_j \xi'_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_j}$$

e formando l' invariante simultaneo di L e di Ξ',

$$\mathrm{N} = \sum_k \sum_r \}k\,r\{ \xi_r \xi'_k + \sum_i \sum_j \sum_r \}i\,j\,r\{ \xi_r \xi'_{ij}$$

si ha *un nuovo invariante relativo alla forma* U *fondamentale* e che ha evidentemente come caso particolare l' invariante H.

Inoltre formando i simboli di Christoffel *estesi*, relativi alla forma L, si può con questi costruire delle nuove matrici di cui le caratteristiche sono invarianti; si può poi costruire *il covariante quadratico* di L, i suoi *parametri differenziali*, ecc., e si ha così una serie di formazioni che sono *invarianti* rispetto al sistema della forma U fondamentale e di una trasformazione infinitesima.

Come casi particolari possono poi dedursi dei teoremi relativi alle ordinarie forme differenziali quadratiche, teoremi che naturalmente potrebbero anche dimostrarsi direttamente.

Così per esempio:

La espressione ai differenziali secondi

$$\sum_k \sum_r X_{kr}\, \xi_r\, d^2 x_k + \sum_i \sum_j \sum_r \begin{bmatrix} ij \\ r \end{bmatrix} \xi_r\, dx_i\, dx_j\,, \tag{15}$$

dove

$$\begin{bmatrix} ij \\ r \end{bmatrix}$$

rappresentano gli ordinari simboli di Christoffel, è covariante simultaneo della forma differenziale quadratica

$$U' \equiv \sum_i \sum_j X_{ij}\, dx_i\, dx_j \tag{16}$$

e della trasformazione infinitesima Ξ.

La espressione ai differenziali secondi

$$\sum_k \sum_r X_{kr}\, \xi_r\, \xi'_k + \sum_i \sum_j \sum_r \begin{bmatrix} ij \\ r \end{bmatrix} \xi_r\, \xi'_{ij} \tag{17}$$

è invariante simultaneo di U' *e delle due espressioni alle derivate parziali* Ξ, Ξ'.

Formando i parametri differenziali *in senso esteso* relativi alla forma (15), si ottiene il risultato:

La espressione

$$\frac{1}{P} \sum_{ij} P_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

dove le P_{ij} *sono i complementi algebrici degli elementi* p_{ij} *del determinante* P, *e i* p_{ij} *sono formati, mediante i coefficienti della forma differenziale quadratica* U', *nel seguente modo*

$$p_{ij} = \sum_r \left[\frac{\partial X_{ij}}{dx_r} \xi_r + X_{ir} \frac{\partial \xi_r}{\partial x_j} + X_{jr} \frac{\partial \xi_r}{\partial x_i} \right], \tag{19}$$

è parametro differenziale relativo alla forma U' *e alla trasformazione infinitesima* Ξ.

Notiamo infine che (osservando che i differenziali dx_r si trasformano come i ξ_r) dalla invariantività di L *si deduce che*

$$\text{(20)} \qquad Q = \sum \sum_r \}k\, r\{\, dx_r\, d^2x_k + \sum_i \sum_j \sum_r \}i\, j\, r\{\, dx_r\, dx_i\, dx_j$$

è un altro covariante di 2° ordine relativo alla forma ai differenziali secondi U; e quindi anche che

$$\text{(21)} \qquad \sum_k \sum_r X_{kr}\, dx_r\, d^2x_k + \sum_i \sum_j \sum_r \begin{bmatrix} ij \\ r \end{bmatrix} dx_r\, dx_i\, dx_j$$

formato mediante i simboli di Christoffel, è covariante della forma differenziale quadratica U'.

Geologia. — *I terreni eocenici dei dintorni di Metkovich in Dalmazia e in Erzegovina* (1). Nota del Socio C. De Stefani e del dott. A. Martelli.

Sulla destra della Narenta il calcare eocenico è già segnato a Vido e secondo il prof. De Stefani si estende anche a Gabela, mentre dei terreni di Metkovich a sinistra della stessa Narenta è soltanto indicato, nelle carte geologiche attualmente esistenti, un lembo assai più a sud del paese. Tale lembo eocenico viene giustamente dallo Stache (2) attribuito all'*Hauptalveolinen- und Nummulitenkalk.*

Della fauna eocenica di Metkovich, a proposito di un confronto fra i depositi nummulitici del Friuli e quelli della Dalmazia, viene fatto un fugace accenno in un lavoro del prof. O. Marinelli (3) il quale ebbe occasione di esaminare parte del materiale raccolto dal prof. De Stefani.

Formazioni cretacee.

La metà orientale di Metkovich si trova sopra una strettissima e regolare piega anticlinale cretacea, diretta, come le altre della regione, da N.O.

(1) La parte stratigrafica è del prof. De Stefani, la parte paleontologica del dott. Martelli. I fossili di Sibanica e di Krupa ci vennero forniti dal prof. Gasperini di Spalato che sentitamente ringraziamo.

(2) Stache G. *Die liburnische Stufe und deren Grenz-Horizonte.* Abhand. der k. k. geolog. Reichsanstalt, Band XIII Wien 1899.

(3) Marinelli O. *Descrizione geologica dei dintorni di Tarcento nel Friuli.* Pubb. del R. Ist. di Studi sup. pratici e di perfez. Firenze 1902, pag. 71.