ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIX.

1902

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1902

Il quoziente delle derivate: $\frac{f'}{\varphi'}$, *in tutti i punti di un insieme* K *contenuto in quell'intorno, soddisfa una relazione della forma:*

$$\mu \leqq \left|\frac{f'}{\varphi'}\right| \leqq \mathrm{M},$$

μ, M, *numeri positivi. Nei punti* $[\xi]$ *dell'intorno considerato, non appartenenti a* K, *quel quoziente può invece assumere valori arbitrari.*

Si domanda qual relazione occorre e basta che interceda fra le dimensioni degli insiemi K, $[\xi]$, *perchè il quoziente* $\frac{f}{\varphi}$ *delle funzioni date soddisfi, in* t u t t i *i punti di un determinato intorno del punto* $x=a$, *la relazione:*

$$\nu \leqq \left|\frac{f}{\varphi}\right| \leqq \mathrm{N},$$

ν, N, *numeri positivi.*

La risoluzione di questo problema ed alcune applicazioni alla determinazione dell'ordine di infinito, si trovano in una memoria che è in corso di stampa negli Annali di matematica.

Matematica. — *Su una classe di equazioni a radici reali.* Nota di Onorato Niccoletti, presentata dal Socio L. Bianchi.

Una delle più semplici dimostrazioni della realità delle radici della equazione *secolare* (da cui dipende ad es. la determinazione degli assi di una quadrica a coefficienti reali di un S_n) è fondata sull'ortogonalità di due *direzioni principali* corrispondenti a radici diverse della equazione stessa. Quest'osservazione, convenientemente estesa, vale in molti altri casi e conduce ad una classe di equazioni, e di sistemi di equazioni, a radici tutte reali, di cui l'equazione secolare è caso particolarissimo. Mi permetto di comunicare alla R. Accademia i risultati ottenuti per questa via, riserbandomi di darne in altro luogo le dimostrazioni.

1. Una forma bilineare in $2n$ variabili $x_1, x_2, \dots x_n, y_1, y_2, \dots y_n$, $\mathrm{A}=\sum_1^n{}_{\mu\nu}\, a_{\mu\nu}\, x_\mu\, y_\nu$ si dice di *Hermite* e di *prima* (*seconda specie*) quando per tutti i valori degli indici μ e ν i coefficienti $a_{\mu\nu}$ e $\pm a_{\nu\mu}$ sian numeri complessi coniugati, sia cioè, con simboli noti, $\overline{a}_{\mu\nu}=\pm a_{\nu\mu}$. Una forma di Hermite di seconda specie si cambia in una di prima, moltiplicandola per i

e inversamente: dando alle variabili x_μ, y_μ valori complessi coniugati, assume un valore reale (o puramente immaginario) secondo che è di prima (o di seconda) specie.

Le forme di Hermite di prima specie, come le forme quadratiche a coefficienti reali, si dividono in riducibili ed irriducibili, in definite, semidefinite, indefinite ([1]). Una forma di Hermite di prima specie non indefinita si dirà poi *parzialmente definita rispetto alle variabili* $x_{h_1}, x_{h_2}, \ldots x_{h_l}$ (e $y_{h_1}, y_{h_2} \ldots y_{h_l}$) quando l'annullarsi della forma per valori complessi coniugati delle variabili porti di necessità l'annullarsi delle $x_{h_1}, x_{h_2}, \ldots x_{h_l}$ (e delle coniugate). Perchè questo sia è necessario e sufficiente, oltre esser la forma non indefinita, che sopprimendo dal *discriminante* $a = |a_{\mu\nu}|$ della forma le righe (o le colonne) relative alle variabili $x_{h_1}, \ldots x_{h_l}$, la caratteristica della matrice residua sia inferiore di altrettante unità a quella del discriminante della forma stessa.

2. Siano ora:

$$(1)\qquad A(x, y) = \Sigma_{\mu\nu}\, a_{\mu\nu}\, x_\mu\, y_\nu\ ;\quad B(x, y) = \Sigma_{\mu\nu}\, b_{\mu\nu}\, x_\mu\, y_\nu \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots n)$$

due forme bilineari nelle $2n$ variabili $x_1 \ldots x_n, y_1 \ldots y_n$: e si consideri l'equazione in ω:

$$(2)\qquad D(\omega) = |a_{\mu\nu} - \omega b_{\mu\nu}| = 0 \quad (\mu, \nu = 1, 2 \ldots n).$$

I coefficienti di questa equazione sono gli invarianti simultanei delle due forme A e B; le sue radici $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n$ sono quindi invarianti *assoluti* delle due forme. Se ω_r è una qualunque radice, i due sistemi di equazioni lineari omogenee nelle incognite $x^{(r)}, y^{(r)}$:

$$(3_r)\qquad \sum_1^n{}_\mu\, (a_{\mu\nu} - \omega_r\, b_{\mu\nu})\, x_\mu^{(r)} = 0 \quad (\nu = 1, 2 \ldots n),$$

$$(4_r)\qquad \sum_1^n{}_\nu\, (a_{\mu\nu} - \omega_r\, b_{\mu\nu})\, y_\nu^{(r)} = 0 \quad (\mu = 1, 2 \ldots n),$$

ammettono soluzioni $x_1^{(r)} \ldots x_n^{(r)}$ $(y_1^{(r)} \ldots y_n^{(r)})$ *non tutte nulle*; e se ω_r, ω_s sono due radici *diverse* della (2), $x^{(r)}, y^{(s)}$ soluzioni delle corrispondenti equazioni (3_r), (4_s), *si ha la relazione fondamentale*:

$$(5)\qquad B(x^{(r)}, y^{(s)}) = \Sigma_{\mu\nu}\, b_{\mu\nu}\, x_\mu^{(r)}\, y_\nu^{(s)} = 0 \quad (\mu, \nu = 1, 2 \ldots n).$$

Le A e B siano ora forme di Hermite di prima specie (od ambedue di seconda, il che è lo stesso); l'equazione (2) ha allora i coefficienti reali

([1]) Cfr. Ricci, *Algebra*, pag. 131 e segg.; Loewy, Giornale di Crelle, Bd. 120 S. 53-72.

e quindi le sue radici complesse, se ne ha, sono a coppia coniugate; se ω_1 ed ω_2 sono due tali radici complesse coniugate (e quindi $\omega_1 \neq \omega_2$), è subito visto che nelle (3_1), (4_2) *possono* $x_\nu^{(1)}$, $y_\nu^{(2)}$ prendersi complesse coniugate, $y_\nu^{(2)} = \overline{x}_\nu^{(1)}$; ed allora la (5), fattovi $r = 1$, $s = 2$, diventa:

$$\text{B}(x^{(1)}, \overline{x}^{(1)}) = \Sigma_{\mu\nu}\, b_{\mu\nu}\, x_\mu^{(1)}\, \overline{x}_\nu^{(1)} = 0\,. \tag{6}$$

Sia ora la B parzialmente definita rispetto alle x_1, x_2, x_m; la (6) dimostra che deve allora aversi:

$$x_1^{(1)} = x_2^{(1)} = \ldots = x_m^{(1)} = 0\,.$$

In tale ipotesi le equazioni (3_1) sono dunque tali che per qualunque loro soluzione deve essere $x_1^{(1)} = x_2^{(1)} = \ldots = x_m^{(1)} = 0$; e quindi, ove la radice ω_1 renda il determinante (2) di caratteristica $r < n$, essa deve rendere di caratteristica $r - m$ la matrice formata dalle ultime $n - m$ righe (o colonne) del determinante stesso.

Consideriamo ora il caso che la B contenga *solo* le variabili $x_1 \ldots x_m, y_1 \ldots y_m$ e quindi sia rispetto ad esse totalmente definita: la condizione superiore non può essere allora soddisfatta (purchè il determinante (2) non sia identicamente nullo, per qualunque ω), poichè la matrice delle ultime $n - m$ righe è indipendente da ω ed ha quindi la caratteristica $n - m$. D'altronde è sempre possibile trasformare la B in una forma di Hermite definita in tutte le variabili che contiene. Ne segue *il teorema fondamentale*:

I. *Se* A *e* B *sono due forme di Hermite di prima specie ed una di esse, ad es. la* B *non è indefinita, l'equazione*:

$$|a_{\mu\nu} - \omega b_{\mu\nu}| = 0 \qquad (\mu\,, \nu = 1\,, 2 \ldots n) \tag{2}$$

ha tutte le radici reali.

Considerando insieme colla forma $\text{A} - \omega\text{B}$ le forme bilineari ad essa *associate* [1], ed estendendo un procedimento già tenuto dal Clebsch in un caso particolare [2], si dimostra anche:

II. *Una radice multipla di ordine* ϱ *della equazione* (2) *rende il determinante* $\text{D}(\omega)$ *di caratteristica* $n - \varrho$.

[1] Cfr. Niccoletti, Atti dell'Accademia di Torino, 15 giugno 1902.

[2] Clebsch, Giornale di Crelle, Bd. 62, pag. 232 segg.

Indichiamo con $D_{i_1 i_2 \ldots i_k}(\omega)$ il minore principale di ordine $n-k$ del determinante (2), che si ottiene sopprimendovi le righe e le colonne $i_1\, i_2 \ldots i_k$; sia inoltre η l'unità negativa o positiva, secondochè B è positiva o negativa (per valori complessi coniugati delle variabili, che non l'annullino); ponendo:

$$(7) \qquad \Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k}(\omega) = \eta^k \,.\, D_{i_1 \ldots i_k}(\omega)$$

ed indicando con $i_1 \ldots i_n$ una determinata permutazione degli indici $1, 2 \ldots n$, consideriamo la successione di $n+1$ funzioni:

$$(8) \qquad D(\omega)\,,\ \Delta_{i_1}(\omega)\,,\ \Delta_{i_1 i_2}(\omega)\,, \ldots \Delta_{i_1 \ldots i_n}(\omega) = 1\,;$$

si ha per essa il teorema:

III. *Se tra le funzioni* (8) *non ve ne sono delle identicamente nulle, nè due qualunque consecutive si annullano per uno stesso valore di* ω, *la* (8) *è una successione di Sturm per la equazione* (2) *e quindi il numero delle radici reali di essa equazione comprese in un intervallo* $(\alpha\beta)$ (*ciascuna contata col suo ordine di moltiplicità*) *è uguale al numero delle variazioni che la* (8) *perde nell'intervallo stesso* [1].

3. Alcune osservazioni sui risultati che precedono.

a) Particolarizzando convenientemente le forme A e B, si hanno dalla (2) delle classi di equazioni, apparentemente diverse, con radici tutte reali, considerate, tra gli altri, da Bochardt, Clebsch, Christoffel ecc. ecc. [2].

b) I teoremi I e II possono evidentemente enunciarsi dicendo che: *I divisori elementari del determinante* $D(\omega)$, *corrispondenti alle radici finite della* (2), *sono reali e lineari* [3]; si ottiene in tal guisa la prima parte di un teorema, ottenuto la prima volta, per via trascendente, dal sig. Gundelfinder [4]. Il teorema del sig. Gundelfinder considera anche i divisori elementari corrispondenti alle radici infinite della (2) e dimostra che essi possono avere solo il primo ed il secondo grado. Delle proprietà elementari della teoria dei determinanti permettono di ottenere (e precisare) questo risultato: si ha così in ciò che precede una dimostrazione puramente algebrica, e di carattere elementare, del teorema del sig. Gundelfinder.

c) Delle due forme di Hermite A e B, una B sia di prima specie, l'altra A di seconda. Ci riduciamo al caso dianzi trattato cambiando ω in $i\omega$. Se dunque la B non è indefinita, la equazione (2) ha in questo caso tutte radici *immaginarie pure*. Essa avrà inoltre i coefficienti reali quando sian

(1) Weber, *Algebra*, vol. I, prima ediz., pag. 276.

(2) Clebsch, Giornale di Crelle, Bd. 57, pag. 327; e 62, pag. 232. Christoffel — ibidem Bd. 63, s. 255.

(3) Muth, *Elementartheiler*, pag. 179.

(4) Hesse, *Vorlesungen aus der analytischen Geometrie*, seconda ediz., 1876, supp. X.

tali i coefficienti di A e di B, quando la B sia dunque reale e simmetrica (e non indefinita), la A reale ed emisimmetrica. In questo caso la (2) può ridursi a contenere solo le potenze pari di ω e posto $\omega^2 = -u$, si ottiene da essa *un'equazione* $H(u) = 0$ *a radici tutte reali e positive.*

d) L'equazione (2) conserverà tutte le radici reali, quando, nelle ipotesi superiori, o se ne moltiplichi il primo membro per un fattore non nullo, ad es. per un determinante di ordine n indipendente da ω e diverso da zero, oppure quando si eseguiscano sulle x e sulle y sostituzioni lineari arbitrarie. Si ottengono così delle equazioni a radici tutte reali di forma molto diversa dalla (2): tra queste ve ne è una classe, dovuta ancora al sig. Gundelfinder [1].

e) Infine delle due forme bilineari A e B, l'una, ad es. la B sia di Hermite, di prima specie, e *definita*; la A sia qualunque. La (2) avrà allora in generale coefficienti e radici complesse, ma se ne può limitare la parte reale e l'immaginaria; più in generale si ha il teorema:

Se la B *è una forma definita di Hermite, ed* $\omega = p + iq$ *è una radice della* (2), *indicando con* ϱ *e* σ *due indeterminate reali affatto arbitrarie, con* $M_{\varrho\sigma}$, $m_{\varrho\sigma}$ *la massima e minima radice dell'equazione* (*a radici tutte reali*):

$$\left| \varrho \frac{a_{\mu\nu} + \overline{a}_{\nu\mu}}{2} + \sigma \frac{a_{\mu\nu} - \overline{a}_{\nu\mu}}{2i} - \omega\, b_{\mu\nu} \right| = 0, \tag{9}$$

si ha la limitazione:

$$m_{\varrho\sigma} \leq \varrho p + \sigma q \leq M_{\varrho\sigma} \text{ [2]}. \tag{10}$$

4. I teoremi che precedono possono estendersi in due sensi diversi, sia rimanendo nel caso di una sola equazione, sia passando a sistemi di più equazioni. Ci limiteremo ad accennare i casi più importanti che si presentano nell'una e nell'altra estensione.

Siano tre forme di Hermite in $2n$ variabili $x_1\, x_2 \ldots x_n$, $y_1\, y_2 \ldots y_n$:

$$A = \Sigma_{\mu\nu}\, a_{\mu\nu}\, x_\mu\, y_\nu\,; \quad B = \Sigma_{\mu\nu}\, b_{\mu\nu}\, x_\mu\, y_\nu\,; \quad C = \Sigma_{\mu\nu}\, c_{\mu\nu}\, x_\mu\, y_\nu \tag{11}$$

e si consideri l'equazione in ω:

$$E(\omega) = |a_{\mu\nu} + 2\omega\, b_{\mu\nu} + \omega^2\, c_{\mu\nu}| = 0. \tag{12}$$

Questa equazione ha i coefficienti reali e ad una sua radice ω_r possono farsi corrispondere due sistemi di equazioni lineari omogenee:

$$\Sigma_\mu\, (a_{\mu\nu} + 2\omega_r\, b_{\mu\nu} + \omega_r^2\, c_{\mu\nu})\, x_\mu^{(r)} = 0\,, \quad (\nu = 1\,, 2\,, \ldots n) \tag{13_r}$$

$$\Sigma_\nu\, (a_{\mu\nu} + 2\omega_r\, b_{\mu\nu} + \omega_r^2\, c_{\mu\nu})\, y_\nu^{(r)} = 0\,, \quad (\mu = 1\,, 2\,, \ldots n) \tag{14_r}$$

[1] Dingeldey, Giornale di Crelle, vol. 119.

[2] Bedinxon, *Sur les racines d'une équation fondamentale* (Accademia di Stoccolma, 14 novembre 1900).

con soluzioni non tutte nulle; ed ancora, se ω_r, ω_s sono due radici *diverse* della (12), $x^{(r)}$, $y^{(s)}$ soluzioni dei corrispondenti sistemi (13_r), (14_s), *si hanno le tre relazioni*:

$$(15)\quad \begin{cases} (a) & 2B(x^{(r)}, y^{(s)}) + (\omega_r + \omega_s)\, C(x^{(r)}, y^{(s)}) = 0\,, \\ (b) & A(x^{(r)}, y^{(s)}) - \omega_r\, \omega_s\, C(x^{(r)}, y^{(s)}) = 0\,, \\ (c) & \left(\dfrac{1}{\omega_r} + \dfrac{1}{\omega_s}\right) A(x^{(r)}, y^{(s)}) + 2B(x^{(r)}, y^{(s)}) = 0\,. \end{cases}$$

Si deducono dalle (15) conseguenze notevoli:

a) Una delle forme estreme ad es. la C sia definita; allora: *la parte reale p di una radice complessa della* (12) *è sempre compresa tra la massima e minima radice dell'equazione in* λ (*a radici tutte reali*)

$$|b_{\mu\nu} + \lambda c_{\mu\nu}| = 0\,;$$

il quadrato r^2 *del modulo tra la massima e minima radice dell'equazione in* σ (*pure a radici reali*):

$$|a_{\mu\nu} - \sigma c_{\mu\nu}| = 0\,.$$

b) Sia definita la B: si hanno dalle (15) *a*) e *c*) conseguenze analoghe per le quantità $\dfrac{1}{p}$; $\dfrac{p}{r^2}$.

c) Due consecutive tra le (1), ad es. la B e la C sian *parzialmente* definite rispetto a gruppi complementari di variabili; cioè se la B è definita rispetto alle $x_{h_1}, x_{h_2}, \dots x_{h_l}$, la C rispetto alle $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots x_{k_m}$, tra le $x_{h_1}, \dots x_{h_l}$; $x_{k_1}, \dots x_{k_m}$ si trovino tutte le $x_1, x_2, \dots x_n$; in questa ipotesi si ha: *Le radici complesse della* (2), *non immaginarie pure, hanno la parte reale del medesimo segno.*

Si indichi inoltre con ε l'unità positiva o negativa, secondochè il segno di B è il positivo o negativo: posto allora (con notazioni analoghe al n° 2):

$$(16)\qquad \boldsymbol{E}_{i_1 i_2 \dots i_k}(\omega) = \varepsilon^k\,.\, \mathrm{E}_{i_1 \dots i_k}(\omega)\,,$$

si consideri la successione:

$$(17)\qquad \mathrm{E}(\omega)\,, \boldsymbol{E}_{i_1}(\omega)\,, \boldsymbol{E}_{i_1 i_2}(\omega)\,, \dots;\ \boldsymbol{E}_{i_1 \dots i_n}(\omega) = 1\,.$$

Secondochè B e C hanno ugual segno (o segno contrario), la successione (17) ha proprietà analoghe a quelle di una successione di Sturm per le radici reali e positive (o reali e negative) della equazione (12).

d) Siano invece le due forme estreme A e C parzialmente definite e di segno contrario; e siano definite rispetto a due gruppi complementari di variabili, oppure con una *stessa* sostituzione lineare sulle x (e la coniugata sulle y) sian riducibili a contenere le stesse k variabili $x'_1, x'_2, .. x'_k$ $(y'_1, y'_2, ... y'_k)$; in questo caso: *L'equazione* (12) *ha tutte le radici reali.*

Se insieme anche la forma intermedia B è (parzialmente) definita (come a c)) è possibile inoltre costruire dai minori principali del determinante (12) due successioni di Sturm di $n+1$ funzioni, l'una per le radici positive, l'altra per le radici negative della equazione stessa: sicchè in particolare quando tutte tre le forme sian definite e ad es. le A, B parzialmente, la C totalmente, e le A e C abbian segno contrario, si ha: *L'equazione* (12) *ha le* $2n$ *radici reali ed* n *positive,* n *negative.*

e) Considerazioni leggermente diverse dalle antecedenti conducono ancora al risultato seguente. La forma C si supponga totalmente definita; e le A, B, C sian tali che si abbia

$$\mathrm{AC} - \mathrm{B}^2 \leq 0 \tag{18}$$

per tutti i possibili valori delle x (e i coniugati delle y); in questo caso ancora: *L'equazione* (12) *ha tutte le radici reali.*

Se invece, per tutti i valori delle x, vale la disuguaglianza:

$$\mathrm{AC} - \mathrm{B}^2 > 0, \tag{19}$$

la equazione (12) non ha radici reali; le parti reali ed immaginarie delle sue radici complesse possono limitarsi.

5. Nella (12) le due forme estreme A e C siano ancora di prima specie, la B di seconda: ci riduciamo al caso precedente cambiando ω in $i\omega$. Ne segue in particolare: *Se le forme* A *e* C *sono* (*parzialmente*) *definite di ugual segno* (*nelle condizioni* (d)) *la* (12) *ha tutte le radici immaginarie pure.* Essa avrà inoltre i coefficienti reali, quando le A, B, C siano anche esse a coefficienti reali, e quindi le A e C simmetriche, la B emisimmetrica: e posto $\omega^2 = -u$ si dedurrà dalla (12) un'equazione $\mathrm{G}(u) = 0$, *con radici tutte reali e positive.* Inoltre dai minori principali del determinante (12) è possibile costruire una successione di $n+1$ funzioni razionali intere in u, che abbia per la $\mathrm{G}(u) = 0$ proprietà analoghe a quelle di una successione di Fourier.

6. Volendo trattare di un sistema di due equazioni con due incognite, consideriamo due reti proiettive di forme bilineari, in $2n$ e $2m$ variabili rispettivamente:

$$\begin{cases} \xi\mathrm{A} + \eta\mathrm{B} + \zeta\mathrm{C} = \Sigma_{\mu\nu}(\xi a_{\mu\nu} + \eta b_{\mu\nu} + \zeta c_{\mu\nu})\, x_\mu y_\nu, & (\mu, \nu = 1, 2 \ldots n), \\ \xi\mathrm{D} + \eta\mathrm{E} + \zeta\mathrm{F} = \Sigma_{rs}(\xi d_{rs} + \eta e_{rs} + \zeta f_{rs})\, u_r v_s; & (r, s = 1, 2 \ldots m), \end{cases} \tag{20}$$

due forme corrispondenti delle due reti saranno ambedue specializzate, quando sia insieme:

$$|\xi a_{\mu\nu} + \eta b_{\mu\nu} + \zeta c_{\mu\nu}| = 0, \quad |\xi d_{rs} + \eta e_{rs} + \zeta f_{rs}| = 0. \tag{21}$$

Se $\omega_\alpha = (\xi_\alpha , \eta_\alpha , \zeta_\alpha)$ è una soluzione (radice) delle (21), i quattro sistemi di equazioni lineari omogenee

$$(22)\left\{\begin{aligned}
&(a)\quad \sum_1^n{}_\mu (\xi_\alpha a_{\mu\nu} + \eta_\alpha b_{\mu\nu} + \zeta_\alpha c_{\mu\nu})\, x_\mu^{(\alpha)} = 0\,, \quad (\nu = 1\,, 2 \ldots n)\\
&(b)\quad \sum_1^n{}_\nu (\xi_\alpha a_{\mu\nu} + \eta_\alpha b_{\mu\nu} + \zeta_\alpha c_{\mu\nu})\, y_\nu^{(\alpha)} = 0\,, \quad (\mu = 1\,, 2 \ldots n)\\
&(c)\quad \sum_1^m{}_r (\zeta_\alpha d_{rs} + \eta_\alpha e_{rs} + \zeta_\alpha f_{rs})\, u_r^{(\alpha)} = 0\,, \quad (s = 1\,, 2 \ldots m)\\
&(d)\quad \sum_1^m{}_s (\xi_\alpha d_{rs} + \eta_\alpha e_{rs} + \zeta_\alpha f_{rs})\, v_s^{(\alpha)} = 0\,, \quad (r = 1\,, 2 \ldots m)
\end{aligned}\right.$$

hanno soluzioni *non tutte nulle*, e per due radici $\omega_\alpha , \omega_\beta$ *distinte* si ha la relazione fondamentale:

$$(23)\qquad \mathrm{B}(x^{(\alpha)}\, y^{(\beta)})\, \mathrm{F}(u^{(\alpha)}\, v^{(\beta)}) - \mathrm{C}(x^{(\alpha)}\, y^{(\beta)})\, \mathrm{E}(u^{(\alpha)}\, v^{(\beta)}) = 0\,.$$

Le forme (20) siano ora di Hermite di prima specie (o tutte di seconda). Le (21) hanno i coefficienti reali e se $\omega_\alpha , \omega_\beta$ sono due radici complesse coniugate, si può supporre nella (23) che $y_i^{(\beta)}$, $v_r^{(\beta)}$ siano complesse coniugate di $x_i^{(\alpha)}$, $u_r^{(\alpha)}$ rispettivamente. Si supponga ora, per fare il caso più semplice, che le quattro forme B, C, E, F siano definite, e tre abbiano uno stesso segno, una il segno contrario. La (23) non può allora aver luogo pei valori superiori delle $x^{(\alpha)}$, $u^{(\alpha)}$, $y^{(\beta)}$, $v^{(\beta)}$. Ne seguono i due teoremi:

a) Nelle ipotesi fatte, il sistema delle due equazioni dei gradi n ed m nelle incognite ω e θ:

$$(24)\qquad |a_{\mu\nu} + \omega b_{\mu\nu} + \theta c_{\mu\nu}| = 0\,; \quad |d_{rs} + \omega e_{rs} + \theta f_{rs}| = 0\,,$$

ha tutte le radici reali.

b) Se (ω , θ) è una soluzione del sistema:

$$(25)\qquad |a_{\mu\nu}\omega + b_{\mu\nu} + c_{\mu\nu}\theta| = 0\,; \quad |d_{rs}\omega + e_{rs} + f_{rs}\theta| = 0\,,$$

la ω è reale, ed, ove non sia nulla, anche θ è reale.

7. Infine le B, C, E, F siano forme di Hermite di prima specie, le A e D di seconda: ci riduciamo al caso antecedente, cambiando ξ in $i\xi$ (od η e ζ in $i\eta , i\zeta$): nelle stesse ipotesi del n. 6 le (24) hanno allora ad es. radici immaginarie pure. Più particolarmente quando le sei forme abbiano i coefficienti reali e quindi le B, C, E, F sian simmetriche, le A e B emisimmetriche, le (21) hanno i coefficienti reali.

a) Poniamovi allora $\xi = 1$, $\eta = \omega$, $\zeta = \omega\theta$; $\omega^2 = -u$; le (21) si cambiano in due equazioni:

$$(26)\qquad \mathrm{G}(u\,, \theta) = 0\,, \quad \mathrm{H}(u\,, \theta) = 0$$

con radici $(u\,, \theta)$ reali e u reale e positivo.

b) Poniamovi invece $\xi=\omega$, $\eta=1$, $\zeta=\theta$, $\omega^2=-u$; otterremo due equazioni:

$$M(u,\theta)=0\,,\quad N(u,\theta)=0\,, \tag{27}$$

tali che in una loro soluzione (u,θ), u è reale e non negativo, e se u è diverso da zero, anche θ è reale.

Fisica terrestre. — *Sul problema generale della sismografia.* Nota V del dott. M. Contarini, presentata dal Socio V. Cerruti.

In tutte le Note da me pubblicate con questo titolo nei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, come pure nella prima Nota sulla determinazione dei moti sismici ivi citata, esiste un errore grave per sè [1], ma fortunatamente non molto importante per le applicazioni pratiche che mi sono proposto: anzi la rettifica che pubblicherò fra breve lascerà sostanzialmente intatto il metodo e l'ordine seguiti nei lavori precedenti. — Intanto credo opportuno limitarmi a riprodurre corrette le equazioni differenziali nelle quali si rese sensibile l'errore commesso, per procedere poi alla integrazione, cioè per determinare in funzione del tempo le sei incognite sismiche.

Alla prima delle (17) bisogna sostituire

$$\eta''\,m_z+\gamma''-\alpha g\,m_z-\xi''\varrho\,m_z+U=0\,. \tag{17'}$$

E alla (19_1)

$$\eta''r\,\boldsymbol{M}+\alpha''p\,\boldsymbol{M}_x+\gamma''r\,\boldsymbol{M}_z-\alpha g\,r\,\boldsymbol{M}+r\boldsymbol{M}(\pi\zeta''-\varrho\xi'')+\Omega=0\,. \tag{19'_1}$$

19. — Finora, cercando le equazioni che reggono il moto dei varî strumenti sismici, questi si supposero indipendenti gli uni dagli altri; cosicchè le variabili ξ, η, ζ, α, β, γ che compariscono, o tutte o in parte, nei diversi sistemi di equazioni differenziali trovate, hanno un significato e un valore diverso a

[1] L'errore consiste in ciò: per calcolare gli spostamenti virtuali d'un punto P_{ri}, sono partito dall'espressione

$$\delta\xi_{ri}=\delta\zeta_{ro}+\delta\chi_r(\zeta_{ri}-\zeta_{ro})-\delta\varrho_r(\eta_{ri}-\eta_{ro})\quad \text{etc. (V. I, pag. 383)}$$

che vale per qualunque movimento rigido; ma ho implicitamente ammesso che i coefficienti dei binomi $(\zeta_{ri}-\zeta_{ro}),\ldots$ fossero appunto le *variazioni arbitrarie delle rotazioni* $\chi_r,\ldots$, mentre invece sono *simboli* che rappresentano funzioni lineari di quelle variazioni; in tal modo c'era il pericolo di omettere nelle equazioni finali dei termini non trascurabili. Quanto al termine $-\alpha g m_z$ che era stato omesso nella (17) ed ora comparisce nella (17'), si può ritrovare facilmente osservando che la reazione elastica dovuta alla rettificazione iniziale della sbarra non fa equilibrio al *peso* dello strumento, ma soltanto alla componente del peso secondo l'asse delle Z (verticale apparente). [V. III, pag. 477].