ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIX.

1902

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1902

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia sino al 21 settembre 1902.

Matematica. — *Trasformazioni infinitesime e forme ai differenziali di second'ordine.* Nota del Corrispondente ERNESTO PASCAL.

Questa Nota è la continuazione di un'altra pubblicata poco tempo fa in questi medesimi Rendiconti [1]; in essa mi propongo di studiare il risultato dell'applicazione di una trasformazione infinitesima ad una espressione ai differenziali di second'ordine, e di porre questo risultato sotto una forma le cui parti sieno invariantive, analogamente a quanto si fa nella teoria delle ordinarie espressioni pfaffiane.

Della formola ottenuta faccio poi alcune applicazioni per la ricerca di una speciale categoria di trasformazioni infinitesime che lasciano inalterata l'espressione data.

In questa Nota mi riferirò continuamente ai simboli e notazioni adoperati nella precedente.

1. Nel § 6 della mia Memoria intitolata: *Introduzione alla teoria invariantiva delle equazioni di tipo generale ai differenziali totali di 2° ordine* (Ann. di Mat. (3), t. VII, 1901) ho definito che cosa intendo per: *operare una trasformazione infinitesima*

$$\Xi f = \sum_k \xi_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \tag{1}$$

[1] *Sulla teoria invariantiva delle espressioni ai differenziali di 2° ordine e su di una estensione dei simboli di Christoffel*, Rend. Acc. dei Lincei, (5), t. XI, 2° semestre, pag. 105,

su di una espressione del tipo

$$\mathrm{U}=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{X}_k\,d^2x_k+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{X}_{ij}\,dx_i\,dx_j \tag{2}$$

che chiamerò *forma ai differenziali di 2° ordine.*

Si ha

$$\Xi\,\mathrm{U}=\sum_k\sum_r\frac{\partial\mathrm{X}_k}{\partial x_r}\xi_r\,d^2x_k+\sum_k\mathrm{X}_k\,d^2\xi_k+ \tag{3}$$

$$+\sum_i\sum_j\sum_r\xi_r\frac{d\mathrm{X}_{ij}}{\partial x_r}dx_i\,dx_j+2\sum_i\sum_j\mathrm{X}_{ij}\,d\xi_i\,dx_j\,.$$

Formiamo ora il differenziale secondo dell' invariante

$$A=\sum_k\mathrm{X}_k\,\xi_k \tag{4}$$

e otteniamo

$$d^2A=\sum_r\xi_r\left[\sum_k\frac{\partial\mathrm{X}_r}{\partial x_k}d^2x_k+\sum_i\sum_j\frac{\partial^2\mathrm{X}_r}{\partial x_i\,\partial x_j}dx_i\,dx_j\right]+$$

$$+2\sum_i\sum_j\frac{\partial\mathrm{X}_i}{\partial x_j}d\xi_i\,dx_j+\sum_k\mathrm{X}_k\,d^2\xi_k$$

donde, adoperando i soliti simboli

$$\Xi\,\mathrm{U}=d^2A+\sum_k\sum_r\xi_r\,(kr)\,d^2x_k+\sum_r\sum_i\sum_j\xi_r\left(\frac{\partial\mathrm{X}_{ij}}{\partial x_r}-\frac{\partial^2\mathrm{X}_r}{\partial x_i\,\partial x_j}\right)dx_i\,dx_j- \tag{5}$$

$$-2\sum_i\sum_j((ij))\,d\xi_i\,dx_j\,.$$

Introduciamo ora la forma covariante C considerata nella precedente Nota:

$$\mathrm{C}=\sum_i\sum_j((ij))\,\xi_i\,dx_j \tag{6}$$

da cui otteniamo

$$d\mathrm{C}=\sum_i\sum_j((ij))\,d\xi_i\,dx_j+\sum_i\sum_j\xi_i\,((ij))\,d^2x_j+$$

$$+\sum_i\sum_j\sum_r\frac{\partial((ij))}{\partial x_r}\xi_i\,dx_r\,dx_j\,,$$

e possiamo quindi scrivere, con opportuno cambiamento di indici [ricordando che $(kr)=((kr))-((rk))$]

$$\Xi\,\mathrm{U}=d^2A-2\,d\,\mathrm{C}+\sum_k\sum_r\xi_r\,[((kr))+((rk))]\,d^2x_k+$$

$$+\sum_r\sum_i\sum_j\xi_r\left[\frac{\partial\mathrm{X}_{ij}}{\partial x_r}-\frac{\partial^2\mathrm{X}_r}{\partial x_i\,\partial x_j}+2\,\frac{\partial((rj))}{\partial x_i}\right]dx_i\,dx_j\,.$$

Ora introducendo il simbolo a tre indici già introdotto negli altri miei lavori, e che, come ho detto nella precedente Nota, è da considerarsi una estensione del simbolo di Christoffel, si trova facilmente che

$$\{i\,j\,r\} = \frac{\partial X_{ij}}{\partial x_r} - \frac{\partial^2 X_r}{\partial x_i\,\partial x_j} + \frac{\partial((r\,j))}{\partial x_i} + \frac{\partial((r\,i))}{\partial x_j} \tag{7}$$

mentre poi alla parentesi quadra contenuta nell'ultimo termine della precedente espressione di Ξ U, a causa del sommatorio rispetto ad i ed j, può darsi anche la forma rappresentata dal secondo membro di (7), ed essendo

$$((k\,r)) + ((r\,k)) = \{k\,r\}\,,$$

si ha infine:

$$\Xi \mathrm{U} = d^2 \varDelta - 2\,d\mathrm{C} + \sum_k \sum_r \{k\,r\}\,\xi_r\,d^2 x_k + \sum_i \sum_j \sum_r \{i\,j\,r\}\,\xi_r\,dx_i\,dx_j\,. \tag{8}$$

Si presenta così, come si vede, il covariante di 2° ordine L da noi già considerato nella precedente Nota.

Se la forma U diventa *la forma differenziale quadratica*

$$\mathrm{U}' = \sum_i \sum_j X_{ij}\,dx_i\,dx_j \tag{9}$$

l'invariante $\varDelta$ si riduce a zero, il covariante C diventa

$$\mathrm{C}' = - \sum_i \sum_j X_{ij}\,\xi_i\,dx_j \tag{10}$$

e la (8) diventa:

$$\frac{1}{2}\,\Xi \mathrm{U}' = d\mathrm{C}' - \sum_{k,r} X_{kr}\,\xi_r\,d^2 x_k - \sum_{i,j,r} \begin{bmatrix} i\,j \\ r \end{bmatrix} \xi_r\,dx_i\,dx_j \tag{11}$$

in cui $\begin{bmatrix} i\,j \\ r \end{bmatrix}$ sono gli ordinarî simboli di Christoffel.

2. Diremo che *la forma* U *ammette la trasformazione infinitesima* Ξ, ovvero che *questa lascia invariata* U, quando Ξ U è, a meno di un fattore, uguale alla medesima U:

$$\Xi\,\mathrm{U} = \varrho\,\mathrm{U}. \tag{12}$$

Ponendo

$$\mathrm{C}_j = \sum_i ((i\,j))\,\xi_i \tag{13}$$

e quindi

$$\mathrm{C} = \sum_j \mathrm{C}_j\,dx_j\,,$$

dalla (12) si ricavano le seguenti equazioni:

$$(14)\qquad \begin{cases} \sum\limits_r \}k\,r\{\;\xi_r = \varrho\, X_k - \dfrac{\partial A}{\partial x_k} + 2\, C_k \\ \sum\limits_r \}i\,j\,r\{\;\xi_r = \varrho\, X_{ij} - \dfrac{\partial^2 A}{\partial x_i\, \partial x_j} + \dfrac{\partial C_j}{\partial x_i} + \dfrac{\partial C_i}{\partial x_j} \end{cases}$$

le quali insieme alle

$$(14)\qquad \begin{cases} \sum\limits_r X_r\, \xi_r = A \\ \sum\limits_r ((r\,k))\, \xi_r = C_k \qquad\qquad (k = 1\,, 2\,, \ldots n) \end{cases}$$

sono le relazioni cui devono soddisfare le $\xi_1 \ldots \xi_n$ perchè la trasformazione Ξ lasci invariata U.

Alle seconde delle (15) possiamo sostituire altre che sono più convenienti per il nostro scopo.

Se dalla prima delle (14) sottragghiamo la seconda delle (15) moltiplicata per 2, e teniamo conto delle relazioni

$$\}k\,r\{ = ((k\,r)) + ((r\,k))\,,$$
$$(k\,r) = ((k\,r)) - ((r\,k))\,,$$

alla seconda delle (15) possiamo sostituire un'altra equazione e il sistema (15) diventa

$$(16)\qquad \begin{cases} \sum\limits_r X_r\, \xi_r = A \\ \sum\limits_r (k\,r)\, \xi_r = \varrho\, X_k - \dfrac{\partial A}{\partial x_k}\,. \end{cases}$$

È degno di nota che la matrice dei coefficienti delle incognite ξ e ϱ nelle equazioni lineari (16) (14) è esattamente la matrice da noi considerata già, ad altro scopo, nel lavoro: *Un teorema della teoria invariantiva* ecc. (Rend. Ist. Lomb. (2), t. 34, 1901) e che è

$$D \equiv \left\| \begin{matrix} 0 & X_1 \ldots\ldots\ldots\ldots X_n \\ X_k & (k\,1) \ldots\ldots\ldots\ldots (k\,n) \\ X_k & \}k\,1\{ \ldots\ldots\ldots\ldots \}k\,n\{ \\ X_{ij} & \}i\,j\,1\{ \ldots\ldots\ldots \}i\,j\,n\{ \end{matrix} \right\| \begin{matrix} \\ \} \; k = 1, 2, \ldots n \\ \} \; k = 1, 2, \ldots n \\ \} \; i, j = 1, 2, \ldots n\,. \end{matrix}$$

Ricerchiamo *le condizioni cui devono soddisfare* A *e le* C_k *perchè esista una* Ξ *che lasci invariata* U.

Formiamo le equazioni lineari

$$
(17)\quad \begin{cases} \sum_k X_k \zeta_k + \sum_k X_k \zeta_k^{(1)} + \sum_i \sum_j X_{ij} \zeta_{ij} = 0 \\ X_r \zeta_0 + \sum_k (kr) \zeta_k + \sum_k \{kr\} \zeta_k^{(1)} + \sum_i \sum_j \{ijr\} \zeta_{ij} = 0 \\ (r = 1, 2, \dots n), \qquad (\zeta_{ij} = \zeta_{ji}) \end{cases}
$$

e sia $\zeta_0 \zeta_k \zeta_k^{(1)} \zeta_{ij}$ una soluzione di questo sistema; moltiplicando tutte le (16) e (14) ordinatamente per le ζ e sommando, si eliminano le incognite ξ e ϱ, e resta:

$$
(18)\quad \zeta_0 \mathit{\Delta} - \sum_k (\zeta_k + \zeta_k^{(1)}) \frac{\partial \mathit{\Delta}}{\partial x_k} - \sum_i \sum_j \zeta_{ij} \frac{\partial^2 \mathit{\Delta}}{\partial x_i \partial x_j} +
$$

$$
+ 2 \left[\sum_k \zeta_k^{(1)} C_k + \sum_i \sum_j \zeta_{ij} \frac{\partial C_i}{\partial x_j} \right] = 0
$$

e, variando le ζ, si ha così *un sistema di equazioni a derivate parziali cui devono soddisfare $\mathit{\Delta}$ e le C_k*; d'altra parte *se $\mathit{\Delta}$ e le C_k (che non sieno tutte zero) soddisfanno a tutte le* (18), *le equazioni lineari* (16) (14) *ammetteranno una soluzione, ed esisterà una trasformazione infinitesima che lasci invariata* U.

Fermiamoci per poco a considerare i casi nei quali la trasformazione infinitesima Ξ sia connessa invariantivamente a U.

Sia zero la forma covariante C. Fra i sistemi di soluzioni del sistema (17) esistono sempre quelle per le quali è:

$$
\zeta_0 = 0, \qquad \zeta_k^{(1)} = 0, \qquad (k = 1, \dots n),
$$

e questi sistemi soddisfanno perciò l'equazione

$$
(19)\quad \sum_k X_k \zeta_k + \sum_i \sum_j X_{ij} \zeta_{ij} = 0
$$

i cui sistemi di soluzioni ζ sono i coefficienti delle equazioni a derivate parziali che costituiscono il *sistema aggiunto* alla forma U (v. il § 4 della mia Memoria negli Annali di Matematica citata in principio); possiamo conchiudere che *nel caso indicato, $\mathit{\Delta}$ soddisfa a tutte le equazioni del sistema aggiunto alla forma* U.

Due casi allora sono possibili: o $\mathit{\Delta}$ è costante, ovvero no, nel quale ultimo caso le equazioni del sistema aggiunto devono ammettere una soluzione comune diversa dalla soluzione evidente $f =$ costante.

Per le conclusioni cui siamo pervenuti nella predetta Memoria, questo ultimo caso non può avvenire se non quando il sistema aggiunto è *completo*, cioè quando la equazione $U = 0$ è *completamente integrabile*; d'altra parte se ciò si verifica, avendosi (v. formole (15) del § 1 della stessa Memoria)

$$\frac{((r\,k))}{((r\,h))} = \frac{((s\,k))}{((s\,h))},$$

il determinante delle seconde fra le equazioni (15) è zero, e quindi esistono le ξ per le quali tutte le C_k, e perciò anche C, sono zero. Concludiamo: *Perchè esista una trasformazione infinitesima che lasci invariata* U, *e di cui il covariante simultaneo* C *sia identicamente zero, mentre* NON *sia costante l'invariante* A *è necessario e basta che* $U = 0$ *sia completamente integrabile, e che* A *soddisfi a tutte le equazioni a derivate parziali*

$$\zeta_0\, A = \sum_k (\zeta_k + \zeta_k^{(1)}) \frac{\partial A}{\partial x_k} + \sum_i \sum_j \zeta_{ij} \frac{\partial^2 A}{\partial x_i\, \partial x_j} \tag{20}$$

essendo le ζ *tutte le soluzioni delle* (17).

Se poi $A = \text{cost.}$ ma *non zero*, dalla (18) si vede che deve necessariamente essere $\zeta_0 = 0$, e perchè questa sia una conseguenza delle (17) deve essere diversa da zero (cioè di caratteristica *massima*) la matrice D_1 ottenuta da D colla soppressione della prima linea; perciò se D_1 è zero, deve essere $A = 0$.

In tale ultimo caso le (18) sono tutte soddisfatte, e le (16) (14) diventano equazione lineari *omogenee*, per la cui coesistenza è necessario e basta l'annullarsi identico della matrice D, cioè che D abbia *al più* caratteristica n. D'altra parte, se ciò si verifica, sottraendo in D dagli elementi della $2^a, 3^a, \ldots (n+1)^{ma}$ linea, rispettivamente quelli della $(n+2)^{ma}$, $(n+3)^{ma}, \ldots (2n+1)^{ma}$, e tenendo conto delle solite relazioni fra i simboli (kr) e $\}kr\{$, gli elementi della $2^a, 3^a, \ldots (n+1)^{ma}$ linea diventano

$$0,\ ((1\,,k))\ ,\ ((2\,,k))\,, \ldots ((n\,k))\ ; \qquad (k = 1\,, \ldots n)$$

e poichè deve essere zero la matrice formata colla prima linea di D, con queste n linee e con un'altra qualunque di D, scegliendo per questa una di cui il primo elemento sia diverso da zero, si deduce che deve essere zero la matrice

$$\left\| \begin{matrix} X_1 & \ldots\ldots\ldots & X_n \\ ((1\,,k)) & \ldots\ldots\ldots & ((n\,k)) \end{matrix} \right\| \Big\} \ k = 1\,, \ldots n\,,$$

(cioè questa deve avere per caratteristica *al più* il numero $n - 1$), e perciò le equazioni omogenee cui si riducono le (15) per $A = C = 0$, sono compatibili.

Ne concludiamo: *Perchè esista una trasformazione infinitesima che lasci invariata* U, *e di cui sieno contemporaneamente zero il covariante simultaneo* C *e l'invariante* Δ, *è necessario e basta che la matrice* D *abbia* AL PIÙ *caratteristica n*.

Nel caso in cui U diventi la forma differenziale quadratica U′ (formola (9)), si ha:

Perchè esista una trasformazione infinitesima che lasci invariata la forma differenziale quadratica U′, *e di cui sia zero il covariante simultaneo* C′ (*formola* (10)), *è necessario e basta che sia zero la matrice*

$$\Delta = \left\| \begin{matrix} 0 & X_{k1} \dots\dots\dots\dots & X_{kn} \\ X_{ij} & \begin{bmatrix} ij \\ 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots\dots & \begin{bmatrix} ij \\ n \end{bmatrix} \end{matrix} \right\| \begin{matrix} \{ k = 1, 2 \dots n \\ \{ ij = 1, 2, \dots n \end{matrix}$$

in cui $\begin{bmatrix} ij \\ r \end{bmatrix}$ *sono gli ordinari simboli di Christoffel.*

Chimica agraria. — *Fermentazione alcoolica del mosto di Fico d'India con lieviti abituati al fluoruro di sodio.* Nota di C. ULPIANI e L. SARCOLI, presentata dal Socio PATERNÒ.

In una pubblicazione precedente (1) noi abbiamo dimostrato quale vantaggio potrebbe recare all'agricoltura delle regioni meridionali d'Italia, lo sfruttamento industriale di un prodotto di così poco costo culturale e di così gran reddito come il fico d'India.

Abbiamo fatto notare come i tentativi fatti in Sicilia ed in Sardegna per utilizzare nell'industria dell'alcool il fico d'India avessero sortito poco felice esito, perchè la non ancora sviluppata tecnica delle fermentazioni non permetteva di trarre dai frutti quel rendimento in alcool che si sarebbe dovuto ottenere per renderne rimuneratrice la lavorazione.

Come primo risultato degli studî che esponevamo eravamo giunti alle seguenti conclusioni:

1°. Il mosto di fico d'India, abbandonato a sè stesso, subisce la fermentazione alcoolica per azione di un lievito speciale, il *Sach. Opuntiae*, che è stato da noi isolato e studiato dal lato morfologico e biologico.

2°. La fermentazione prodotta da questo lievito è del tutto inadatta alla produzione industriale dell'alcool.

3°. La sterilizzazione del mosto e l'innesto successivo di fermenti selezionati, scelti razionalmente, produce un rendimento quasi teorico. Purtroppo

(1) Gazz. chim., t. 31, p. II.