ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIX.

1902

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1902

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia sino al 5 ottobre 1902.

Geometria. — *Sui numeri infiniti ed infinitesimi attuali.* Nota del dott. A. Bindoni, presentata dal Socio G. Veronese.

1. È noto come il prof. Veronese nei suoi *Fondamenti di Geometria* abbia, per primo, costruita una geometria non-archimedea e un conseguente campo di numeri infiniti ed infinitesimi attuali. Ora la questione dell'indipendenza del postulato d'Archimede venne ripresa recentemente dall'Hilbert nei suoi G. d. G., e risolta con un procedimento davvero elegante. Hilbert pone le basi di una geometria non-archimedea, servendosi di un campo di numeri infiniti ed infinitesimi definito da un algoritmo assai semplice. Per chi non conoscesse il lavoro di Hilbert riportiamo le frasi che si riferiscono all'argomento, dalla traduzione francese di L. Langel:

« . . . . . construisons le domaine $\Omega(t)$ de toutes les fonctions algébriques de t, qui proviennent de t au moyen des quatre opérations: addition, soustraction, multiplication, division, et de la cinquième opération $\sqrt{1+\omega^2}$, òu ω désigne une fonction quelconque, déjà obtenue au moyen de ces cinq opérations.

. . . .

« Nous regarderons maintenant les fonctions du domaine $\Omega(t)$ comme une certaine espèce de nombres complexes; dans le système numérique ainsi défini, il est clair que les règles usuelles de calcul sont toutes vérifiées. Enfin a, b désignant deux nombres différents quelconques de ce système, nous dirons que le nombre a est plus grand ou plus petit que b — ce qui s'écrira $a > b$ ou $a < b$ — suivant que la différence $c = a - b$, regardée comme fonction de t prend pour des valeurs, suffisamment grandes de t une valeur ou bien toujours positive ou bien toujours négative. En adoptant cette convention, il est possible de ranger par ordre de grandeur les nombres de notre système numérique complexe, suivant une distribution analogue à celle que l'on emploie pour les nombres réels; on reconnait aisément aussi que les théorèmes qui consistent à dire que les inégalités subsistent, lorsque à chacun de leurs membres on ajoute un même nombre ou lorsqu'on y multiplie chaque nombre par un même nombre > 0, sont également vérifiés dans notre système numérique complexe. Maintenant, si l'on désigne par n un nombre entier positif rationnel quelconque, il est clair que pour les deux nombres n e t du domaine $\Omega(t)$ l'inégalité $n < t$ sera vérifiée, car la différence $n - t$ regardée comme fonction de t sera toujours négative pour des valeurs positives de t suffisamment grandes. Nous exprimerons ce fait comme il suit: Les deux nombres 1 et t du domaine $\Omega(t)$, qui tous deux sont > 0, jouissent de la propriété qu'un multiple quelconque du premier sera toujours plus petit que le second de ces nombres ».

Però il prof. Hilbert, sebbene dichiari essergli noto che la stessa questione fu trattata precedentemente dal prof. Veronese, non s'intrattiene in un confronto tra la sua geometria e quella di Veronese; e poichè un tale confronto mette in chiaro una stretta relazione tra le due teorie, non crediamo inutile l'occuparcene nella presente Nota riservandoci di trattarne con maggiori particolari in un'altra pubblicazione. Sarà opportuno per ciò il prender le mosse dalla costruzione di un campo numerico più ampio del campo $\Omega(t)$, servendoci del procedimento dello stesso Hilbert, però alquanto generalizzato.

2. Volendo entrar subito in argomento, consideriamo il campo degli elementi definiti dalla seguente espressione nella lettera x:

$$\frac{a_1 x^{\omega_n} + a_2 x^{\omega_{n-1}} + \cdots + a_n x^{\omega_1}}{b_1 x^{\omega'_m} + b_2 x^{\omega'_{m-1}} + \cdots + b_m x^{\omega'_1}}$$

nella quale $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_m$ sono numeri reali; $\omega_n \ldots \omega_1, \omega'_m \ldots \omega'_1$ od anche espressioni ottenute precedentemente dalla espressione data.

Indichiamo con $\Gamma(x)$ il campo di elementi (numeri) così definiti.

Poichè è facile persuadersi che, le considerazioni e le definizioni fatte dal sig. Hilbert, possono trasportarsi immediatamente al nostro campo, potremo enunciare le seguenti proprietà fondamentali del campo $\Gamma(x)$:

a) Il campo $\Gamma(x)$ è ordinabile,

b) costituisce un corpo rispetto alle operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione,

c) e valgono per queste le proprietà fondamentali del calcolo algebrico.

d) Inoltre adoperando note denominazioni, nel campo $\Gamma(x)$ esistono elementi che hanno il carattere di infiniti ed infinitesimi attuali rispetto ai numeri reali, che evidentemente sono contenuti nel campo $\Gamma(x)$. Basta infatti confrontare fra loro, secondo il criterio ordinativo del sig. Hilbert, gli elementi $x^{-x}, x^{-n}, x^{-1}, a, x, x^n, x^x$.

3. Ora da questo campo di numeri si può dedurre quello dei numeri infiniti e infinitesimi del prof. Veronese. Consideriamo infatti la espressione, che si ottiene dalla nostra supponendovi: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ interi, e di più a_1 positivo; $b_1 = b_2 = \cdots = b_{m-1} = 0$, $b_m = 1$; $\omega_1' = 0$; $\omega_n, \omega_{n-1}, \ldots \omega_1$ interi e positivi (ω_1 anche zero) e disposti in ordine decrescente, oppure espressioni ottenute precedentemente da quella ora definita, e così via.

È ovvio che la espressione così ottenuta equivale al simbolo Z del prof. Veronese pei numeri interi e positivi finiti e infiniti di ordine finito ed infinito; anzi, posto in essa

$$ax^{\omega} \equiv a\,\infty_1^{\omega},$$

si trasforma identicamente in esso. Risulta immediatamente che, questo campo, quando anche si affettino i suoi elementi dei segni + e — colle solite convenzioni, costituisce un corpo rispetto alle operazioni di addizione, sottrazione e moltiplicazione, e che queste operazioni godono delle proprietà fondamentali del calcolo algebrico.

Ancora: il campo, i cui elementi sono definiti dalla nostra espressione quando i suoi termini sono elementi del campo ora considerato equivale al campo dei numeri frazionari positivi e negativi del prof. Veronese; ed è facile persuadersi che esso costituisce un corpo rispetto alle quattro operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione, e che per queste operazioni valgono le proprietà fondamentali del calcolo algebrico.

Volendo ottenere dal nostro campo $\Gamma(v)$ un campo equivalente al continuo relativo all' unità fondamentale del prof. Veronese, pel quale cioè valgano le ipotesi I-VI, basterà supporre nella nostra espressione $a_1, a_2, \ldots a_n$ numeri reali; $b_1 = b_2 = \cdots = b_{m-1} = 0$; $b_m = 1$; $\omega_1' = 0$; $\omega_n, \omega_{n-1}, \ldots \omega_1$ espressioni equivalenti al simbolo Z, sopra nominato.

Si otterrà infine un campo numerico che rispecchi il continuo rettilineo dato da tale ipotesi (I-VII) procedendo così: si consideri dapprima il campo numerico definito dalla nostra espressione quando in essa si supponga $a_1, a_2, \ldots a_n$ numeri reali; $\omega_n, \omega_{n-1}, \ldots, \omega_1$ espressioni equivalenti al simbolo Z affetto dai segni + o —; $b_1 = b_2 = \cdots = b_{m-1} = 0$; $b_m = 1$; $\omega_1' = 0$.

Evidentemente otteniamo così un campo contenuto in quello del prof. Veronese senza però averlo esaurito completamente; occorrerà a tal uopo definire le ripartizioni in due classi contigue [1] del campo che abbiamo or ora considerato e stabilire che ad ognuna di esse corrisponda uno ed un solo ente. È facile persuadersi che questo campo costituisce un corpo rispetto alle quattro operazioni fondamentali, e che per queste valgono le proprietà del calcolo algebrico.

Infine osservando che l'espressione frazionaria dell'Hilbert, ottenuta mediante le prime quattro operazioni, è in casi particolari un funzionale intero, e che pei funzionali interi è stata svolta una teoria analoga a quella dei numeri primi, concludiamo che i numeri infiniti e infinitesimi corrispondenti del Veronese costituiscono un campo pel quale è già stata fatta una teoria, diremo, dei numeri primi, quella stessa che è stata fatta pei funzionali interi. Ricordiamo anche la relazione tra i funzionali interi e gli ideali di Kummer-Dedekind, la quale ci dà una relazione tra ideali e i particolari numeri del Veronese ai quali abbiamo accennato.

4. Vogliamo ora notare le differenze tra il procedimento del sig. Hilbert ed il nostro, per mostrare con qualche particolare il legame esistente tra il campo numerico di Hilbert e quello di Veronese.

È chiaro anzitutto, che il procedimento del sig. Hilbert dà soltanto un campo di numeri infiniti ed infinitesimi di ordine finito, giacchè egli suppone gli esponenti di x *numeri interi*; mentre il nostro dà un campo di

(1) Per essere un po' più espliciti su questo punto, anche perchè esso fu causa di malintesi, e quindi di critiche errate, diremo di che natura siano le classi contigue, che noi consideriamo.

Dedekind dà una definizione del postulato della continuità sostanzialmente equivalente al seguente:

« Se $(P_1 P_2)$ è una sezione fatta nella retta esiste sempre nella retta stessa un punto P, che non appartiene nè alla classe P_1, nè alla classe P_2; e quindi separa i punti delle due classi, essendo a destra di ogni punto della prima e a sinistra di ogni punto della seconda classe ».

È noto d'altra parte come, ammesso questo postulato, il postulato d'Archimede possa essere dimostrato. Ne segue che ammesso un tal postulato la retta è essenzialmente archimedea, e quindi sono impossibili le ipotesi sui segmenti infiniti ed infinitesimi attuali.

Partiamoci ora invece da quest'altra definizione (Veronese F. G.).

Definiz. « Un segmento cogli estremi variabili in versi apposti (XX') che diventa più piccolo di ogni segmento dato, diremo che diventa *indefinitamente piccolo* e poniamo il seguente postulato (Veronese F. G.).

« Ogni segmento cogli estremi variabili in versi opposti che diventa indefinitamente piccolo contiene un elemento fuori del campo di variabilità dei suoi elementi ».

Dal confronto dei due diversi postulati del continuo rettilineo si deducono facilmente le seguenti proposizioni:

1ª. Ogni ripartizione dei punti della retta in due classi definite in modo da soddisfare al postulato di Veronese è anche una *sezione*.

2ª. Viceversa una sezione può non soddisfare al postulato di Veronese.

3ª. Rimanendo nel campo finito le due ipotesi si equivalgono, cioè il postulato di Dedekind equivale al postulato di Veronese.

numeri infiniti ed infinitesimi anche di ordine infinito, pel fatto che noi abbiamo supposto gli esponenti di x anche *espressioni*, ottenute precedentemente da quella costruita con esponenti numeri interi (veramente numeri reali, che poi, per ottenere il campo del prof. Veronese, abbiamo supposti interi). Ma il nostro procedimento del n. 3 differisce da quello di Hilbert anche pel fatto che noi non ci serviamo della operazione $\sqrt{1+\omega^2}$; però se ci riferiamo al campo di numeri equivalente a quello di Veronese, che noi abbiamo dedotto dal nostro campo $\Gamma(x)$ particolareggiandolo e introducendo una nuova ipotesi (la corrispondenza di uno ed un unico ente ad ogni ripartizione in due classi contigue del campo equivalente al continuo del prof. Veronese dato dalle ipotesi I-VIII), noi possiamo subito persuaderci che in questo campo tale operazione è possibile. Da queste osservazioni, e da altre facili a farsi, risulta che *il campo di numeri del sig. Hilbert è compreso nel campo di numeri del prof. Veronese* (1).

La circostanza poi che il campo di Hilbert e quello di Veronese costituiscono ambedue un corpo rispetto alle operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione ed in essi è possibile anche la quinta $\sqrt{1+\omega^2}$ (2), ci permette di affermare pel campo del prof. Veronese ogni risultato ottenuto dal prof. Hilbert pel suo campo a mezzo di questa sola caratteristica di esso. Ora siccome Hilbert, nel suo citato lavoro, dimostra, a mezzo del fatto accennato, che il suo campo di numeri serve alla costruzione di un sistema geometrico nel quale sono verificati tutti i suoi postulati ad eccezione di quello di Archimede (da non confondersi secondo Veronese con quello della continuità) potremo affermare che il *sistema geometrico di Hilbert è compreso in quello di Veronese* (3).

(1) Le espressioni frazionarie di Hilbert che non si possono ottenere colle sole ipotesi I-VII di Veronese si ottengono appunto mediante due classi contigue (ip. VIII).

(2) Si può verificare la possibilità dell'operazione $\sqrt{1+\omega^2}$ nel campo del prof. Veronese, costruendo due classi contigue che definiscono per ciò un elemento corrispondente al numero $\sqrt{1+\omega^2}$.

(3) Vi è solo questa differenza che il prof. Veronese nel suo sistema geometrico non archimedeo ammette la forma sferica Riemanniana ed allora ci dimostra, come fece il prof. Levi-Civita, che in ogni campo infinitesimo rispetto all'unità Riemanniana vale l'ipotesi Euclidea, mentre Hilbert ammette la forma Euclidea. Ma tale forma per ciò che si è detto può essere assunta anche coi numeri di Veronese.