ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIX.

1902

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1902

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia sino al 19 ottobre 1902.

Matematica. — *Determinazione delle superficie algebriche, su cui esistono più di due fasci di curve algebriche unisecantisi.* Nota di UGO AMALDI, presentata dal Corrispondente GUIDO CASTELNUOVO.

Su di una superficie algebrica si dice, notoriamente, *fascio* un sistema di curve, tale che per un punto generico della superficie passi *una* curva del sistema. In questa breve Nota io mi propongo di risolvere il seguente problema, di cui debbo l'idea al ch. sig. prof. Enriques: *Determinare tutte le superficie algebriche, su cui esistono più di due fasci di curve algebriche unisecantisi*, cioè tali che la curva generica di uno qualsiasi fra codesti fasci intersechi in *un* punto la curva generica di ogni altro fra essi.

Sia una superficie algebrica, su cui esistano (almeno) tre fasci (C_1), (C_2), (C_3) di curve algebriche unisecantisi. Cominciamo col ripetere qui una considerazione, che il sig. Enriques ha applicato nel risolvere « *Una questione sulla linearità dei sistemi di curve appartenenti ad una superficie algebrica* » [1].

Considerata una curva generica c_1 del fascio (C_1), si associ ad essa un'altra qualsiasi curva c_1' del medesimo fascio: per un punto A arbitrario

[1] Rend. della R. Acc. dei Lincei, ser. 5ª, vol. II, 1893.

di c_1 passa *una* curva del fascio (C_2), la quale interseca la c'_1 in un punto; e per questo passa *una* curva del fascio (C_3), la quale interseca la c_1 in un punto A'. Se sulla c_1 facciamo corrispondere al punto A il punto A', otteniamo, al variare di A, una corrispondenza fra i punti di c_1, la quale è algebrica e biunivoca, cioè birazionale. Se allora, tenuta fissa la c_1, facciamo variare nel fascio (C_1) la curva c'_1, concludiamo che la curva c_1 ammette su sè stessa una semplice infinità continua di trasformazioni birazionali; onde, per un notissimo teorema dello Schwarz (1), risulta che la c_1 è una curva di genere *zero* o di genere *uno*.

Poichè il medesimo ragionamento si può applicare anche alle curve generiche dei fasci (C_2) e (C_3) abbiamo intanto che *i tre fasci* (C_1), (C_2), (C_3) *sono costituiti ciascuno da curve razionali o ellittiche.*

Ma, facendo corrispondere su due curve qualsiansi di diverso fascio i punti di intersezione con una medesima curva variabile nel fascio rimanente, troviamo che due curve quali si vogliano, appartenenti a due fasci diversi, sono fra loro in corrispondenza birazionale, onde si conclude che *le curve dei tre fasci sono tutte insieme o razionali o ellittiche.*

Il primo caso si può senz'altro considerare come esaurito, come quello che, per un classico teorema del Nöther (2) conduce alle superficie razionali, sulle quali esistono infinite reti omaloidiche di curve. Si può notare che sopra una superficie razionale tre fasci quali si vogliano di curve unisecantisi appartengono a *due* reti omaloidiche, come nel piano rappresentativo tre fasci di rette appartengono alla rete delle rette e a quella delle coniche pei tre vertici di essi.

Passiamo ad esaminare il caso di una superficie algebrica S, su cui esistano (almeno) tre fasci (C_1), (C_2), (C_3) di curve ellittiche unisecantisi. Fissate due curve c_1, c_2 appartenenti a due fasci diversi, p. es. a (C_1), (C_2), ogni punto P della superficie S determina in (C_1), (C_2) due curve passanti per esso e intersecanti l'una la c_2, l'altra la c_1 in *un* punto: cioè ad ogni punto P di S corrisponde *una* coppia di punti appartenenti l'uno a c_1, l'altro a c_2. Reciprocamente, è del pari manifesto che ad ogni coppia di punti siffatti corrisponde *un* punto della superficie S, cioè la intersezione della curva di (C_2) passante per il punto scelto su c_1 e della curva di (C_1) passante per il punto scelto su c_2.

Di qui risulta che per avere una rappresentazione parametrica della superficie S basterà rappresentare le due curve c_1, c_2. Ma codeste due curve sono ellittiche entrambi, e fra loro in corrispondenza birazionale: onde si potranno rappresentare sopra due cubiche piane γ e γ' identiche, la cui rap-

(1) Crelle, Bd. LXXXVII.

(2) Mathematische Annalen, Bd. 3.

presentazione parametrica, per mezzo della p del Weierstrass, sarà

$$x = p(u)\,, \quad y = p'(u)$$

e

$$z = p(v)\,, \quad t = p'(v)\,.$$

La superficie S sarà allora trasformabile birazionalmente nella superficie S', che, in uno spazio a quattro dimensioni di coordinate cartesiane x, y, z, t, è data dalle equazioni

$$x = p(u)\,, \quad y = p'(u)\,, \quad z = p(v)\,, \quad t = p'(v)\,,$$

ove si facciano variare i punti complessi u, v, l'uno indipendentemente dall'altro, nel parallelogramma dei periodi $2\omega, 2\omega'$ della p considerata.

Su codesta superficie S' ai due fasci (C_1), (C_2) di S corrispondono i due fasci di curve unisecantisi $u = \text{cost}$ e $v = \text{cost}$. Per determinare gli altri fasci di curve unisecanti le $u = \text{cost}$ e le $v = \text{cost}$, notiamo, come già si è fatto più sopra, che ogni fascio siffatto stabilisce una corrispondenza birazionale tra una qualsiasi curva $u = \text{cost}$, e una qualsiasi $v = \text{cost}$, e dà luogo quindi ancora ad una trasformazione birazionale della cubica γ in sè stessa. Ma è noto che, se il modulo $\frac{\omega}{\omega'}$ della cubica γ è generale, codesta curva ammette in sè stessa due schiere di trasformazioni birazionali, dipendenti ciascuna da una costante arbitraria, le quali, ove v designi il parametro del punto trasformato, sono rappresentate da (1)

$$v = u + \text{cost}\,, \quad v = -u + \text{cost}\,. \tag{1}$$

Ora è manifesto che codeste due equazioni, lineari in u e v, rappresentano su S' due fasci di curve unisecanti sia fra loro, come rispetto alle $u = \text{cost}$, $v = \text{cost}$.

Perchè la cubica γ ammetta in sè stessa altre trasformazioni birazionali oltre le (1), è necessario e sufficiente che il suo modulo $\frac{\omega}{\omega'}$ abbia un valore singolare, cioè precisamente sia uguale o all'unità immaginaria o ad una radice cubica primitiva dell'unità.

Se il modulo è uguale a $\pm i$, cioè se la funzione ellittica p è *armonica* (o *lesmiscatica*), la γ ammette in sè stessa, oltre le due schiere di trasformazioni (1), le altre due

$$v = \pm\, iu + \text{cost}\,;$$

(1) Cfr. p. es. Appell-Goursat, *Théorie des fonctions algébriques*, pag. 474.

ed è ancora manifesto che queste due equazioni rappresentano, in tal caso, su S' un quinto e un sesto fascio di curve unisecanti fra loro e rispetto a ciascuno dei fasci

$$(2) \qquad u = \text{cost}, \quad v = \text{cost}, \quad v = \pm u + \text{cost}.$$

Se infine, indicando con ε una radice cubica primitiva della unità, il modulo della cubica γ è uguale ad ε (o ad ε^2), cioè se la funzione ellittica p è *equianarmonica*, la γ ammette in sè stessa oltre le (1) altre quattro schiere continue di trasformazioni birazionali

$$(3) \qquad v = \pm \varepsilon u + \text{cost}, \quad v = \pm \varepsilon^2 u + \text{cost}.$$

Riferendoci alla superficie S', abbiamo che in tal caso esistono su di essa oltre i fasci (2) altri quattro fasci di curve, unisecantisi fra loro e rispetto ai (2), i quali sono rappresentati dalle (3).

Concludendo, *una superficie algebrica, su cui esistano più di due fasci di curve algebriche unisecantisi, o contiene infiniti fasci siffatti* (costituiti da curve razionali) *ed è razionale, oppure si può trasformare birazionalmente in una superficie dello spazio a quattro dimensioni, rappresentabile mediante la* p *del Weierstrass sotto la forma*

$$x = p(u), \quad y = p'(u), \quad z = p(v), \quad t = p'(v).$$

In quest'ultimo caso, se la p *è a modulo generale, la superficie contiene quattro fasci di curve ellittiche unisecantisi*

$$(2) \qquad u = \text{cost}, \quad v = \text{cost}, \quad v = \pm u + \text{cost}.$$

Se invece la p *è a moltiplicazione complessa, secondochè essa è armonica o equianarmonica, la superficie contiene sei od otto fasci di curve ellittiche unisecantisi. Nel primo caso codesti fasci sono rappresentati dalle* (2) *e dalle*

$$v = \pm iu + \text{cost};$$

nel secondo caso sono rappresentati dalle (2) *e dalle*

$$v = \pm \varepsilon u + \text{cost}, \quad v = \pm \varepsilon^2 u + \text{cost},$$

dove ε *designi una radice cubica primitiva dell'unità.*