ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIX.

1902

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1902

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 16 novembre 1902.

P. VILLARI, Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle relazioni algebriche fra le funzioni ϑ di una variabile e sul teorema di addizione.* Nota del Corrispondente ALFREDO CAPELLI.

La formola fondamentale di Jacobi [1] sulla somma di due prodotti di quattro funzioni ϑ dà origine, come è ben noto, a molte altre formole analoghe che si deducono da essa sia coll'accrescere gli argomenti delle ϑ di mezze unità o di semi-moduli, sia col combinare fra loro linearmente le formole così ottenute. La presente Nota contiene qualche studio da me fatto sul modo possibilmente più semplice di ottenere tutte queste varie formole ed ha per suo primo risultato di condurre a tre tipi generali dai quali si possono poi dedurre tutte le formole in questione con semplici particolarizzazioni delle caratteristiche. Anzichè trattenermi sulle altre cose che ancora dovrei aggiungere a complemento di questo risultato, ho però preferito limitarmi per ora alle poche formole ottenute per dedurre da esse la formola generale per l'addizione delle funzioni ϑ di una variabile. E ciò ho fatto tanto più volentieri, perchè la via da me seguita è tale da rendere la formola generale indipendente dalla natura delle caratteristiche che, nella mia trattazione, possono essere numeri reali o complessi quali si vogliano; e anche perchè ho ragione di ritenere che la formola stessa sia poco conosciuta,

(1) Ges. Werke, I, pag. 506. Cfr. anche Kronecker, *Ueber die Zeit und Art der Entstehung der Jacobischen Thetaformel* (Journal für Math. CVIII, 1891).

benchè essa non sia certamente nuova, almeno per il caso delle caratteristiche intere. Dalle indagini fatte in proposito mi è infatti risultato che questa formola non differisce sostanzialmente da quella già data dallo Smith, sempre nel presupposto non necessario delle caratteristiche intere, in una Memoria ormai antica (1) nella quale lo stesso Autore fa anche menzione, in nota, di alcune formole analoghe già date precedentemente dal Betti (2) e dall' Hermite (3).

I.

1. Dalla formola

$$\vartheta_{\gamma g}(u) \equiv \vartheta_{\gamma g}(u\,,\omega) = e^{\pi i g \gamma} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\pi i \omega \left(n+\frac{\gamma}{2}\right)^2 + 2\pi i \left(n+\frac{\gamma}{2}\right)\left(u+\frac{g}{2}\right)} \tag{1}$$

che definisce, nel modo più generale, la funzione ϑ di argomento u e modulo ω, con caratteristiche reali o complesse quali si vogliano g e γ, si deduce facilmente, qualunque siano i numeri reali o complessi h e k:

$$\vartheta_{\gamma g}\left(u + \frac{h}{2} + \frac{k}{2}\,\omega\right) = e^{-\pi i \left(\frac{k^2\omega}{4} + ku + \frac{3}{2}kg + \frac{3}{2}kh + h\gamma\right)}\, \vartheta_{\gamma+k, g+h}(u)\,. \tag{2}$$

2. Se ora nella formola fondamentale di Jacobi:

$$\begin{aligned} &\vartheta_{00}(z_1)\,\vartheta_{00}(z_2)\,\vartheta_{00}(z_3)\,\vartheta_{00}(z_4) + \vartheta_{10}(z_1)\,\vartheta_{10}(z_2)\,\vartheta_{10}(z_3)\,\vartheta_{10}(z_4) = \\ &= \vartheta_{00}(z'_1)\,\vartheta_{00}(z'_2)\,\vartheta_{00}(z'_3)\,\vartheta_{00}(z'_4) + \vartheta_{10}(z'_1)\,\vartheta_{10}(z'_2)\,\vartheta_{10}(z'_3)\,\vartheta_{10}(z'_4) \end{aligned} \tag{3}$$

in cui le $z_1\,, z_2\,, z_3\,, z_4$ sono affatto arbitrarie e

$$\left\{\begin{aligned} z'_1 &= \frac{1}{2}(z_1 + z_2 + z_3 + z_4) \\ z'_2 &= \frac{1}{2}(z_1 + z_2 - z_3 - z_4) \\ z'_3 &= \frac{1}{2}(z_1 - z_2 + z_3 - z_4) \\ z'_4 &= \frac{1}{2}(z_1 - z_2 - z_3 + z_4) \end{aligned}\right. \tag{a}$$

(1) *On a Formula for the Multiplication of four Theta Fonctions* (Proc. London, M. S. I, Maggio 1866).

(2) *La teorica delle funzioni ellittiche e sue applicazioni* (Annali di Mat. di Tortolini, III, pag. 26, 1860).

(3) *Sur quelques formules relatives à la transformation des fonctions elliptiques* (Giornale di Liouville, 2a serie, III, pag. 27, 1858).

si diano alle z_ρ (per $\varrho=1,2,3,4$) rispettivamente gl' incrementi $\frac{1}{2}g_\rho\omega+\frac{1}{2}\gamma_\rho\omega$, cosicchè le z'_ρ riceveranno rispettivamente gl' incrementi $\frac{1}{2}g'_\rho+\frac{1}{2}\gamma'_\rho\,\omega$, essendo le g' legate alle g, dalle stesse relazioni (a) che legano le z' alle z, cioè:

$$(a)'\begin{cases} g'_1=\frac{1}{2}(g_1+g_2+g_3+g_4)\\ g'_2=\frac{1}{2}(g_1+g_2-g_3-g_4)\\ g'_3=\frac{1}{2}(g_1-g_2+g_3-g_4)\\ g'_4=\frac{1}{2}(g_1-g_2-g_3+g_4)\end{cases}\qquad (a)''\begin{cases} \gamma'_1=\frac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4)\\ \gamma'_2=\frac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2-\gamma_3-\gamma_4)\\ \gamma'_3=\frac{1}{2}(\gamma_1-\gamma_2+\gamma_3-\gamma_4)\\ \gamma'_4=\frac{1}{2}(\gamma_1-\gamma_2-\gamma_3+\gamma_4)\end{cases}$$

essa ci dà:

$$(4)\qquad \prod_{\rho=1}^{\rho=4}\vartheta_{00}\left(z_\rho+\frac{1}{2}g_\rho+\frac{1}{2}\gamma_\rho\,\omega\right)+\prod_{\rho=1}^{\rho=4}\vartheta_{10}\left(z_\rho+\frac{1}{2}g_\rho+\frac{1}{2}\gamma_\rho\,\omega\right)=$$
$$=\prod_{\rho=1}^{\rho=4}\vartheta_{00}\left(z'_\rho+\frac{1}{2}g'_\rho+\frac{1}{2}\gamma'_\rho\,\omega\right)+\prod_{\rho=1}^{\rho=4}\vartheta_{10}\left(z'_\rho+\frac{1}{2}g'_\rho+\frac{1}{2}\gamma'_\rho\,\omega\right).$$

Dalla (2) si ha intanto:

$$\vartheta_{00}\left(z_\rho+\frac{1}{2}g_\rho+\frac{1}{2}\gamma_\rho\,\omega\right)=e^{-\pi i\left(\frac{1}{4}\gamma_\rho^2\omega+\gamma_\rho z_\rho+\frac{3}{2}g_\rho\gamma_\rho\right)}\cdot\vartheta_{\gamma_\rho g_\rho}(z_\rho)$$
$$\vartheta_{10}\left(z_\rho+\frac{1}{2}g_\rho+\frac{1}{2}\gamma_\rho\,\omega\right)=e^{-\pi i\left\{\frac{1}{4}\gamma_\rho^2\,\omega+\gamma_\rho z_\rho+\frac{3}{2}g_\rho\gamma_\rho+g_\rho\right\}}$$

e similmente per la $\vartheta_{00}\left(z'_\rho+\frac{1}{2}g'_\rho+\frac{1}{2}\gamma'_\rho\,\omega\right)$ e $\vartheta_{10}\left(z'_\rho+\frac{1}{2}g'_\rho+\frac{1}{2}\gamma'_\rho\right)$; cosicchè la (4) si può scrivere:

$$e^{-\pi i\left(\frac{\omega}{4}\sum\limits_{\rho=1}^{\rho=4}\gamma_\rho^2+\sum\limits_{\rho=1}^{\rho=4}\gamma_\rho z_\rho+\frac{3}{2}\sum\limits_{\rho=1}^{\rho=4}g_\rho\gamma_\rho\right)}\cdot\left\{\prod_{\rho=1}^{\rho=4}\vartheta_{\gamma_\rho g_\rho}(z_\rho)+e^{-\pi i\sum\limits_{\rho=1}^{\rho=4}g_\rho}\prod_{\rho=1}^{\rho=4}\vartheta_{\gamma_\rho+1,g_\rho}(z_\rho)\right\}=$$
$$=e^{-\pi i\left(\frac{\omega}{4}\sum\limits_{\rho=1}^{\rho=4}\gamma'^2_\rho+\sum\limits_{\rho=1}^{\rho=4}\gamma'_\rho z'_\rho+\frac{3}{2}\sum\limits_{\rho=1}^{\rho=4}g'_\rho\gamma'_\rho\right)}\cdot\left\{\prod_{\rho=1}^{\rho=4}\vartheta_{\gamma'_\rho g'_\rho}(z'_\rho)+e^{-\pi i\sum\limits_{\rho=1}^{\rho=4}g'_\rho}\prod_{\rho=1}^{\rho=4}\vartheta_{\gamma'_\rho+1,g'_\rho}(z'_\rho)\right\}.$$

Ma, in virtù delle sostituzioni ortogonali (a), $(a)'$, $(a)''$, si ha:

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=4}\gamma_\rho^2=\sum_{\rho=1}^{\rho=4}\gamma'^2_\rho,\ \sum_{\rho=1}^{\rho=4}\gamma_\rho z_\rho=\sum_{\rho=1}^{\rho=4}\gamma'_\rho z'_\rho,\ \sum_{\rho=1}^{\rho=4}g_\rho\gamma_\rho=\sum_{\rho=1}^{\rho=4}g'_\rho\gamma'_\rho.$$

Quindi resta semplicemente la formola:

$$(5) \qquad \prod_{\rho=1}^{\rho=4} \vartheta_{\gamma_\rho g_\rho}(z_\rho) + e^{-\pi i \sum_{\rho=1}^{\rho=4} g_\rho} \prod_{\rho=1}^{\rho=4} \vartheta_{\gamma_\rho+1, g_\rho}(z_\rho) =$$

$$= \prod_{\rho=1}^{\rho=4} \vartheta_{\gamma'_\rho g'_\rho}(z'_\rho) + e^{-\pi i \sum_{\rho=1}^{\rho=4} g'_\rho} \prod_{\rho=1}^{\rho=4} \vartheta_{\gamma'_\rho+1, g'_\rho}(z'_\rho)$$

che si può considerare come una prima generalizzazione della formola fondamentale di Jacobi. Vi sono però, come ora vedremo, altre formole di tipo analogo a questo che pur non sono contenute nella (5).

II.

1. Se poniamo per brevità:

$$\vartheta_{\gamma_1 g_1}(z_1)\, \vartheta_{\gamma_2 g_2}(z_2)\, \vartheta_{\gamma_3 g_3}(z_3)\, \vartheta_{\gamma_4 g_4}(z_4) = [\gamma_1, g_1 ; \gamma_2, g_2 ; \gamma_3, g_3 ; \gamma_4, g_4] = [\gamma, g]$$

$$\vartheta_{\gamma'_1 g'_1}(z'_1)\, \vartheta_{\gamma'_2 g'_2}(z'_2)\, \vartheta_{\gamma'_3 g'_3}(z'_3)\, \vartheta_{\gamma'_4 g'_4}(z'_4) = [\gamma'_1, g'_1 ; \gamma'_2, g'_2 ; \gamma'_3, g'_3 ; \gamma'_4\, g'_4] = [\gamma', g']',$$

la formola (5) testè ottenuta si può compendiare così:

$$(\mathrm{I}) \qquad [\gamma, g] + e^{-\pi i \Sigma g}[\gamma + 1, g] = [\gamma', g']' + e^{-\pi i \Sigma g'}[\gamma' + 1, g']' .$$

Se in questa formola si dà a g_1 l'incremento di 2 e conseguentemente a ciascuna delle g'_1, g'_2, g'_3, g'_4 l'incremento di 1, e si tengono presenti le formole

$$\vartheta_{\gamma+2,g}(u) = e^{2\pi i g}\, \vartheta_{\gamma,g}(u), \quad \vartheta_{\gamma-2,g}(u) = e^{-2\pi i g}\, \vartheta_{\gamma g}(u)$$

$$\vartheta_{\gamma,g+2}(u) = e^{3\pi i \gamma}\, \vartheta_{\gamma,g}(u), \quad \vartheta_{\gamma,g-2}(u) = e^{-3\pi i \gamma}\, \vartheta_{\gamma g}(u),$$

se ne deduce:

$$(\mathrm{I})' \qquad e^{3\pi i \gamma_1}[\gamma, g] + e^{3\pi i(\gamma_1+1)}\, e^{-\pi i \Sigma g}[\gamma + 1, g] =$$

$$= [\gamma', g' + 1]' + e^{-\pi i \Sigma g'}[\gamma' + 1, g' + 1]' .$$

Dalla (I)' segue ora scambiando, come è lecito (poichè le formole (a) seguitano a sussistere anche se si scambiano le z colle z') le γ, g, z rispettivamente colle γ', g', z':

$$(\mathrm{I})'' \qquad [\gamma, g + 1] + e^{-\pi i \Sigma g}[\gamma + 1, g + 1] =$$

$$= e^{3\pi i \gamma'_1}[\gamma', g'] + e^{3\pi i(\gamma'_1+1)}\, e^{-\pi i \Sigma g'}[\gamma' + 1, g']$$

e, finalmente, operando su questa formola come si è operato sulla (I) per ottenere la (I)':

$$(\mathrm{I})''' \qquad e^{3\pi i\gamma_1}[\gamma, g+1]+e^{3\pi i(\gamma_1+1)}\,e^{-\pi i\Sigma g}[\gamma+1, g+1]=$$
$$=e^{3\pi i\gamma'_1}[\gamma', g'+1]+e^{3\pi i(\gamma'_1+1)}\,e^{-\pi i\Sigma g'}[\gamma'+1, g'+1].$$

Dalle quattro formole (I), (I)', (I)'', (I)''' che scriveremo così:

$$[\gamma, g]+e^{-\pi i\Sigma g}[\gamma+1, g]=[\gamma', g']'+e^{-\pi i\Sigma g'}[\gamma'+1, g']'$$

$$[\gamma, g]-e^{-\pi i\Sigma g}[\gamma+1, g]=e^{-3\pi i\gamma_1}[\gamma', g'+1]+$$
$$+e^{-3\pi i\gamma_1}\,e^{-\pi i\Sigma g'}[\gamma'+1, g'+1]'$$

$$e^{-3\pi i\gamma'_1}[\gamma, g+1]+e^{-3\pi i\gamma'_1}\,e^{-\pi i\Sigma g}[\gamma+1, g+1]=[\gamma', g']-e^{-\pi i\Sigma g'_1}[\gamma'+1, g']'$$

$$e^{-3\pi i\gamma'_1}[\gamma, g+1]-e^{-3\pi i\gamma'_1}\,e^{-\pi i\Sigma g}[\gamma+1, g+1]=$$
$$=e^{-3\pi i\gamma_1}[\gamma', g'+1]'-e^{-3\pi i\gamma_1}\,e^{-\pi i\Sigma g'}[\gamma'+1, g'+1]'$$

segue, sommando membro a membro, la formola:

$$[\gamma, g]+e^{-3\pi i\gamma'_1}[\gamma, g+1]=[\gamma', g']'+e^{-3\pi i\gamma_1}[\gamma', g'+1]'$$

che si può anche scrivere, in virtù delle $(a)''$:

$$(\mathrm{II}) \qquad [\gamma, g]+e^{-\frac{3}{2}\pi i\Sigma\gamma}[\gamma, g+1]=[\gamma', g']'+e^{-\frac{3}{2}\pi i\Sigma\gamma'}[\gamma', g'+1]'.$$

Se poi le stesse quattro formole si sommano ancora membro a membro dopo avere moltiplicato l'ultima per -1, si ottiene:

$$[\gamma, g]+e^{-\pi i(3\gamma'_1+\Sigma g)}[\gamma+1, g+1]=[\gamma', g']'+e^{-\pi i(3\gamma_1+\Sigma g')}[\gamma'+1, g'+1]'$$

o anche, che è la stessa cosa:

$$(\mathrm{III}) \qquad [\gamma, g]+e^{-\pi i(\Sigma g+\frac{3}{2}\Sigma\gamma)}[\gamma+1, g+1]=$$
$$=[\gamma', g']'+e^{-\pi i(\Sigma g'+\frac{3}{2}\Sigma\gamma')}[\gamma'+1, g'+1]'.$$

2. Osserviamo finalmente che dalle stesse quattro formole si hanno oltre alla formola già trovata (I)' che scriveremo come segue:

$$(\mathrm{I})' \; [\gamma, g]-e^{-\pi i\Sigma g}[\gamma+1, g]=e^{-\frac{3}{2}\pi i\Sigma\gamma'}\left\{[\gamma', g'+1]'+e^{-\pi i\Sigma g'}[\gamma'+1, g'+1]'\right\}$$

mediante analoghe combinazioni lineari, anche le formole:

$$\text{(II)}' \qquad [\gamma, g] - e^{-\frac{3}{2}\pi i \Sigma\gamma}[\gamma, g+1] =$$
$$= e^{-\pi i \Sigma g'}\left\{[\gamma'+1, g']' + e^{-\frac{3}{2}\pi i \Sigma\gamma'}[\gamma'+1, g'+1]'\right\}$$

$$\text{(III)}' \qquad [\gamma, g] - e^{-\pi i (\Sigma g + \frac{3}{2}\Sigma\gamma)}[\gamma+1, g+1] =$$
$$= e^{-\frac{3}{2}\pi i \Sigma\gamma'}[\gamma', g'+1] + e^{-\pi i \Sigma g'}[\gamma'+1, g'] .$$

Si osservi però che, come la (I)$'$ non differiva sostanzialmente dalla (I) da cui si deduceva dando alla g_1 l'incremento di 2, così la (II)$'$ non differisce sostanzialmente dalla (II) da cui si ricava dando l'incremento di 2 a γ_1; e precisamente in questo stesso modo si deduce dalla (III) la (III)$'$.

3. Nelle formole (I), (II), (III) le caratteristiche γ, g, γ', g' possono essere dei numeri reali o complessi assoggettati alla sola restrizione di rendere soddisfatte le relazioni $(a)'$ ed $(a)''$. Se però si scelgano per le $g_1, g_2, g_3, g_4, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ dei numeri razionali interi, e si voglia che riescano intere anche le caratteristiche $g'_1, g'_2, g'_3, g'_4, \gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3, \gamma'_4$, è necessario e sufficiente, come appare dalle $(a)'$ ed $(a)''$, che sia:

$$g_1 + g_2 + g_3 + g_4 \equiv 0 , \quad \gamma_1 + \gamma_2 , \gamma_3 , \gamma_4 \equiv 0 \quad (\text{mod. } 2),$$

e sarà poi di conseguenza $\Sigma g' \equiv 0$, $\Sigma\gamma' \equiv 0$ (mod. 2).

Nel caso di caratteristiche *intere* le formole (I), (II), (III) assumono dunque la forma più semplice:

$$\text{(A)} \qquad [\gamma, g] + [\gamma+1, g] = [\gamma', g']' + [\gamma'+1, g']'$$

$$\text{(B)} \quad [\gamma, g] + (-1)^{\frac{1}{2}\Sigma\gamma}[\gamma, g+1] = [\gamma', g']' + (-1)^{\frac{1}{2}\Sigma\gamma}[\gamma', g'+1]'$$

$$\text{(C)} \quad [\gamma, g] + (-1)^{\frac{1}{2}\Sigma\gamma}[\gamma+1, g+1] = [\gamma', g']' + (-1)^{\frac{1}{2}\Sigma\gamma'}[\gamma'+1, g'+1]'.$$

Si potrebbe dimostrare, su di che non ci indugieremo qui, non essendo ciò necessario allo scopo che per ora ci siamo prefisso, che le formole (A), (B), (C) rappresentano, nel loro insieme, la generalizzazione completa della formola fondamentale di Jacobi, nel senso che: *tutte le formole analoghe alla formola fondamentale di Jacobi che si possono da essa dedurre dando alle z incrementi di mezze unità o di semimoduli e combinando poi linearmente in un modo qualunque le formole così ottenute, sono necessariamente contenute, come caso particolare, nell'una o nell'altra delle tre formole* (A), (B), (C).

4. Dalla formola generale (I) e dalla (I)$'$ dell' art. 2 segue sommando o sottraendo membro a membro:

$$\text{(IV)}\qquad 2[\gamma\,,g]=[\gamma'\,,g']'+e^{-\pi i(3\gamma_1+2g_1)}[\gamma'+1\,,g'+1]'+ \\ +e^{-2\pi i g_1}[\gamma'+1\,,g']'+e^{-3\pi i\gamma_1}[\gamma'\,,g'+1]'$$

e

$$2e^{-\pi i\Sigma g}[\gamma+1\,,g]=[\gamma'\,,g']'-e^{-\pi i(3\gamma_1+2g_1)}[\gamma'+1\,,g'+1]'+ \\ +e^{-2\pi i g_1}[\gamma'+1\,,g']'-e^{-3\pi i\gamma_1}[\gamma'\,,g'+1]'.$$

Di queste due formole però la seconda non differisce sostanzialmente dalla prima da cui si deduce immediatamente accrescendo le γ di un'unità.

Se poi sottoponiamo le g e γ alla condizione di essere razionali intere e soddisfare alle congruenze:

$$\Sigma g\equiv 0\ ,\ \Sigma\gamma\equiv 0\quad(\text{mod. }2)\,,$$

la (IV) prende la forma più semplice

$$\text{(D)}\qquad 2[\gamma\,,g]=[\gamma'\,,g']'+(-1)^{\gamma_1}[\gamma'+1\,,g'+1]'+ \\ +[\gamma'+1\,,g']'+(-1)^{\gamma_1}[\gamma'\,,g'+1]'$$

in cui anche le g' e γ' riusciranno numeri interi.

Sarebbe facile dedurre le formole (A), (B), (C) dall' unica formola (D). Quest' ultima è ad esse preferibile dal punto di vista della simmetria; e specialmente poi per il fatto che qui particolarmente c' interessa, che tutte le formole fondamentali per l' addizione delle funzioni ϑ si deducono da essa, come ora passiamo a vedere, con semplici particolarizzazioni delle caratteristiche g e γ e degli argomenti z, senza che sia poi anche necessario di combinare linearmente i risultati ottenuti come accade a chi voglia servirsi della formola fondamentale di Jacobi o delle sue generalizzazioni.

Del resto mi riservo di ritornare, quanto prima mi sarà possibile, sulla formola (D) per dimostrare in base ad un' accurata analisi della formola stessa, come ad essa si possa anche sostituire la formola più semplice:

$$2[\gamma\,,g]=[\gamma\,,g]'+(-1)^{g_1+\gamma_1+\frac{1}{2}\Sigma g}[\gamma+1\,,g+1]'+ \\ +(-1)^{g_1+\frac{1}{2}\Sigma g}[\gamma+1\,,g]'+(-1)^{\gamma_1}[\gamma\,,g+1]'\,.$$

III.

1. Se nella formola generale (IV) del paragrafo precedente prendiamo, essendo u e v affatto arbitrarie:

$$z_1=u+v\,,\quad z_2=u-v\,,\quad z_3=0\,,\quad z_4=0$$

onde, per le (a):

$$z'_1 = u\,, \quad z'_2 = u\,, \quad z'_3 = v\,, \quad z'_4 = v\,,$$

otteniamo:

$$2\vartheta_{\gamma_1 g_1}(u+v)\,.\,\vartheta_{\gamma_2 g_2}(u-v)\,.\,\vartheta_{\gamma_3 g_3}(o)\,.\,\vartheta_{\gamma_4 g_4}(o) =$$

$$= \vartheta_{\gamma'_1 g'_1}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma'_2 g'_2}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma'_3 g'_3}(v)\,.\,\vartheta_{\gamma'_4 g'_4}(v) +$$

$$+ e^{-2\pi i g_1}\,.\,\vartheta_{\gamma'_1+1,\,g'_1}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma'_2+1,\,g'_2}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma'_3+1,\,g'_3}(v)\,.\,\vartheta_{\gamma'_4+1,\,g'_4}(v) +$$

$$+ e^{-3\pi i \gamma_1}\,.\,\vartheta_{\gamma'_1,\,g'_1+1}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma'_2,\,g'_2+1}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma'_3,\,g'_3+1}(v)\,.\,\vartheta_{\gamma'_4,\,g'_4+1}(v) +$$

$$+ e^{-\pi i(2g_1+3\gamma_1)}\,.\,\vartheta_{\gamma'_1+1,\,g'_1+1}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma'_2+1,\,g'_2+1}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma'_3+1,\,g'_3+1}(v)\,.\,\vartheta_{\gamma'_4+1,\,g'_4+1}(v).$$

Questo risultato, nel mentre che ci permette di abbracciare in un'unica formola le ordinarie 10 formole fondamentali per l'addizione delle funzioni ϑ, ci presenta il teorema di addizione sotto una forma assai più generale del consueto; giacchè le caratteristiche $g_1, g_2, g_3, g_4, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ sono quì dei numeri affatto arbitrarî, reali od immaginarî.

Così, per esempio, se prendiamo:

$$\gamma_1 = i\,, \; \gamma_2 = i\,, \; \gamma_3 = 0\,, \; \gamma_4 = 0\,, \quad g_1 = i\,, \; g_2 = i\,, \; g_3 = 0\,, \; g_4 = 0\,,$$

cosicchè:

$$\gamma'_1 = i\,, \; \gamma'_2 = i\,, \; \gamma'_3 = 0\,, \; \gamma'_4 = 0\,, \quad g'_1 = i\,, \; g'_2 = i\,, \; g'_3 = 0\,, \; g'_4 = 0\,,$$

troviamo subito:

$$2\,\vartheta^2_{00}(o)\,.\,\vartheta_{i,i}(u+v)\,.\,\vartheta_{i,i}(u-v) =$$

$$= \vartheta^2_{i,i}(u)\,\vartheta^2_{00}(v) + e^{2\pi}\,\vartheta^2_{i+1,i}(u)\,\vartheta^2_{10}(v) + e^{3\pi}\,\vartheta^2_{i,i+1}(u)\,\vartheta^2_{01}(v) + e^{5\pi}\,\vartheta^2_{i+1,i+1}(u)\,\vartheta^2_{11}(v).$$

2. Se per le g e γ si prendono dei numeri razionali interi soddisfacenti alle condizioni:

$$(\alpha) \qquad g_1 + g_2 + g_3 + g_4 \equiv 0\,, \quad \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 \equiv 0 \quad (\text{mod. } 2),$$

anche le g' e γ' riusciranno intere secondo le relazioni:

$$\begin{aligned}
g'_1 &= \tfrac{1}{2}(g_1 + g_2 + g_3 + g_4) & \gamma'_1 &= \tfrac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4)\\
g'_2 &= \tfrac{1}{2}(g_1 + g_2 - g_3 - g_4) & \gamma'_2 &= \tfrac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4)\\
g'_3 &= \tfrac{1}{2}(g_1 - g_2 + g_3 + g_4) & \gamma'_3 &= \tfrac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_4)\\
g'_4 &= \tfrac{1}{2}(g_1 - g_2 - g_3 + g_4) & \gamma'_4 &= \tfrac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_4)
\end{aligned}$$

cosicchè la formola generale di addizione delle funzioni ϑ *a caratteristiche razionali intere* prenderà la forma più semplice:

$$
\begin{aligned}
&2\vartheta_{\gamma_1 g_1}(u+v)\,.\,\vartheta_{\gamma_2 g_2}(u-v)\,.\,\vartheta_{\gamma_3 g_3}(o)\,\vartheta_{\gamma_4 g_4}(o)=\\
&=\vartheta_{\gamma'_1 g'_1}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma'_2 g'_2}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma'_3 g'_3}(v)\,.\,\vartheta_{\gamma'_4 g'_4}(v)+\\
&+\vartheta_{\gamma'_1+1,g'_1}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma'_2+1,g'_2}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma'_3+1,g'_3}(v)\,.\,\vartheta_{\gamma'_4+1,g'_4}(v)+\\
&+(-1)^{\gamma_1}\,\vartheta_{\gamma'_1,g'_1+1}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma'_2,g'_2+1}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma'_3,g'_3+1}(v)\,.\,\vartheta_{\gamma'_4+1,g'_4}(v)+\\
&+(-1)^{\gamma_1}\,\vartheta_{\gamma'_1+1,g'_1+1}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma'_2+1,g'_2+1}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma'_3+1,g'_3+1}(v)\,.\,\vartheta_{\gamma'_4+1,g'_4+1}(v)\,.
\end{aligned}
$$

Questa formola dà effettivamente l'espressione del prodotto

$$\vartheta_{\gamma_1 g_1}(u+v)\,\vartheta_{\gamma_2 g_2}(u-v)$$

in funzione di ϑ col solo argomento u o col solo argomento v, comunque si scelgano i quattro numeri interi $\gamma_1, g_1, \gamma_2, g_2$; poichè è poi sempre possibile (come subito si riconosce) di determinare gli altro quattro numeri interi $\gamma_3, g_3, \gamma_4, g_4$ in modo da rendere soddisfatte le congruenze (α) evitando sia la soluzione $\gamma_3 \equiv g_3 \equiv 1$ per la quale sarebbe $\vartheta_{\gamma_3 g_3}(o) = 0$, come la soluzione $\gamma_4 \equiv g_4 \equiv 1$ per la quale riuscirebbe nullo il coefficiente $\vartheta_{\gamma_4 g_4}(o)$.

Quanto a questa formola generale, mi riservo di ritornare sull'argomento prossimamente, potendo essa, come è naturale, ulteriormente semplificarsi quando si prenda come punto di partenza, in luogo della formola (D), l'altra formola da me già accennata in fine del precedente paragrafo.

Fisica. — *Intorno a due modi per determinare il raggio di curvatura della superficie dello spigolo nei coltelli delle bilancie e dei pendoli.* Nota di G. Guglielmo, presentata dal Socio Blaserna.

Le due faccie laterali del coltello di sospensione d'una bilancia o d'un pendolo, evidentemente non s'incontrano secondo una linea matematica ma sono raccordate da una superficie cilindrica, la cui sezione retta può considerarsi come approssimativamente circolare o ellittica ed il cui raggio di curvatura è bensì piccolissimo ma non è infinitesimo, e non è neppure tanto piccolo quanto sarebbe fisicamente possibile, perchè bisogna evitare che questa superficie sia troppo soggetta a rompersi o smussarsi, ciò che renderebbe il coltello pressochè inservibile.

La conoscenza di questo raggio di curvatura è utile nel caso delle bilancie, poichè essa da modo di osservare la relazione che passa fra esso raggio