ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIX.

1902

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1902

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 21 dicembre 1902.

P. Villari, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle proprietà aritmetiche delle funzioni analitiche.* Nota I di Onorato Niccoletti, presentata dal Socio Dini.

In una Memoria, collo stesso titolo di questa Nota, pubblicata nell'ultimo fascicolo degli Acta Mathematica [1], il sig. P. Stäckel con un metodo, di cui la prima idea va ricercata in una osservazione del Weierstrass [2], costruisce un esempio notevole di una funzione *analitica* e *trascendente* y di una variabile complessa x, tale che sia essa, sia la funzione inversa $x(y)$ in *tutto* il loro campo di esistenza (che può anche essere l'intero piano complesso dell'una o dell'altra variabile) assumono un valore algebrico per ogni valore algebrico di quella che si riguarda come la variabile indipendente.

Dall'esempio del sig. Stäckel risulta, come la proprietà precedente non sia caratteristica per le funzioni algebriche di una variabile complessa; ma se si osserva, insieme collo Stäckel, che per una funzione algebrica di una variabile complessa, sia la funzione inversa, sia qualsiasi loro derivata è ancora una funzione algebrica e quindi assume un valore algebrico per ogni valore algebrico di quella che si riguarda come la variabile indipendente, è da pensare se non sia questa piuttosto una proprietà caratteristica delle funzioni algebriche.

(1) Cf. Stäckel, *Aritmetische Eigenschaften analytischer Functionen* (Acta Mathematica, Tomo 25°, pag. 371-383).
(2) Idem (Math. Annalen, Bd. 46, S. 516).

Ora questo non è; è infatti possibile costruire una funzione *trascendente* di una variabile complessa che abbia la proprietà ora detta; più generalmente anzi: *è possibile costruire un'equazione trascendente* (*a coefficienti razionali*):

$$F(x_1 x_2 \dots x_n) = 0$$

in n *variabili complesse* $x_1 \dots x_n$, *tale che in un campo conveniente* (che può essere anche tutto l' S_n complesso $(x_1 \dots x_n)$) *definisca una qualunque,* x_i, *di esse variabili come funzione analitica e trascendente delle altre* $n-1$, *ed in guisa che, ove tra le* $x_1 \dots x_n$ *si ponga un qualunque sistema di relazioni algebriche,* (*a coefficienti razionali*), *e la* x_i *e le sue derivate di un ordine qualunque si riducano a funzioni algebriche di alcune tra le* $x_1 x_2 \dots x_{i-1}\ x_{i+1} \dots x_n$.

1. Sia per questo:

$$(1)\quad f(x_1 x_2 \dots x_n) = \Sigma A_{q_1 q_2 \dots q_n} x_1^{q_1} x_2^{q_2} \dots x_n^{q_n} \quad (q_1 + q_2 + \dots + q_n \leq m)$$

una funzione razionale intera di grado m, *a coefficienti razionali interi e privi di fattori comuni* (¹), delle n variabili $x_1 x_2 \dots x_n$, irriducibile in queste variabili nel campo assoluto di razionalità. Estendendo una definizione di Cantor (²), diremo *altezza* della funzione f, ed indicheremo col simbolo h_f il numero:

$$(2)\qquad h_f = (m-1) + \Sigma |A_{q_1 q_2 \dots q_n}|;$$

e diremo anche che h_f è l'altezza della equazione algebrica (³):

$$f(x_1 x_2 \dots x_n) = 0.$$

Quando la f abbia poi i coefficienti razionali, ma non intieri, diremo sua altezza l'altezza del prodotto kf, dove k è il minimo multiplo comune dei denominatori dei coefficienti della f.

Vi è un numero finito di funzioni f (⁴) *di* n *variabili* $x_1 x_2 \dots x_n$ *che hanno una determinata altezza* h: assegnato infatti h, si hanno dalla (2) un numero finito di valori possibili di m e delle $A_{q_1 q_2 \dots q_n}$ (⁵).

(¹) Considerazioni affatto analoghe valgono evidentemente, con lievi modificazioni, oltrechè nel campo assoluto di razionalità, anche nel campo $R(i)$ dei numeri *intieri* di Gauss e più generalmente in qualsiasi corpo algebrico assegnato.

(²) Cf. Cantor, *Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffs der reeller algebraischer Zahlen* (Crelle, Bd. 77, 1873, pag. 258).

(³) Ora e nel seguito, seguendo i concetti aritmetici di Kronecker, supponiamo sempre che le funzioni e le equazioni che consideriamo siano a coefficienti *razionali*.

(⁴) Quando non diciamo altro, intendiamo: *funzione razionale intiera irriducibile, a coefficienti razionali intieri e privi di fattori comuni.*

(⁵) Ne segue in particolare, per un noto teorema della teoria degli aggregati: *Le equazioni algebriche in* n *variabili* $x_1 x_2 \dots x_n$ *formano un insieme numerabile.*

Chiamiamo ora $\varphi_h(x_1 x_2 \dots x_n)$ il prodotto di tutte le funzioni f di altezza h; e poniamo:

$$(3) \qquad \psi_h(x_1 x_2 \dots x_n) = \prod_1^h{}_\nu \varphi_\nu(x_1 x_2 \dots x_n) \quad ; \quad \psi_0(x_1 x_2 \dots x_n) = 1 ;$$

sarà ψ_h un polinomio a coefficienti razionali intieri nelle $x_1 \dots x_n$, *il cui grado diciamo* λ_h.

2. Sia ora:

$$(4) \qquad \varrho_1, \varrho_2 \dots \varrho_r \dots\dots$$

una successione *divergente* di numeri intieri e positivi; sia:

$$(5) \qquad \theta_0(x_1 x_2 \dots x_n), \ \theta_1(x_1 \dots x_n); \ \dots \theta_r(x_1 \dots x_n) \dots\dots$$

una successione di polinomî a coefficienti razionali intieri (i cui gradi diciamo $\sigma_0, \sigma_1 \dots \sigma_r \dots\dots$) ai quali non imponiamo per ora alcuna condizione.

Definiamo ancora n successioni *divergenti* di numeri intieri e positivi $\mu_r^{(i)}$ $(i = 1, 2 \dots n;\ r = 1, 2 \dots\dots)$ dalle relazioni ricorrenti:

$$(6) \qquad \mu_{r+1}^{(i)} \geq \mu_r^{(i)} + \varrho_r \lambda_r + \sigma_r + 1 \qquad (\mu_0^{(i)} = 0);$$

e poniamo infine, per qualunque r:

$$(7) \quad \omega_r(x_1 x_2 \dots x_n) = x_1^{\mu_r^{(1)}} x_2^{\mu_r^{(2)}} \dots x_n^{\mu_r^{(n)}} \theta_r(x_1 x_2 \dots x_n) \{\psi_r(x_1 x_2 \dots x_n)\}^{\varrho_r} \ (r = 0, 1 \dots);$$

sarà ω_r un polinomio in $x_1 x_2 \dots x_n$ a coefficienti razionali intieri, di cui è opportuno notare alcune semplici proprietà.

a) Tranne al più per $r = 0$, si ha:

$$\omega_r(x_1 \dots x_{i-1}, 0, x_{i+1} \dots x_n) = 0 \quad ; \quad (i = 1, 2 \dots n).$$

b) Il grado di ω_r nella variabile x_i è maggiore od uguale a $\mu_r^{(i)}$, minore od uguale a $\mu_r^{(i)} + \lambda_r \varrho_r + \sigma_r = \mu_{r+1}^{(i)'} - 1$. Ne segue che: *due polinomî* ω_r, ω_s (per $r \neq s$) *non hanno termini simili.*

c) *Se tra le* $x_1 x_2 \dots x_n$ *si pone un' equazione algebrica* (*irriducibile*):

$$(8) \qquad g(x_1 x_2 \dots x_n) = 0,$$

tutte le ω_r *per cui è* $r \geq h_g$, *si annullano.* Per $r \geq h_g$, il polinomio $\psi_r(x_1 \dots x_n)$ e quindi anche ω_r ha infatti il fattore $g(x_1 \dots x_n)$.

d) Una derivata qualunque del polinomio ω_r, di ordine minore di ϱ_r, contiene ancora il fattore $\psi_r(x_1 \dots x_n)$: ne segue, poichè $\lim_{r=\infty} \varrho_r = +\infty$, che: *se le* $x_1 \dots x_n$ *sono legate dalla equazione algebrica* (8), *insieme colle* ω_r *si annullano tutte le loro derivate parziali di ordine* m, *per cui si ha insieme*: $r \geq h_g$; $\varrho_r > m$.

3. Consideriamo ora la serie:

$$\sum_{0}^{\infty}{}_h\, u_h\, \omega_h\,(x_1 \ldots x_n)\,, \tag{9}$$

in cui le u_h *sono numeri razionali, che ora designeremo in modo più preciso.* Se nella (9) eseguiamo tutte le moltiplicazioni indicate, per la proprietà *b*) dei polinomî ω_r, non vi saranno mai termini simili provenienti da termini diversi della serie stessa; ne risulta quindi una serie *npla* di potenze:

$$\Sigma a_{q_1 q_2 \ldots q_n}\, x_1^{q_1} x_2^{q_2} \ldots x_n^{q_n}\,, \tag{10}$$

in cui ogni coefficiente $a_{q_1 \ldots q_n}$ è il prodotto di un numero intero per *una sola* u_r; è inoltre evidente che una stessa u_r figura come fattore in un numero *finito* di coefficienti $a_{q_1 q_2 \ldots q_n}$.

Indichiamo ora con

$$\Sigma A_{q_1 q_2 \ldots q_n}\, x_1^{q_1} x_2^{q_2} \ldots x_n^{q_n} \tag{11}$$

una serie *npla* di potenze delle $x_1\, x_2 \ldots x_n$, la quale converga *assolutamente* ed *uniformemente* in un certo campo C ad n dimensioni (che può essere anche tutto l'S_n complesso $(x_1 \ldots x_n)$); sarà *sempre* possibile soddisfare *con valori razionali delle u* alle disuguaglianze:

$$|\, a_{q_1 q_2 \ldots q_n} | < |\, A_{q_1 q_2 \ldots q_n} |\,; \tag{12}$$

queste disuguaglianze si tradurranno infatti in altre sulle u_r della forma:

$$|u_r| < \varepsilon_r \qquad (r = 0\,, 1\,, 2 \ldots) \tag{13}$$

essendo ε_r un numero reale e positivo (e non sempre nullo), che per ogni singolo valore di r può ritenersi perfettamente determinato dalle disuguaglianze (12).

Supponiamo per semplicità che la (11) converga in tutto l'S_n complesso $(x_1\, x_2 \ldots x_n)$; allora, *se almeno da un certo valore di r in poi, le* (13) *sono soddisfatte,* posto:

$$\mathrm{F}\,(x_1\, x_2 \ldots x_n) = \sum_{0}^{\infty}{}_h\, u_h\, \omega_h\,(x_1\, x_2 \ldots x_n) = \Sigma a_{q_1 q_2 \ldots q^n}\, x_1^{q_1} x_2^{q_2} \ldots x_n{}^{q}{}_n\,, \tag{14}$$

sarà $\mathrm{F}(x_1\, x_2 \ldots x_n)$ una *trascendente intera* nelle n variabili complesse $x_1\, x_2 \ldots x_n$; e tali saranno anche tutte le sue derivate parziali di un ordine qualunque; queste inoltre si potranno calcolare derivando termine a termine, tante volte quante si vuole, la serie (9).

Non è inutile osservare che: *entro i limiti fissati dalle disuguaglianze* (13) *i numeri razionali* u_r $(r = 0\,, 1\,, 2 \ldots)$ *possono prendersi affatto arbitrariamente.*

4. Sia ora l' equazione:

$$F(x_1 x_2 \dots x_n) = 0\,; \tag{15}$$

sotto alcune condizioni iniziali, che possiamo sempre supporre verificate in un certo punto di S_n (ad es.: l' origine, il che, per la proprietà a) dei polinomî ω_r, porta delle condizioni relative al solo polinomio $\theta_0(x_1 \dots x_n)$) essa definisce in una certa regione di S_n una varietà analitica V ad n dimensioni. In questa regione noi svolgeremo le nostre considerazioni.

A) Qualsiasi varietà algebrica di S_n sega la varietà V in una varietà algebrica.

Diciamo *varietà algebrica* in S_n la totalità dei *punti* $(x_1 \dots x_n)$ che soddisfanno ad un sistema di equazioni algebriche (che definiscono la varietà):

$$g_\rho(x_1 x_2 \dots x_n) = 0 \qquad (\rho = 1, 2 \dots q)\,. \tag{16}$$

L' eventuale sezione della varietà definita dalle equazioni (16) colla nostra varietà V si ottiene infatti considerando simultaneamente le equazioni (15) e (16). Ma, indicando con $h+1$ la *massima* altezza di un fattore irriducibile di una g_ρ $(\rho = 1, 2 \dots q)$, nella $F(x_1 \dots x_n)$, per la proprietà c) dei polinomî ω_r, si annullano allora tutte le ω_r, per cui è $r > h$; ponendo adunque, per qualunque t:

$$F^{(t)}(x_1 \dots x_n) = \sum_0^t {}_h\, u_h\, \omega_h(x_1 \dots x_n)\,, \tag{17}$$

alle equazioni (15) *e* (16) *può sostituirsi il sistema di* $q+1$ *equazioni algebriche*:

$$F^{(h)}(x_1 x_2 \dots x_n) = 0\ ;\ \ g_\rho(x_1 x_2 \dots x_n) = 0 \quad (\rho = 1, 2 \dots q)\,, \tag{18}$$

il che dimostra la nostra asserzione.

Se $x_1 \dots x_n$ è un punto di V, diremo *elemento di ordine* s di V il sistema:

$$(x_1 x_2 \dots x_n\,;\ dx_1, dx_2 \dots dx_n\,; \dots ;\ d^s x_1, d^s x_2, \dots d^s x_n)$$

delle coordinate del punto e dei loro differenziali fino all' ordine s, *presi sulla varietà* V, in guisa cioè che la $F = 0$ e le equazioni che si hanno da essa, differenziandola fino all' ordine s, sian soddisfatte. Abbiamo allora:

B) Qualsiasi elemento di ordine finito della varietà V, relativo ad un punto della sezione di V con una varietà algebrica qualunque di S_n, è ancora algebrico.

Insieme colle equazioni (15) e (16) consideriamo infatti quelle che si hanno, differenziando la $F(x_1 \dots x_n)$ fino all' ordine s:

$$d^t F = 0 \qquad (t = 1, 2 \dots s)\,. \tag{19}$$

Il primo membro di ciascuna delle (19) è una funzione razionale intiera dei differenziali $d^\mu x_i$ $(i = 1, 2 \dots n$, $\mu = 1, 2 \dots s)$ i cui coefficienti sono derivate parziali della F di *ordine non superiore ad* s. Ove adunque si abbian le (16), saranno nulle, per la proprietà d) dei polinomî ω_r, tutti quei polinomî e le loro derivate per cui è insieme $r > h$, $\varrho_r > s$: ciascuna delle (19) si riduce cioè ad un polinomio in tutti i suoi argomenti. Ne segue appunto il teorema B).

Più generalmente si pongano tra le $x_1 x_2 \dots x_n$ delle relazioni *algebrico-differenziali* (a coefficienti razionali):

$$(20) \quad G_\rho(x_1 x_2 \dots x_n ; dx_1 \dots dx_n \dots ; d^k x_1 \dots d^k x_n) = 0 \quad (\varrho = 1, 2 \dots q)$$

di ordine *non maggiore* di k, le quali sian compatibili, e tra cui vi sia *almeno un' equazione algebrica*:

$$g(x_1 x_2 \dots x_n) = 0 .$$

Lo stesso procedimento dimostra allora che:

C) Qualunque elemento della varietà V di ordine maggiore od uguale a k relativo ad un punto della sezione di V con un integrale delle equazioni (20) è ancora algebrico.

La varietà V passi per l' origine ed in questo punto *tutte* le derivate $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ sian diverse da zero, il che può farsi evidentemente in infiniti modi, prendendo convenientemente il *primo* polinomio θ_0 della successione (5); dalla $F = 0$ può allora trarsi una qualunque delle x, ad es.: la x_i, in una serie di potenze delle altre $n - 1$:

$$(21) \quad x_i = P(x_1, \dots x_{i-1}, x_{i+1}, \dots x_n) \qquad (i = 1, 2 \dots n) \quad ; \quad P(0) = 0$$

questa serie converge allora in un certo intorno (ad $n - 1$ dimensioni e di ampiezza non nulla) del punto $x_1 = x_2 = .. = x_{i-1} = x_{i+1} = .. = x_n = 0$, ed in questo intorno definisce la x_i come funzione analitica e monodroma delle $x_1 .. x_{i-1} x_{i+1} \dots x_n$, che ha evidentemente le proprietà seguenti:

D) Se tra le $x_1 x_2 \dots x_n$ si pone un sistema qualunque di relazioni algebriche, una *qualunque* di esse variabili, ad es. la x_i, e le sue derivate (rispetto alle altre) di un ordine qualunque (calcolate dalla (21)) si riducono a funzioni algebriche di alcune tra esse variabili.

5. Il risultato che precede, per quanto notevole, non basta, come osserva a ragione lo Stäckel nella Memoria citata, ad assicurare dell' esistenza di funzioni analitiche e *trascendenti* di una o più variabili complesse, che abbian le proprietà espresse dal teorema D). Si potrebbe infatti pensare che l' equazione $F(x_1 x_2 \dots x_n) = 0$, pure essendo trascendente, definisse in

qualunque punto *algebrico* $(\xi_1 \ldots \xi_n)$ della varietà V soltanto degli *elementi* (nel senso di Weierstrass) di funzioni analitiche *algebriche*:

$$(22)\ x_i - \xi_i = \mathrm{P}_i(x_1 - \xi_1 ; \ldots x_{i-1} - \xi_{i-1} ; x_{i+1} - \xi_{i+1} ; \ldots x_n - \xi_n)\ (\mathrm{P}(0) = 0 ; i = 1, 2 \ldots n);$$

potrebbe cioè supporsi che *qualunque* elemento (22) relativo ad un punto *algebrico* (ξ) della varietà V, dedotto dalla $\mathrm{F} = 0$, *soddisfacesse sempre ad una equazione algebrica*:

$$g_{(\xi)}\,(x_1\, x_2 \ldots x_n) = 0\,,$$

variabile da punto a punto, da elemento ad elemento; per esprimerci chiaramente, se non con tutto rigore, si potrebbe pensare cioè che la varietà V risultasse costituita dalla riunione di infinite varietà algebriche, distinte o coincidenti, di S_n, in guisa da non poter più allora affermare la trascendenza di nessuno degli elementi (22) relativi ad un qualunque punto algebrico di V.

Per quanto, avendo riguardo a tutto quello che vi ha di arbitrario nella costruzione della $\mathrm{F}(x_1 \ldots x_n)$, un tale eventualità sembri estremamente improbabile, pure finchè non si riesca, magari imponendo alla F ulteriori condizioni, ad escluderla completamente, essa costituisce una grave difficoltà che può infirmare le considerazioni precedenti. Fortunatamente questa difficoltà può rimuoversi, con un metodo, a nostro credere, geniale ed elegante, sebbene un po' artificioso, che, dovuto allo Stäckel per una equazione a due variabili x ed y molto più particolare della nostra, si può estendere, convenientemente modificato, anche al problema generale che ora ci occupa. Se l'Accademia me lo permette, consacrerò a questa dimostrazione una prossima Nota.

Mineralogia. — *La bournonite nella miniera della Argentiera della Nurra (Portotorres, Sardegna).* Nota del prof. Domenico Lovisato, presentata dal Socio Struever.

Presso all'estrema parte nord-ovest dell'isola vediamo per non molto risorgere l'uronico della massa dell'Iglesiente, qui sollevato dalle granuliti, che per poco compariscono all'Asinara.

Le elevazioni, che si veggono dal Capo dell'Agentiera al Capo Falcone, sono generalmente formate da schisti quarziferi, talvolta tempestati di granati e contenenti all'Istintino, sebbene in piccolissima quantità, la *Tantalite ferrica* (1).

In questi schisti quarziferi s'annidano gli importanti filoni della miniera dell'Argentiera, costituendo un giacimento irregolare in direzione ed in ricchezza.

(1) Lovisato, *Notizia sopra alcune specie minerali nuove per la Sardegna.* Rendiconti R. Acc. dei Lincei, vol. VII, primo sem., serie 5ª, fasc. 8°. Roma 1898.