ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIX.

1902

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XI.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1902

niose di Percile ho veduto *Ostrea cochlear* Poli, *Anomia radiata* Brc., *Pecten scabrellus* Lch., *P. Haveri* Mich., come nelle breccioline del bacino del Turano nel prossimo Abruzzo. Le marne presentano frequentemente delle *Globigerinae* e degli Ostracodi, e ritengo si abbia a trovare in esse l'intera fauna dello Zancleano inferiore di Seguenza [1]. In generale questi terreni sono depositi di mare assai profondo e sulla loro età non potrei trarre conclusione diversa da quella del De Angelis, che cioè appartengano alla plaga Langhiana del Miocene medio [2].

Matematica. — *Contributo alla teoria degli insiemi.* Nota del prof. ETTORE BORTOLOTTI, presentata dal Socio U. DINI.

Lo studio di alcune quistioni pertinenti alla teorica delle Funzioni di variabili reali, toccate in una mia memoria preventiva: *Sulla determinazione dell'ordine di infinito* [3], mi ha portato a conclusioni che, mentre da un lato confermano i fatti che in quel lavoro furono annunziati, anche in quei punti dove per la affrettata redazione parevano men sicuri; d'altro

(1) Ho già detto altrove, descrivendo i terreni della Calabria, per quali ragioni ritengo debba attribuirsi al Miocene medio anzichè al Pliocene lo Zancleano inferiore del Seguenza. Suoi equivalenti paleontologici nell'Italia settentrionale e centrale sono stati riconosciuti dal Coppi le marne bianche di Montegibio, dal Silvestri quelle dell'alta Val del Tevere, tutte pur esse certamente mioceniche. Se in qualche punto della Valle del Mésima od altrove si sceverarono marne plioceniche o postplioceniche fra quelle che io o magari il Seguenza avevamo riunito con lo Zancleano, ciò non altera affatto le conclusioni sull'età del Zancleano inferiore, conclusioni che devono intendersi applicabili solo agli strati contenenti i fossili (foraminifere ed ostracodi) proprî di questo terreno e non ad altri.

(2) Nell'ultima *Carte géologique internationale de l'Europe* le argille, marne ed arenarie della parte centrale della Valle del Sacco sono giustamente attribuite al Miocene. Ciò sembrerebbe in contraddizione con alcuni lavori dell'Ufficio geologico; ma poichè in essi non sono indicati i successivi stadî di modificazione delle idee, è prudente astenersi dalle induzioni. Se non che non v'ha differenza fra i detti terreni indicati come miocenici e gli altri lasciati nell'Eocene. In generale nella Carta predetta e così nei monti a sud-est di Tivoli nella *Carta della Campagna romana*, salvo una sottile zona lungo la destra del Licenza e minimi lembi altrove, dovrebbero segnarsi come mioceniche tutte le masse attribuite all'Eocene nei monti fra Solmona e Avezzano e nei bacini dell'Aniene, del Sacco, e del Liri, poi una parte delle rocce del Corno grande al Gran Sasso e della Maiella. Così pure appartengono al Miocene i terreni (argille e marne) segnati come pliocenici sotto Mandela nella valle dell'Aniene e sotto Monte S. Giovanni Campano in quella del Liri, ed al Postpliocene i conglomerati calcari di Mandela.

Pur troppo gli studî dell'Ufficio predetto sui terreni terziarî della Provincia e delle regioni contermini, e sono la massima parte dell'Appennino, per mancanza di cognizioni paleontologiche, sono stati poco conclusivi, anzi, salvo pei dintorni di Viterbo dei quali si è occupato il valente Di Stefano, piuttosto negativi.

(3) Atti della Società dei naturalisti e matematici di Modena (1901).

lato hanno stretto rapporto con le teorie della integrazione definita impropria e delle serie di funzioni.

Non parrà quindi inutile che io brevemente le esponga; ciò che spero di poter fare con questa Nota e con alcune che la seguiranno fra breve.

In questa svolgerò alcune considerazioni sulla determinazione della *estensione esterna* (aüssern *Inhalt*) di un insieme lineare situato in un intervallo di ampiezza infinita.

Non credo sia stato osservato che non si giunge sempre allo stesso numero, quando si definisce la estensione esterna di un insieme Ξ situato nell' intorno $(x_0, \dots + \infty)$ come il limite, per $x = \infty$, della estensione di quella parte di Ξ che è situata nell' intervallo $(x_0, \dots x)$, o quando direttamente si cerchi il limite inferiore delle somme delle lunghezze dei segmenti che contengono punti o punti limiti di Ξ. Quest' ultimo limite può essere infinito, ed essere finito o nullo il primo: ed è il primo appunto che principalmente giova considerare.

Nemmeno credo sieno ancora state cercate le relazioni fra le estensioni esterne di due insiemi che si ottengono l' uno dall'altro, quando si eseguisce una trasformazione biunivoca, ordinata, continua della variabile reale x nella variabile reale $y = f(x)$, e si immagina che nell' intorno $(x_0, \dots + \infty)$ sia situato un insieme di punti di determinata estensione.

Di questi argomenti intendo occuparmi, indugiando sovra di essi solo quel tanto che mi sarà necessario per le applicazioni che dovrò farne nelle Note seguenti.

1. Nel segmento finito $(x_0, \dots x)$ sia situato l' insieme Ξ di punti $[\xi]$ e si consideri una successione $T_1, T_2, T_3, \dots$ di scomposizioni del segmento $(x_0, \dots x)$ fatte in guisa che ogni nuova scomposizione suddivida alcune o tutte le parti prima esistenti e che, ad ogni numero positivo δ, possa farsi corrispondere un indice m tale che, dalla operazione T_m in poi, tutti i tratticelli in cui $(x_0, \dots x)$ è scomposto, abbiano lunghezza minore di δ. Dopo ogni scomposizione si sommino le lunghezze di quei tratticelli che contengono punti o punti limiti di Ξ. Indicando coteste somme con $s_1, s_2, s_3, \dots$ si avrà $s_n > 0$, $s_n \geqq s_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3 \dots)$ e perciò esisterà il limite $L = \lim\limits_{n=\infty} s_n$, e si avranno le relazioni $s_n \geqq L$, $L \geqq 0$.

Il numero L rappresenta la *estensione esterna* dell' insieme Ξ (¹), diremo anche, con lo Stolz (²) che *compete all' insieme* Ξ, e diremo *discreti* quegli insiemi a cui compete un numero $L = 0$.

Il numero L *è indipendente dal modo con cui le scomposizioni* T_n *si operano.*

(¹) Cfr. Peano, *Applicazioni geometriche del Calcolo*, pag. 152. Per la bibliografia si rimanda all'articolo sugli insiemi che è nell' Enciclopedia.

(²) Math. Annalen, XXIII, pag. 154. Cfr. anche Harnack, Mat. Ann. XIX, pag. 238.

Se un segmento $(x_0, \ldots x)$ *finito si scompone in un numero finito di parti, la estensione esterna di un insieme* Ξ *situato in* $(x_0, \ldots x)$ *è eguale alla somma delle estensioni delle parti di* Ξ *situate nei singoli tratti in cui* $(x_0, \ldots x)$ *fu diviso*, ed, in particolare, *non è minore della estensione di una qualunque sua parte.*

Se in un segmento finito $(x_0, \ldots x)$ *è situato un insieme discreto* Ξ, *ad ogni numero positivo* ε *si può far corrispondere un numero positivo* δ *tale che, scomponendo il segmento* $(x_0, \ldots x)$ *in tratti tutti minori, in lunghezza, di* δ, *la somma delle lunghezze dei tratti che contengono punti o punti limiti di* Ξ, *sia minore di* ε.

La somma di un numero finito di insiemi discreti situati in uno stesso segmento è ancora un insieme discreto.

Se, scomponendo il segmento $(x_0, \ldots x)$ *in un numero finito di parti, i punti dell'insieme* Ξ *contenuti in ciascuna di quelle parti costituiscono altrettanti insiemi discreti, anche l'insieme* Ξ *è discreto.*

Indicando con K l'insieme di tutti i punti che rimangono nell'intervallo $(x_0, \ldots x)$ dopo che se ne è sottratto un insieme discreto, si vede agevolmente che: *L'insieme* K *è denso in tutti i punti del segmento* $(x_0, \ldots x)$.

2. Consideriamo ora un insieme Ξ di punti $[\xi]$ situati in un intorno $(x_0, \ldots \infty)$.

Sia data una successione $x_0, x_1, x_2 \ldots$ che tende all'infinito sempre crescendo, cosicchè si sappia che nessuno dei segmenti $(x_n, \ldots x_{n+1})$ ha lunghezza nulla. Indichiamo con L_n la estensione esterna della parte di Ξ che è contenuta nel segmento $(x_n, \ldots x_{n+1})$.

Se la serie

$$\sum_0^\infty L_n = L_0 + L_1 + L_2 + \cdots \tag{1}$$

converge verso la somma L, *diremo che questo numero* L *compete all'insieme* Ξ, *dato nell'intorno* $(x_0, \ldots \infty)$.

3. Per giustificare questa definizione dimostreremo che *il numero* L *non dipende dalla scelta della successione* x_n.

Sia infatti $y_0 = x_0, y_1, y_2, \ldots$ una successione che tende all'infinito sempre crescendo. Indichiamo con L'_n la estensione esterna della parte di Ξ contenuta nel segmento $(y_n, \ldots y_{n+1})$.

Voglio provare anzitutto che *la serie*

$$\sum_0^\infty L'_n = L'_0 + L'_1 + L'_2 + \cdots \tag{2}$$

è convergente, se è convergente la (1).

Preso un numero positivo σ, a piacere, e determinato l'indice n per modo che il resto $R_n = L_{n+1} + L_{n+2} + \cdots$ della serie convergente ΣL_n, sia minore di σ, si cerchi poi, nella successione y_n, il primo dei termini che non è minore di x_{n+1}.

Posto che questo termine sia y_{m+1}, dico che la somma di un numero qualunque r di termini, a partire dall' $m+1^{\text{esimo}}$, nella serie (2) è essa pure minore di σ.

Scriviamo la somma: $\lambda'_{m,r} = L'_{m+1} + L'_{m+2} + \cdots + L'_{m+r}$, ed al numero r fissato, facciamone corrispondere uno r_1 abbastanza grande perchè y_{m+r} non sia maggiore di x_{n+r_1}. L' intervallo $(y_{m+1}, \ldots y_{m+r})$ sarà allora tutto contenuto nell' intervallo $(x_{n+1}, \ldots x_{n+r})$, e la estensione esterna della parte di Ξ situata nel primo intervallo, non sarà maggiore di quella relativa alla parte di esso contenuta nel secondo, cioè avremo:

$$\lambda'_{m,r} \leqq L_{n+1} + L_{n+2} + \cdots + L_{n+r_1} \leqq \sigma \qquad \text{c. d. d.}$$

È facile ora vedere che: *anche le somme di quelle due serie sono eguali.*

Indichiamo con $S_n = L_1 + L_2 + \cdots + L_n$, la somma degli n primi termini delle serie (1), e con $S'_m = L'_1 + L'_2 + \cdots L'_m$, la somma degli m primi termini della (2).

Ad ogni numero n potremo farne corrispondere un altro m abbastanza grande perchè sia $x_n \leqq y_m$, ed al tendere all' infinito di n, anche m diventerà infinito. Si ha però $S_n \leqq S'_m$, ed anche perciò:

$$L = \lim_{n=\infty} S_n \leqq L' = \lim_{m=\infty} S'_m. \tag{3}$$

D'altra parte, ad ogni m fissato, può farsi corrispondere un n_1 tale che sia $x_{n_1} \geqq y_m$, epperò anche $S_{n_1} \geqq S'_m$; da cui

$$L \geqq L'. \tag{4}$$

Dalle (3) e (4) si ricava appunto $L = L'$. c. d. d.

4. Il numero L che compete all' insieme Ξ situato in un intervallo infinito $(x_0, \ldots +\infty)$, e che abbiamo ora dimostrato potersi determinare in modo unico, risulta con legge aritmetica dai limiti L_n supposti già calcolati.

La somma $S_n = L_0 + L_1 + \cdots + L_n$, può ottenersi, però, anche operando al modo seguente:

Si scomponga ciascuno degli intervalli $(x_0, \ldots x_1)$, $(x_1, \ldots x_2), \ldots$, $(x_n, \ldots x_{n+1})$ in parti di lunghezza non maggiore di un determinato numero δ, si indichi con $L_r(\delta)$ la somma delle lunghezze dei tratti che contengono punti, o punti limiti di Ξ, e sono contenuti nel segmento $(x_r, \ldots x_{r+1})$, $(r = 0, 1, 2 \ldots n)$, si faccia la somma

$$S_n(\delta) = L_0(\delta) + L_1(\delta) + \cdots + L_n(\delta),$$

e se ne cerchi il limite per $\delta = 0$: si avrà appunto

$$S_n = \lim_{\delta=0} S_n(\delta)\,. \tag{5}$$

Ora, benchè si sappia che tutti i limiti (5) esistono finiti e determinati, e che esiste, pure finito e determinato il limite

$$\lim_{n=\infty} S_n = L\,, \tag{6}$$

non si può asserire che, per valori di δ *abbastanza piccoli, esista anche il limite*:

$$\lim_{n=\infty} S_n(\delta) = L(\delta)\,, \tag{7}$$

cioè che converga la serie $\sum_0^\infty L_n(\delta)$, *e non si può, in generale, dedurre*:

$$L = \lim_{n=\infty} \{ \lim_{\delta=0} S_n(\delta) \} = \lim_{\delta=0} \{ \lim_{n=\infty} S_n(\delta) \}\,. \tag{8}$$

Ciò accadrà solo quando la serie $\sum_0^\infty L_n(\delta)$, *convergente, come abbiamo supposto, per* $\delta = 0$, *converga uniformemente a tratti in un intorno determinato di questo punto* (1).

Quando tale condizione sia soddisfatta, *il numero* L *che compete all'insieme* Ξ, *coincide con la sua estensione esterna.*

5. Il teorema dato al numero 3, e le proprietà fondamentali dei numeri S_n che competono ad insiemi situati in segmenti finiti, permettono di enunciare anche il metodo seguente per la determinazione del numero L che compete all'insieme Ξ situato nell'intorno $(x_0, \dots \infty)$:

Fissato un numero positivo δ, *si scomponga il segmento* $(x_0, \dots x)$ *in parti tutte minori di* δ, *si faccia la somma* $S(x, \delta)$ *delle lunghezze di quelle parti che contengono punti, o punti limiti di* Ξ, *si calcoli il limite*:

$$\lim_{x=\infty} \{ \lim_{\delta=0} S(x, \delta) \} = L\,. \tag{9}$$

Se ha luogo la convergenza uniforme di cui s'è fatto parola al numero precedente, è indifferente l'ordine secondo cui si eseguiscono le due operazioni di passaggio al limite, e si ha anche

$$L = \lim_{\delta=0} \{ \lim_{x=\infty} S(x, \delta) \} \tag{10}$$

(1) Cfr. Arzelà, *Sulle serie di Funzioni* (Mem. R. Acc. delle Sc. di Bologna, a. 1899, pag. 153).

ma se quella convergenza uniforme manca, e v'è solo la convergenza ordinaria per $\delta = 0$, si dovrà esclusivamente far uso delle (9).

6. Se la serie $\sum_0^\infty \mathrm{L}_n$ *diverge*, non esiste, o se si vuole, è *infinito* il numero L che compete all'insieme Ξ, diverge a maggior ragione anche ogni serie $\Sigma \mathrm{L}(\delta)$ e si ha:

$$\lim_{x=\infty} \left\{ \lim_{\delta=0} \mathrm{S}(x, \delta) \right\} = \lim_{\delta=0} \left\{ \lim_{x=\infty} \mathrm{S}(x, \delta) \right\} = \infty \,. \tag{11}$$

7. *Perchè sia possibile la determinazione del numero (finito)* L *che compete ad un insieme* Ξ, *situato nell'intorno* $(x_0, \ldots \infty)$, *occorre e basta che ad ogni numero positivo* ε *se ne possa far corrispondere un altro* x_ε *abbastanza grande, perchè i punti ed i punti limiti di* Ξ *situati nel segmento* $(x_\varepsilon, \ldots x)$, *qualunque sia* $x > x_\varepsilon$, *possano essere rinchiusi in un insieme di tratti la cui lunghezza totale non superi* ε.

Perchè, oltre a ciò, l'insieme Ξ *abbia estensione esterna finita, occorra e basta, che, la condizione superiormente enunciata, possa esser soddisfatta col dividere il segmento* $(x_\varepsilon, \ldots x)$ *in tratti tutti minori, in lunghezza, di un numero positivo* δ, *indipendente da* x.

8. In particolare per la esistenza del numero (finito) L, *è condizione necessaria, che ad ogni coppia di numeri positivi* ε, M, *se ne possa far corrispondere un terzo* $x_{\varepsilon,\mathrm{M}}$ *abbastanza grande, perchè la estensione esterna della parte di* Ξ *contenuta nel segmento* $(x, \ldots, x + \mathrm{M})$, $x \geqq x_{\varepsilon,\mathrm{M}}$ *non sia maggiore di* ε.

9. È importante, per quel che segue, notare che *se un insieme* Ξ *soddisfa cotesta condizione, il rapporto* $\dfrac{\mathrm{S}_n}{x_n - x_0}$ *della estensione esterna della parte di* Ξ *situata nel segmento* $(x_0, \ldots x_n)$ *alla lunghezza del segmento stesso, tende allo zero quando* x_n *tende all' infinito*. Ed infatti, poichè è indifferente la scelta della successione x_n, prendo $x_n = x_0 + n\mathrm{M}$. Per le ipotesi poste posso scrivere [1]

$$\lim_{n=\infty} \frac{\mathrm{S}_n}{x_n - x_0} = \lim_{n=\infty} \frac{\mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} < \frac{\varepsilon}{\mathrm{M}}$$

ε, M, sono positivi qualunque, dunque è $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{\mathrm{S}_n}{x_n - x_0} = 0$.

10. Gli insiemi che soddisfano la condizione enunciata al n. 9 (in particolare quindi, anche quelli che soddisfano quella del n. 8) hanno, nelle ricerche che dovrò fare nelle Note seguenti, importanza specialissima.

[1] Cfr. Cesàro, *Analisi Algebrica*, pag. 98.

Quando ciò non possa generare confusione, li indicheremo semplicemente col simbolo Ξ_2 ed *indicheremo con* K_2 *l'insieme dei punti che rimangono in un intorno* $(x_0, \ldots \infty)$ *quando se ne sono sottratti tutti i punti di un insieme* Ξ_2.

Dalle date definizioni si deduce che, *il rapporto fra la estensione esterna della parte di un insieme* Ξ_2 *situata nel segmento* $(x_0, \ldots x)$ *e quella della corrispondente parte dell'insieme* K_2, *tende allo zero per* x *tendente all'infinito.*

Non si deve escludere che ad un insieme Ξ_2 possa competere un numero L finito o nullo, ma rimane escluso che un insieme Ξ_2 possa contemporaneamente essere un insieme K_2.

11. La somma di un numero finito di insiemi Ξ_2 è ancora un insieme Ξ_2.

12. Fra gli insiemi che ammettono numero finito L, meritano speciale attenzione quelli per i quali è $L = 0$.

Essendo $L = \sum_0^\infty L_n$, $L_n \geqq 0$, perchè sia $L = 0$ occorre e basta che i numeri L_n sieno tutti singolarmente nulli, cioè che la parte dell'insieme dato che è situata in qualunque segmento finito abbia estensione esterna nulla.

Diremo che un tale insieme è *discreto in qualunque sua parte finita*, o più brevemente che è *discreto*.

Un insieme discreto, quando manchi la convergenza uniforme nella serie $\Sigma L_n(\delta)$ *può non avere estensione nulla*, ma *se un insieme ha estensione esterna nulla, è certamente discreto.*

13. Indicheremo brevemente un insieme discreto col simbolo Ξ_1, ed indicheremo con K_1 l'insieme dei punti che rimangono nell'intorno $(x_0, \ldots + \infty)$ dopo che se ne è sottratto un insieme Ξ_1.

14. La somma di un numero finito di insiemi discreti è ancora un insieme discreto.

15. Un insieme K_1 è denso egualmente in tutti i punti dell'intorno dove esso è situato.

16. Un insieme discreto è sempre anche un insieme Ξ_2, ed un insieme K_2 è sempre parte di un insieme K_1.

17. Se tutti i punti di un insieme K_1 soddisfano una stessa condizione, potremo dire che quella condizione è *generalmente soddisfatta* nei punti dell'intorno $(x_0, \ldots + \infty)$ dove K_1 è situato.

18. Sia

$$y = f(x) \tag{12}$$

una funzione ad un valore, finita, continua, sempre crescente della variabile reale x, data nell'intorno $(x_0, \ldots + \infty)$ e sia

$$\lim_{x=\infty} f(x) = \infty . \tag{13}$$

I punti dell' intorno $(x_0, \ldots \infty)$ sono posti, mediante la (12) in corrispondenza biunivoca, ordinata, continua, con quelli dell'intorno $(y_0 = f(x_0), \ldots + \infty)$.

Ad un insieme di punti $[\xi]$ situati nell' intorno $(x_0, \ldots + \infty)$ corrisponderà un insieme di punti $[\eta]$ situati nell' intorno $(y_0, \ldots + \infty)$ e reciprocamente.

A punti contenuti nel segmento $(x_1, \ldots x_2)$, corrisponderanno punti situati nel segmento $(y_1 = f(x_1), \ldots\ y_2 = f(x_2))$; quando la lunghezza dell' intervallo $(x_1, \ldots x_2)$ si faccia tendere allo zero, così succederà di quella dell' intervallo $(y_1, \ldots y_2)$ e reciprocamente.

Pel noto teorema di Cantor, sulla continuità uniforme, potremo inoltre fissare un numero δ_ε abbastanza piccolo, perchè, ad ogni intervallo $(x_1, \ldots x_2)$ contenuto in $(x_0, \ldots \infty)$ ed avente lunghezza non maggiore di δ_ε, corrisponda un intervallo $(y_1, \ldots y_2)$ di lunghezza minore del numero positivo ε.

Notiamo ancora che se si ha una successione x_n di punti x tendenti all' infinito sempre crescendo, si avrà corrispondentemente una successione di numeri y_n sempre crescenti, tendenti all' infinito.

19. Le considerazioni fatte, ed i risultamenti ottenuti al n. 7 ci permettono di concludere che: *Se ad un insieme di punti* $[\xi]$ *situati nell'intorno* $(x_0, \ldots + \infty)$, *compete un numero finito* L, *anche al corrispondente insieme* $[\eta]$ *compete un numero finito* L', *e reciprocamente.* Se è $L = 0$, anche $L' = 0$, cioè *ad insiemi discreti corrispondono insiemi discreti.*

20. Poniamo ora che nell' intorno $(x_0, \ldots + \infty)$ sia situato un insieme $\Xi_2(\xi)$ tale che il rapporto $\dfrac{S(x)}{x - x_0}$ della estensione esterna della parte di esso contenuta nel segmento $(x_0, \ldots x)$ alla lunghezza del segmento stesso, sia infinitesima per $x = \infty$.

L' estensione esterna della parte dell' insieme $[\eta]$ contenuta nel corrispondente segmento $(y_0, \ldots y(x))$ sarà espressa da $S(f(x))$, e, poichè al tendere di x all' infinito, anche $f(x)$ tende all' infinito, e reciprocamente, avremo:

$$\lim_{y=\infty} \frac{S(y)}{y - y_0} = 0$$

e l' insieme $[\eta]$ sarà a sua volta un insieme Ξ_2.

Dunque, ad insiemi Ξ_2 dell' intorno $(x_0, \ldots \infty)$, corrispondono pure insiemi Ξ_2 dell' intorno $(y_0, \ldots \infty)$, e così ad insiemi K_2 corrispondono insiemi K_2, e reciprocamente.