ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIX.

1902

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1902

Meccanica. — *Intorno ad alcuni particolari movimenti di un punto sopra una superficie*. Nota di E. Daniele, presentata dal Socio Volterra.

In una Nota di recente pubblicazione [1] risolvetti un problema relativo al moto di un punto in un piano: problema che consisteva nel determinare quei movimenti nei quali le ∞^2 traiettorie, che corrispondono ad uno stesso valore della costante delle forze vive, si possono distribuire in sistemi ortogonali. I risultati a cui pervenni sono i seguenti: la costante delle forze vive (tolto il caso del moto rettilineo uniforme) deve essere nulla, e la funzione potenziale soddisfare all' equazione

$$\frac{\partial^2 \lg U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \lg U}{\partial y^2} = 0\,;$$

verificandosi queste condizioni, le traiettorie nel moto corrispondente si ottengono con due quadrature, ed i sistemi ortogonali, nei quali si possono distribuire, sono isotermi.

Non è difficile estendere al movimento di un punto sopra una superficie qualunque le considerazioni ed i risultati contenuti in quella Nota; ed è quanto mi propongo di fare nelle pagine che seguono.

1. Un punto di massa eguale all' unità si muova sopra una superficie di elemento lineare

$$ds^2 = \mathrm{E}\, du^2 + 2\mathrm{F}\, du\, dv + \mathrm{G}\, dv^2\,,$$

sotto l' azione di forze di potenziale U. La ricerca delle traiettorie, che corrispondono ad un medesimo valore della costante delle forze vive h, si può far dipendere dall' integrazione dell' equazione

$$(1) \qquad \varDelta_1 \theta \equiv \frac{1}{\mathrm{H}^2}\left[\mathrm{E}\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2 - 2\mathrm{F}\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v} + \mathrm{G}\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2\right] = 2\,(\mathrm{U} + h)\,,$$

essendo

$$\mathrm{H}^2 = \mathrm{EG} - \mathrm{F}^2\,;$$

poichè, come si dimostra ricorrendo, ad es., al principio della minima azione, il problema delle traiettorie per la data superficie equivale a quello delle geodetiche per un' altra superficie il cui elemento lineare sia dato da

$$ds'^2 = 2\,(\mathrm{U} + h)\, ds^2\,,$$

[1] *Sopra alcuni particolari movimenti di un punto in un piano*; Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. XI, 1902.

e quest' ultimo problema dipende, come è noto, dall' integrazione dell' equazione

$$\Delta_1 \theta = 1 .$$

Ad ogni integrale θ della (1) corrisponderà dunque una famiglia di traiettorie del punto mobile, che saranno le linee ortogonali alla famiglia $\theta = \text{cost.}$, e si otterranno integrando l' equazione

$$\left(\mathrm{E} \frac{\partial \theta}{\partial v} - \mathrm{F} \frac{\partial \theta}{\partial u} \right) du + \left(\mathrm{F} \frac{\partial \theta}{\partial v} - \mathrm{G} \frac{\partial \theta}{\partial u} \right) dv = 0 .$$

Se poi si conosce un integrale della (1) contenente una costante arbitraria a, l' equazione

$$\frac{\partial \theta}{\partial a} = \text{cost.}$$

rappresenterà tutte le traiettorie che corrispondono al valore fissato per h.

2. Ciò premesso, vogliamo vedere se esistono sulla superficie dei sistemi ortogonali composti unicamente di traiettorie. La risposta a tale questione è identica a quella che già ottenni nel caso del piano. Difatti se imaginiamo riferita la superficie ad un sistema ortogonale isotermo (φ, ψ), che dia al quadrato dell' elemento lineare la forma

$$ds^2 = \lambda \, (d\varphi^2 + d\psi^2) ,$$

l' identico calcolo fatto nel piano conduce al risultato che *condizione necessaria e sufficiente, affinchè le linee* $\theta = \text{cost.}$ *insieme colle linee ortogonali* $\theta_0 = \text{cost.}$ *costituiscano un sistema di traiettorie del punto mobile, è che* θ *verifichi simultaneamente le due equazioni*

$$\Delta_1 \theta = 2 \, (\mathrm{U} + h) \quad , \quad \Delta_2 \theta = 0 . \tag{2}$$

Il sistema (θ , θ_0) *è allora isotermo.*

Le espressioni $\Delta_1 \theta$, $\Delta_2 \theta$ sono i parametri differenziali di Beltrami calcolati in coordinate (φ , ψ); per le proprietà ben note dei parametri differenziali sarà indifferente calcolarli con queste coordinate o colle primitive (u , v): quindi le condizioni (2) valgono in coordinate qualunque.

La questione è così ridotta a trovare le condizioni affinchè le (2) ammettano soluzioni comuni. Ora ponendo

$$\lambda \, (\mathrm{U} + h) = \mathrm{V} ,$$

le (2) si scrivono

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial \psi} \right)^2 = 2\mathrm{V} \quad , \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \psi^2} = 0 ;$$

ma questo sistema coincide precisamente, nella forma, col sistema (3) della mia Nota citata, ed un calcolo identico a quello svolto colà mostra che le condizioni domandate si riducono all'unica

$$\frac{\partial^2 \lg V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \lg V}{\partial \psi^2} = 0, \tag{3}$$

ossia, sostituendo per V la sua espressione precedente, e introducendo la curvatura totale K della superficie, che è data da

$$2K = -\Delta_2 \lg \lambda,$$

$$2Kh^2 + (4KU - \Delta_2 U)\,h + (2K - \Delta_2 \lg U)\,U^2 = 0. \tag{4}$$

Siccome U non deve dipendere da h, dovrà aversi, fintantochè h non è nulla,

$$K = 0, \quad 4KU - \Delta_2 U = 0, \quad 2K - \Delta_2 \lg U = 0,$$

ossia

$$K = 0, \quad U = \text{cost.}$$

Adunque: *Salvo il caso che il movimento avvenga sopra una superficie sviluppabile sotto l'azione di forze nulle, non è possibile comporre le traiettorie in sistemi ortogonali (isotermi) se non a condizione che la costante delle forze vive sia nulla; affinchè la cosa sia possibile occorre di più che la funzione potenziale verifichi l'eguaglianza*

$$\Delta_2 \lg U = 2K. \tag{5}$$

Queste due condizioni sono anche sufficienti.

Evidentemente la (5) si può intendere scritta in coordinate (u, v) qualunque.

3. Si può osservare che si perviene alla (3) anche per un'altra via. Come si è già ricordato, le traiettorie della superficie data corrispondono alle geodetiche di un'altra superficie di elemento lineare

$$ds'^2 = 2(U + h)\,ds^2:$$

la questione adunque di vedere se sulla prima superficie le traiettorie si possano distribuire in sistemi ortogonali, equivale a quella di riconoscere se sulla seconda si possano formare dei sistemi ortogonali colle geodetiche. Supposto che ciò sia possibile, e riferita la superficie ad un tale sistema ortogonale, la formola di Liouville [1]

$$K = \frac{1}{H}\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial u\, \partial v} + \frac{\partial}{\partial u}\frac{\sqrt{G}}{\varrho} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\sqrt{E}}{\varrho_1}\right),$$

che esprime la curvatura totale per l'angolo ω delle linee coordinate e le

[1] V. Bianchi, *Lez. di geom. diff.*, pag. 147.

curvature geodetiche $\frac{1}{\varrho}, \frac{1}{\varrho_1}$ delle linee stesse, mostra senz' altro che la superficie è a curvatura nulla. La condizione che si cercava per le traiettorie della data superficie si esprimerà dunque scrivendo che è nulla la curvatura della forma

$$ds'^2 = 2\,(\mathrm{U} + h)\, ds^2\,;$$

e se prendiamo per semplicità

$$ds^2 = \lambda\,(d\varphi^2 + d\psi^2)\,,$$

troviamo come condizione

$$\frac{\partial^2 \lg \lambda\,(\mathrm{U}+h)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \lg \lambda\,(\mathrm{U}+h)}{\partial v^2} = 0\,,$$

che è appunto la (3).

4. Facendo, nella (5), $\mathrm{K} = 0$ si ricade nell' equazione che s' era trovata studiando il movimento di un punto nel piano (¹). Del resto anche nel caso che la superficie sia qualunque, si può sempre ritenere che U dipenda da un' equazione della forma (5) col secondo membro nullo; difatti le (2) dicono che per avere U basta integrare l' equazione $\varDelta_2\theta = 0$, dopo di che la U si ottiene dalla $\varDelta_1\theta = 2\mathrm{U}$ senza ulteriori quadrature.

Prima di passare alla effettiva ricerca delle traiettorie nei movimenti che andiamo esaminando, notiamo ancora una proprietà che emerge dall' equazione (5) cui deve soddisfare la U. Riferendoci ad un sistema isotermo $(\varphi\,,\psi)$, la (5) si può scrivere, in causa della (4):

$$\varDelta_2 \lg \mathrm{U} + \varDelta_2 \lg \lambda = 0\,.$$

Ora questa equazione è simmetrica rispetto a λ e U, e quindi si ha il seguente notevole teorema di permutabilità:

Se sopra una superficie di elemento lineare

$$ds^2 = \lambda\,(d\varphi^2 + d\psi^2)$$

avviene un movimento della natura che consideriamo sotto l'azione di forze di potenziale U, *si avrá un movimento analogo sopra una superficie di elemento lineare*

$$d\sigma^2 = \mathrm{U}\,(d\varphi^2 + d\psi^2)$$

sotto l'azione di forze potenziale λ. *Le traiettorie sia dell' una che dell' altra superficie corrispondono alle geodetiche di una stessa superficie il cui elemento lineare è dato da*

$$ds'^2 = 2\lambda\mathrm{U}\,(d\varphi^2 + d\psi^2)\,.$$

5. Vediamo ora come si ottengono le traiettorie quando, essendo nulla la costante delle forze vive, la funzione potenziale soddisfa alla condizione

(¹) La formola (7) della mia Nota citata.

che abbiamo trovato, quando, cioè, le traiettorie si possono distribuire in sistemi ortogonali (isotermi). Il calcolo si può svolgere in modo analogo a quello svolto nel caso della superficie piana. Il problema consiste, in sostanza, nel trovare le soluzioni del sistema (2) con $h=0$, cioè le soluzioni comuni alle due equazioni [1]

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{E\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v} + G\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2}{H^2} = 2U \\ &\frac{\partial}{\partial u}\frac{G\frac{\partial\theta}{\partial u} - F\frac{\partial\theta}{\partial v}}{H} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{E\frac{\partial\theta}{\partial v} - F\frac{\partial\theta}{\partial u}}{H} = 0\,. \end{aligned}\right.$$

Posto

$$(7)\qquad \frac{G\frac{\partial\theta}{\partial u} - F\frac{\partial\theta}{\partial v}}{H} = \theta_1\,,\qquad \frac{E\frac{\partial\theta}{\partial v} - F\frac{\partial\theta}{\partial u}}{H} = \theta_2\,,$$

le equazioni precedenti si trasformano nelle altre

$$(6')\qquad \theta_1\frac{\partial\theta}{\partial u} + \theta_2\frac{\partial\theta}{\partial v} = 2HU\,,\qquad \frac{\partial\theta_1}{\partial u} + \frac{\partial\theta_2}{\partial v} = 0\,;$$

d' altra parte le (7) si possono anche scrivere

$$(7')\qquad \frac{\partial\theta}{\partial u} = \frac{E\theta_1 + F\theta_2}{H}\,,\qquad \frac{\partial\theta}{\partial v} = \frac{F\theta_1 + G\theta_2}{H}\,,$$

ed allora dalle (6′), (7′) eliminando θ si ottiene il sistema seguente, che equivale al sistema (6):

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &E\theta_1^2 + 2F\,\theta_1\,\theta_2 + G\theta_2^2 = 2H^2U \\ &\frac{\partial\theta_1}{\partial u} + \frac{\partial\theta_2}{\partial v} = 0 \\ &\frac{\partial}{\partial u}\frac{F\theta_1 + G\theta_2}{H} - \frac{\partial}{\partial v}\frac{E\theta_1 + F\theta_2}{H} = 0\,. \end{aligned}\right.$$

Una volta calcolate θ_1 e θ_2, dalle (7′) si ha immediatamente θ con una quadratura. Se ora dalla prima delle (8) ricaviamo θ_2 e la sostituiamo nelle due rimanenti, si trovano per θ_1 le equazioni

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} &2\frac{\partial\theta_1}{\partial u} = \pm\sqrt{2GU - \theta_1^2}\left[\frac{-2H}{G}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} + \frac{1}{H}\left(F\frac{\partial \lg U}{\partial u} - E\frac{\partial \lg U}{\partial v}\right)\right] + \theta_1\frac{\partial \lg(GU)}{\partial u} \\ &2\frac{\partial\theta_1}{\partial v} = \pm\sqrt{2GU - \theta_1^2}\left[\frac{-2H}{G}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} + \frac{1}{H}\left(G\frac{\partial \lg U}{\partial u} - F\frac{\partial \lg U}{\partial v}\right)\right] + \theta_1\frac{\partial \lg(GU)}{\partial v}\,, \end{aligned}\right.$$

[1] Un caso particolare di questo sistema si presentò, nel piano, al prof. Morera, nel § IV della sua Nota *Sulla separazione delle variabili nelle equazioni del moto di un punto materiale su una superficie*; Atti della R. Accad. di Torino, 1881.

dove si sono introdotti per brevità i simboli di Christoffel

$$\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}=\frac{G\frac{\partial E}{\partial v}-F\frac{\partial G}{\partial u}}{2H^2}\quad,\quad\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}=\frac{-F\frac{\partial G}{\partial v}+2G\frac{\partial F}{\partial v}-G\frac{\partial G}{\partial u}}{2H^2}.$$

Osserveremo che la condizione d'integrabilità delle (9), tenendo presente che la curvatura K si può esprimere colla formola

$$K=\frac{1}{H}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{H}{G}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{H}{G}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\right)\right],$$

si scrive

$$\Delta_2 \lg U = 2K,$$

che è precisamente l'equazione (5) trovata addietro.

Ed ora per integrare le (9) non vi è che da porre

$$\theta_1 = \eta\sqrt{2GU},$$

col che le (9) si trasformano in queste altre:

$$\frac{2}{\pm\sqrt{1-\eta^2}}\frac{\partial\eta}{\partial u}=-\frac{2H}{G}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}+\frac{1}{H}\left(F\frac{\partial \lg U}{\partial u}-E\frac{\partial \lg U}{\partial v}\right)$$
$$\frac{2}{\pm\sqrt{1-\eta^2}}\frac{\partial\eta}{\partial v}=-\frac{2H}{G}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}+\frac{1}{H}\left(G\frac{\partial \lg U}{\partial u}-F\frac{\partial \lg U}{\partial v}\right);$$

di qui integrando si ha

$$\pm \operatorname{arcsen}\eta = a + P,$$

dove a è una costante arbitraria, ed inoltre si è posto

$$2P=\int\left\{\left[-\frac{2H}{G}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}+\frac{1}{H}\left(F\frac{\partial \lg U}{\partial u}-E\frac{\partial \lg U}{\partial v}\right)\right]du+\right.$$
$$\left.+\left[-\frac{2H}{G}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}+\frac{1}{H}\left(G\frac{\partial \lg U}{\partial u}-F\frac{\partial \lg U}{\partial v}\right)\right]dv\right\}.$$

Si ha dunque

$$\eta = \pm \operatorname{sen}(a+P)$$

e quindi

$$\theta_1 = \pm\sqrt{2GU}\operatorname{sen}(a+P).$$

Nota θ_1, la prima delle (8) ci fornisce θ_2:

$$\theta_2=\frac{\pm\sqrt{2GU}}{G}\left[-F\operatorname{sen}(a+P)+H\cos(a+P)\right],$$

ed infine dalle (7′) abbiamo

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta}{\partial u} = \dfrac{\pm\sqrt{2\mathrm{GU}}}{\mathrm{G}}[\mathrm{H}\,\mathrm{sen}\,(a+\mathrm{P})+\mathrm{F}\cos(a+\mathrm{P})] \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial v} = \pm\sqrt{2\mathrm{GU}}\cos(a+\mathrm{P}), \end{cases}$$

dalle quali otteniamo θ con una quadratura.

Si può dare a queste equazioni un' altra forma introducendo l' angolo ω delle linee coordinate. Si ha infatti

$$\cos\omega = \frac{\mathrm{F}}{\sqrt{\mathrm{EG}}}\quad,\quad \mathrm{sen}\,\omega = \frac{\mathrm{H}}{\sqrt{\mathrm{EG}}},$$

onde

$$\mathrm{H}\,\mathrm{sen}\,(a+\mathrm{P})+\mathrm{F}\cos(a+\mathrm{P}) = \sqrt{\mathrm{EG}}\cos(a+\mathrm{P}-\omega).$$

Le (10) diventano quindi

$$(10')\quad \frac{\partial\theta}{\partial u} = \pm\sqrt{2\mathrm{EU}}\cos(a+\mathrm{P}-\omega)\quad,\quad \frac{\partial\theta}{\partial v} = \pm\sqrt{2\mathrm{GU}}\cos(a+\mathrm{P}).$$

Il confronto di queste formole e dell' espressione di P colle analoghe che si son trovate nel piano mostra che queste rientrano in quelle generali ora ottenute.

6. I sistemi ortogonali isotermi di cui trattiamo, costituiti di sole traiettorie del punto, si avranno dunque, come si sa, associando all' equazione $\theta(u, v, a) = \mathrm{cost.}$ (con a fissa una qualunque) l' altra $\dfrac{\partial\theta}{\partial a} = \mathrm{cost.}$ [1]. Facendo poi percorrere ad a tutti i valori, quest' ultima equazione rappresenta tutte le traiettorie del punto.

Ma anche qui vi sarà da fare la stessa osservazione che già si fece nel caso del piano, che, cioè, anche l' altra equazione $\theta(u, v, a) = \mathrm{cost.}$ deve rappresentare le traiettorie [2]. La cosa si verifica senz' altro sulle nostre equazioni; poichè se scriviamo distesamente le equazioni θ cost., $\dfrac{\partial\theta}{\partial a} = \mathrm{cost.}$, otteniamo, per le (10′):

$$\int\left\{\sqrt{\mathrm{EU}}\cos(a+\mathrm{P}-\omega)\,du + \sqrt{\mathrm{GU}}\cos(a+\mathrm{P})\,dv\right\} = b$$
$$\int\left\{\sqrt{\mathrm{EU}}\,\mathrm{sen}\,(a'+\mathrm{P}-\omega)\,du + \sqrt{\mathrm{GU}}\,\mathrm{sen}\,(a'+\mathrm{P})\,dv\right\} = b',$$

(1) L' ortogonalità dei sistemi $\theta = \mathrm{cost.}$, $\dfrac{\partial\theta}{\partial a} = \mathrm{cost.}$ risulta subito direttamente osservando che la derivazione, rispetto ad a, dell' equazione $\Delta_1\theta = 2\mathrm{U}$ a cui soddisfa θ, conduce alla relazione $\nabla\left(\theta, \dfrac{\partial\theta}{\partial a}\right) = 0$, dove ∇ indica il parametro differenziale misto di Beltrami; e questa relazione esprime appunto l' ortogonalità dei due sistemi considerati.

(2) Nota citata, n. 5.

e dalla seconda si passa alla prima colla sostituzione

$$a' = a + \frac{\pi}{2}\,, \quad b' = -b$$

In conclusione si ha: *Le condizioni, affinchè nel movimento di un punto su una superficie le ∞^2 traiettorie corrispondenti ad un medesimo valore della costante delle forze vive si possano distribuire in sistemi ortogonali, sono che la costante delle forze vive sia nulla (tolto il caso che il movimento avvenga su una sviluppabile con forze nulle), e la funzione potenziale soddisfi all' equazione*

$$\varDelta_2 \lg U = 2K\,;$$

le traiettorie si ottengono allora con due sole quadrature, ed i sistemi ortogonali a cui danno luogo sono isotermi.

Matematica. — *Contributo alla teoria degli insiemi.* Nota del prof. Ettore Bortolotti, presentata dal Socio U. Dini.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Alcune esperienze sull'arco cantante di Duddel.* Nota di M. Ascoli e R. Manzetti, presentata dal Socio Blaserna.

Il Janet [1] ha proposto recentemente lo schema dell'arco cantante di Duddel, come un metodo per la determinazione dei piccoli coefficienti di autoinduzione. Se nel circuito derivato sull'arco e contenente la capacità e l'autoinduzione è noto il valore della capacità, dell'intensità di corrente, e della differenza di potenziale agli estremi dell'autoinduzione e se si ammette la condizione di risonanza si ha

$$L = C\,\frac{E^2}{I^2}\,.$$

Ci siamo occupati di esaminare entro quali condizioni questo metodo potesse essere adottato nella pratica; ed avendo osservato delle divergenze troppo forti fra i valori veri di L e quelli misurati con questo metodo, ne abbiamo ricercato le ragioni.

Una prima quistione che si presenta in queste misure è quella degli istrumenti da adoperarsi per misurare l'intensità di corrente e la differenza di potenziali. Nel solito schema di Peuckert [2] si posero in serie un con-

(1) Comptes Rendus, 1902.

(2) E. T. Z. 1901.