# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIX.

1902

SERIE QUINTA

## RENDICONTI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

**VOLUME XI.**

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1902

Matematica. — *Sugli spazî a quattro dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti.* Nota di GUIDO FUBINI, presentata dal Socio L. BIANCHI.

Questa Nota riassume una parte dei risultati di una Memoria di prossima pubblicazione, che fa seguito a un'altra (1) sulla teoria generale degli spazî a un numero qualsiasi di dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti e sulla loro determinazione.

In questa io ho dato il metodo generale che serve a trovare per quadrature tutti questi spazî: metodo che permette di ritrovare rapidamente gli spazî a tre dimensioni, già determinati dal prof. Bianchi, che ammettono un gruppo di movimenti. Non è però più così quando si passa a un numero maggiore di dimensioni: i calcoli infatti a tale scopo che la Memoria citata indica da eseguire risultano troppo lunghi per potere essere effettivamente eseguiti. In questa Nota io indicherò sommariamente come si debba procedere per gli spazî a quattro dimensioni. Si comincia, secondo il metodo generale, a trovare prima i gruppi di movimenti per poi dedurne gli spazî relativi; e anzitutto si cerca di avere « a priori » qualche proprietà generale di questi gruppi. Si escludono dalla ricerca come casi senza interesse i gruppi con meno di quattro trasformazioni linearmente indipendenti, che (com'è del resto evidente) i miei teoremi generali dimostrano potersi già considerare come gruppi di movimenti di uno spazio a meno di quattro dimensioni e che quindi sono gruppi riducibili ai casi già studiati dal prof. Bianchi (2).

Così pure è inutile trattare i gruppi transitivi a quattro parametri (che del resto ho già studiato nella Memoria citata), perchè noi sappiamo già da teoremi generali che essi si possono considerare sempre come gruppi di movimenti. Possiamo pure prescindere dai gruppi a 10 parametri, che corrispondono agli $S_4$ a curvatura costante.

Ciò può già servire a circoscrivere di molto la ricerca.

Ma i due teoremi fondamentali che servono a trovare tutti gli altri gruppi sono i seguenti:

I. *Non esiste alcun gruppo* $G_9$ (3) *che si possa considerare come gruppo di movimenti di un* $S_4$ (4).

(1) Quest'ultima Memoria si sta ora pubblicando negli Annali di Matematica.

(2) Bianchi, *Sugli spazi a tre dimensioni* ecc. Memorie della Società Italiana delle Scienze (serie III, tomo 11, pag. 27). Cfr. anche la mia Mem. citata.

(3) Con $G_r$ indico un gruppo a $r$ parametri.

(4) Per vedere bene il significato di questo teorema, cfr. la mia Mem. citata (§ 8).

II. *Se un gruppo* $G_r$ $(r = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$ *si può considerare come gruppo di movimenti di uno spazio a quattro dimensioni, esso contiene certamente un sottogruppo* $G_{r-1}$.

Questi due teoremi si possono stabilire « a priori »; e la loro conoscenza dà poi una grande rapidità alla ricerca. Noi sappiamo da essi che basterà restringerci allo studio di quei gruppi a 5, 6, 7, 8 parametri su quattro variabili, che ammettono rispettivamente qualche sottogruppo a 4, 5, 6, 7 parametri. Questo teorema si può poi generalizzare anche nel caso di spazî a più che quattro dimensioni e ci darà sempre l'ordine di qualche sottogruppo contenuto nei gruppi da determinare.

Nel caso particolare di spazî a quattro dimensioni la ricerca si presenta con questo metodo abbastanza semplice, e può servire come esempio del metodo da seguire negli altri casi. Siccome ogni $G_r$ del nostro tipo contiene come sottogruppo un $G_{r-1}$, che naturalmente si potrà anch'esso considerare come gruppo di movimenti (totale o parziale) di uno spazio a quattro dimensioni, noi dovremo dapprima ricercare tutte le composizioni dei gruppi a 5 parametri, che contengono un sottogruppo a 4 parametri che si possa considerare come gruppo di movimenti di uno spazio a 4 dimensioni, cioè che appartenga a uno dei tipi di $G_4$ già determinati dal prof. Bianchi, o che sia transitivo.

La ricerca si semplifica molto trascurando quelli di questi gruppi che contengono un sottogruppo $G_4$ a trasformazioni permutabili, perchè gli $S_4$ che ammettono un tale gruppo $G_4$ di movimenti sono a curvatura nulla (1).

Dalla composizione di uno di questi $G_5$ si passa facilmente alla forma esplicita delle sue trasformazioni infinitesime, perchè noi conosciamo già le trasformazioni infinitesime di un suo sottogruppo $G_4$; e noi possiamo senz'altro trascurare (2) quelli che avessero due trasformazioni infinitesime dipendenti. Di più noi possiamo prima trovare quei $G_5$ che contengono un sottogruppo $G_4$ transitivo, ma che non contengono inoltre un $G_4$ intransitivo, e determinare poi separatamente quei $G_5$ che contengono un sottogruppo $G_4$ intransitivo che si possa considerare come gruppo di movimenti. Con questi e altri mezzi la ricerca si semplifica assai. Valendoci poi dei criterî generali dati nella mia Memoria citata, si esamina quali dei $G_5$ così ottenuti è un gruppo di movimenti.

Con metodo analogo si trovano i $G_6$ che contengono uno di questi $G_5$ come sottogruppo e che si possono ancora considerare essi stessi come gruppo di movimenti e così via. I risultati che si ottengono sono i seguenti:

« *Nessun gruppo a 8 parametri si può considerare come gruppo di movimenti di uno spazio a 4 dimensioni* ».

(1) Bianchi, loc. cit.
(2) Bianchi, loc. cit.

*Uno spazio a n dimensioni non può ammettere alcun gruppo di movimenti a* « $\frac{n(n+1)}{2}-1$ » *o a* « $\frac{n(n+1)}{2}-2$ » *parametri.*

*Oltre ai gruppi già citati, vi sono soltanto i seguenti spazi a quattro dimensioni, che ammettono un gruppo continuo di movimenti:*

$$\text{I.}\quad ds^2=dx_4^2+\frac{1}{4n_1}e^{-4x_4}dx_1^2+p_{22}e^{-2x_4}dx_2^2-2l_3p_{22}e^{-2x_4}dx_1dx_2-$$
$$-2l_3p_{22}x_1e^{-2x_4}dx_1dx_3+2x_1p_{22}e^{-2x_4}dx_2dx_3+(x_1^2p_{22}e^{-2x_4}-n_1p_{22}e^{2x_4})dx_3^2$$

che ammette il gruppo generato dalle:

$$\frac{\partial}{\partial x_2};\frac{\partial}{\partial x_3};-\frac{\partial}{\partial x_1}+x_3\frac{\partial}{\partial x_2};-2x_1\frac{\partial}{\partial x_1}-(l_3x_1+x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}+x_3\frac{\partial}{\partial x_3}-\frac{\partial}{\partial x_4}$$
$$(x_1^2+n_1e^{4x_4})\frac{\partial}{\partial x_1}+(l_3x_1^2+l_3n_1e^{4x_4})\frac{\partial}{\partial x_2}+(x_2-l_3x_1)\frac{\partial}{\partial x_3}+x_1\frac{\partial}{\partial x_4}$$

dove la $l_3$, la $n_1$, e la $p_{22}$ sono costanti.

$$\text{II.}\quad ds^2=dx_4^2+p_{11}e^{2x_4}dx_1^2+2p_{12}e^{x_4}dx_1dx_2+2p_{13}e^{x_4}dx_1dx_3+$$
$$+p_{22}dx_2^2+2p_{23}dx_2dx_3+p_{33}dx_3^2$$

che ammette il gruppo generato dalle

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(i=1,2,3);x_1\frac{\partial}{\partial x_1}-\frac{\partial}{\partial x_4};(x_1^2-\pi_{11}e^{-2x_4})\frac{\partial}{\partial x_1}-2\pi_{12}e^{-x_4}\frac{\partial}{\partial x_2}-$$
$$-2\pi_{13}e^{-x_4}\frac{\partial}{\partial x_3}-2x_1\frac{\partial}{\partial x_4}$$

dove le $p_{ik}$ sono costanti, e le $\pi_{ik}$ sono i complementi algebrici di $p_{ik}$ in $|p_{ik}|$ divisi per il determinante $|p_{ik}|$.

$$\text{III.}\quad ds^2=dx_4^2+e^{2\lambda x_4}dx_1^2+\mu e^{4\lambda x_4}dx_2^2+2\mu x_1e^{4\lambda x_4}dx_2dx_3+$$
$$+(\mu x_1^2e^{4\lambda x_4}+e^{2\lambda x_4})dx_3^2$$

dove $\lambda$, $\mu$ sono costanti, che ammette il gruppo

$$\frac{\partial}{\partial x_2};\frac{\partial}{\partial x_3};\lambda x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+2\lambda x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\lambda x_3\frac{\partial}{\partial x_3}-\frac{\partial}{\partial x_4};\frac{\partial}{\partial x_1}-$$
$$-x_3\frac{\partial}{\partial x_2};x_3\frac{\partial}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial}{\partial x_3}$$

IV. Gli elementi lineari (dove con $\lambda, n, l$ indichiamo delle costanti),
$$ds^2=dx_4^2+\varphi\,dx_1^2+\psi\,dx_3^2+e^{2x_1}[(1-n^2)\varphi+\psi n^2]dx_2^2+2n\psi e^{x_1}dx_2dx_3$$
dove è rispettivamente $\varphi=\text{cost.}$, $\psi=\text{cost.}$ oppure $\varphi=\text{cost.}$, $\psi=\text{cost.}\ e^{2\lambda x_4}$

oppure $n=0$, $\varphi = \text{cost.}$, $\psi = \dfrac{\cosh^2(l_3\,\lambda_{25}\,x_4 + \text{cost.})}{l_3^2}$ oppure $\varphi = \text{cost.}$, $n=0$, $\psi = -\left(\dfrac{1}{\lambda_{25}\,x_4 + n_3}\right)^2$ ammettono pure dei $G_5$. Questi $G_5$ contengono tutti il $G_4$ generato dalle:

$$-x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{x_2^2}{2}\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{n}{1-n^2}e^{-x_1}\frac{\partial}{\partial x_3}\,;\, -\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2}\,;\,\frac{\partial}{\partial x_2}\,;\,\frac{\partial}{\partial x_3}\,.$$

La quinta trasformazione del corrispondente $G_5$ è rispettivamente

$$\frac{\partial}{\partial x_4}\,;\,\lambda x_3\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_4}\,;\, e^{\lambda_{25}x_3}\left[l_3 \operatorname{tangh}(l_3\,\lambda_{25}\,x_4 + \text{cost.})\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_4}\right];$$

$$e^{\lambda_{25}x_3}\left[\frac{1}{\lambda_{25}\,x_4 + n_3}\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_4}\right]$$

V. Quattro elementi lineari riducibili ai precedenti per via immaginaria.

VI. $$ds^2 = dx_4^2 + \varphi dx_1^2 + \psi dx_3^2 + \varphi e^{2x_1}\,dx_2^2$$

dove $\varphi$, $\psi$ sono costanti non nulle. Esso è un caso particolare di uno degli spazî IV e oltre al corrispondente $G_5$ ammette la

$$x_4\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_4}$$

VII. Lo stesso elemento lineare che al secondo tipo del caso IV, dove però $\psi = -\dfrac{1}{2\lambda n_3}e^{2\lambda x_4}$. Esso ammette anche la:

$$\left(\lambda\frac{x_3^2}{2} + n_3\,e^{-2\mu x_4}\right)\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_4}$$

VIII. $$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + e^{2x_2}(dx_3^2 + dx_4^2)\,.$$

Esso ammette il $G_7$ generato dalla $\dfrac{\partial}{\partial x_1}$ e dal $G_6$ (intransitivo) che trasforma in sè la forma quadratica a curvatura costante

$$dx_2^2 + e^{2x_2}(dx_3^2 + dx_4^2)\quad (^1).$$

Nella Memoria qui in parte riassunta studio poi quale è il gruppo totale effettivo a cui appartengono gli $S_4$ già determinati per valori generici delle costanti di integrazione e particolarmente il caso più difficile degli $S_4$ che ammettono un $G_4$ transitivo: e si ottiene con una discussione piuttosto difficile (perchè al calcolo effettivo non si può in alcuni casi certo ricorrere)

(1) Vi è poi un altro spazio riducibile a questo per via immaginaria.

che vi sono soltanto i seguenti $G_4$ transitivi tali che tutti gli spazî che ammettono uno di essi ammettono un gruppo più ampio e cioè il $G_4$ generato dalle

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \, (i = 1\,,2\,,3\,,4),$$

i cui spazî corrispondenti sono euclidei e il gruppo generato dalle

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \, (i = 1\,,2\,,3)\,, \quad x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_4}.$$

i cui spazî corrispondenti (indicando con le « $h$ » delle costanti)

$$ds^2 = dx_4^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + 2h_{12}\, dx_1\, dx_2 + 2x_4\, dx_2\, dx_3 + \\ + 2(h_{12}\, x_4 + h_{13})\, dx_1\, dx_3 + (x_4^2 + h_{33})\, dx_3^2$$

ammettono anche la

$$h_{13}\, x_4 \frac{\partial}{\partial x_1} + \left[\left(\frac{1 - h_{12}^2}{2}\, x_4^2 - h_{12}\, h_{13}\, x_4\right) - \mathrm{H}\, \frac{x_3^2}{2}\right] \frac{\partial}{\partial x_2} - \\ - (1 - h_{12}^2)\, x_4 \frac{\partial}{\partial x_3} + \mathrm{H}\, x_3 \frac{\partial}{\partial x_4}$$

dove $\mathrm{H} = h_{33} - h_{33}\, h_{12}^2 - h_{13}^2$ è il discriminante (non nullo) della forma.

**Chimica.** — *Su di un probabile nuovo ossido dell' azoto.* Nota preliminare del dott. DEMETRIO HELBIG, presentata dal Socio S. CANNIZZARO.

Facendo passare una serie di scariche elettriche attraverso l'aria liquida, ho ottenuto la formazione d' una sostanza solida a quella temperatura, fioccosa, di colore verdastro.

Questo corpo è estremamente instabile. Anche a temperatura assai bassa si decompone, sviluppando vapori rutilanti. La scomposizione, in certi casi, si fa con esplosione, accompagnata da fenomeno luminoso.

Tanto le condizioni in cui il corpo si forma, quanto i suoi caratteri, dimostrano essere quella sostanza un ossido dell' azoto: ossido, le cui proprietà differiscono da quelle di tutte le combinazioni dell' azoto con l' ossigeno finora ben conosciute.

Mi riservo di riferire fra breve circa il risultato delle indagini in corso, tendenti a determinare la composizione di questa sostanza, e di esporre più estesamente le condizioni sperimentali richieste per la sua preparazione.