ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCC.

1903

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1903

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 15 febbraio 1903.

P. VILLARI, Presidente.

Matematica. — *Sulla trasformazione delle equazioni differenziali di Hamilton.* Nota I del Corrispondente G. MORERA.

La trasformazione di un sistema di equazioni differenziali Hamiltoniane in un altro simile sistema fu ampiamente e profondamente trattata da Sophus Lie nella Memoria intitolata: *Die Störungstheorie und die Berührungstransformationen*, inserita nel secondo volume dell'Archiv for Mathematik og Naturvidenskab (Kristiania, 1877).

La trattazione di tale argomento acquista notevolmente in *generalità*, semplicità ed eleganza quando a base di essa si ponga la considerazione del *covariante bilineare* di una certa espressione differenziale, come mi propongo di mostrare in questo scritto (¹).

1. Consideriamo l'espressione differenziale:

$$\mathrm{E}_d = q_1\,dp_1 + q_2\,dp_2 + \cdots + q_n\,dp_n + \mathrm{U}dt\,, \tag{I}$$

ove: q_1, p_1 ; q_2, p_2 ; ... ; q_n, p_n e t designano $2n+1$ variabili indipendenti ed U una data funzione di esse.

Formiamo il covariante bilineare di tale espressione:

$$\delta\mathrm{E}_d - d\mathrm{E}_\delta = \sum_{i=1}^{n} (\delta q_i\,dp_i - dq_i\,\delta p_i) + \delta\mathrm{U}dt - d\mathrm{U}\delta t$$

(¹) Una completa esposizione dei risultati fin qui ottenuti nella teoria delle perturbazioni si trova nella bella monografia del sig. E. O. Lovett, pubblicata nel tomo XXX del Quarterly Journal of mathematics (pp. 47-149): *The theory of perturbations and Lie's Theory of contact Transformations.*

ed eguagliamo a zero i coefficienti delle δp_i, δq_i e δt; avremo il sistema di equazioni differenziali:

$$\text{(II)} \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial q_i}\,;\ \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial U}{\partial p_i} \qquad (i = 1\,, 2 \ldots n)\,;$$
$$0 = \sum_i \left(\frac{\partial U}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial U}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} \right),$$

delle quali l'ultima è una conseguenza delle $2n$ precedenti.

Adunque *il sistema Hamiltoniano* (II) *è il primo sistema di Pfaff dell'espressione differenziale* (I) *e com'è noto esso è invariantivamente congiunto con tal espressione differenziale* (1).

Si noti che *se due espressioni differenziali nelle stesse variabili indipendenti hanno i covarianti bilineari identici non possono differire che per un differenziale esatto*, sicchè dato il sistema Hamiltoniano (II) non è determinata un' unica espressione differenziale invariantivamente con esso congiunta, ma infinite che differiscono fra loro per differenziali esatti.

2. Se l'espressione differenziale (I) si riduce alla forma canonica di Pfaff:

$$E_d = \sum_i Q_i\, dP_i + d\Phi\,,$$

il sistema (II) diviene:

$$dP_i = dQ_i = 0$$

sicchè le P_i, Q_i sono gli integrali del sistema Hamiltoniano.

Inoltre ridurre alla forma canonica Pfaffiana la espressione differenziale E_d equivale, secondo il metodo d' integrazione di Pfaff, a trovare un integrale completo dell'equazione alle derivate parziali di Hamilton-Jacobi:

$$\text{(III)} \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = U\left(p_1\,, p_2\,, \ldots p_n\,;\ \frac{\partial f}{\partial p_1}\,\frac{\partial f}{\partial p_2} \cdots \frac{\partial f}{\partial p_n}\,;\ t\right).$$

Riassumendo possiamo enunciare il *teorema fondamentale* seguente.

Il sistema Hamiltoniano:

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial q_i}\,,\ \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial U}{\partial p_i}$$

è il primo sistema di Pfaff dell'espressione differenziale:

$$\sum_i q_i\, dp_i + U dt\,.$$

L'integrazione del sistema Hamiltoniano equivale al ridurre alla forma canonica di Pfaff la espressione differenziale precedente, ossia ad

(1) Cfr. Darboux, *Sur le problème de Pfaff*, Paris Gauthier-Villars 1882, p. 7.

integrare completamente l'equazione a derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\mathrm{U}\left(p_1\,,p_2\,,\ldots p_n\,;\ \frac{\partial f}{\partial p_1}\,,\frac{\partial f}{\partial p_2}\ldots,\ \frac{\partial f}{\partial p_n}\,;\,t\right).$$

3. Data un'espressione differenziale della classe $2n+1$:

$$\text{(IV)}\qquad \mathrm{X}_0\,dx_0+\sum_{j=1}^{2n}\mathrm{X}_j\,dx_j\,,$$

ove X indicano delle funzioni delle x, posto:

$$(i\,,k)=\frac{\partial \mathrm{X}_i}{\partial x_k}-\frac{\partial \mathrm{X}_k}{\partial x_i}\qquad (i\,,k=0\,,1\,,2\ldots n),$$

nel determinante del covariante bilineare non possono essere nulli tutti i sottodeterminanti del 1° ordine (grado $2n$) e per conseguenza, giusta un noto teorema di Frobenius [1], non possono svanire tutti i sottodeterminanti principali del grado $2n$. Supponiamo che non sia nullo il sottodeterminante principale

$$\begin{vmatrix} (1\,,1) & (1\,,2) & \ldots (1\,,2n) \\ (2\,,1) & (2\,,2) & \ldots (2\,,2n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (2n\,,1) & (2n\,,2) & \ldots (2n\,,2n) \end{vmatrix}.$$

Allora l'espressione differenziale $\sum_{j=1}^{2n}\mathrm{X}_j\,dx_j$, ove si considerano come variabili le sole $x_1\,,x_2\ldots x_{2n}$, è della classe $2n$, e quindi riducibile alla forma canonica di Pfaff:

$$q_1\,dp_1+q_2\,dp_2+\cdots+q_n\,dp_n\,;$$

ma se si considera variabile anche la x_0, che ora sostituiremo colla lettera t, avremo identicamente:

$$\mathrm{X}_0\,dt+\sum_{j=1}^{2n}\mathrm{X}_j\,dx_j=\sum_{i=1}^{n}q_i\,dp_i+\mathrm{U}dt\,,$$

ove

$$\mathrm{U}\equiv\mathrm{X}_0+\sum_{j=1}^{2n}\mathrm{X}_j\frac{\partial x_j}{\partial t}\,.$$

Il primo sistema di Pfaff dell'ultima espressione differenziale è un

[1] Crelle's Journal, t. 82, pag. 244. Cfr. la mia Nota: *Sulle proprietà invariantive del sistema di una forma lineare e di una bilineare alternata,* Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. XVIII (1883).

sistema Hamiltoniano: tale sistema Hamiltoniano è il trasformato del 1° sistema di Pfaff della (IV).

Reciprocamente se nella (I) alle p_i, q_i, t sostituiamo delle funzioni fra loro indipendenti di nuove variabili $x_0 \dots x_{2n}$, essa assume la forma (IV) e per conseguenza il sistema Hamiltoniano (II) si trasforma nel 1° sistema di Pfaff di (IV), che è:

$$(i\,,0)\,dx_0 + (i\,,1)\,dx_1 + (i\,,2)\,dx_2 + \cdots + (i\,,2n)\,dx_{2n} = 0$$
$$(i = 0\,,1\,,2 \dots 2n)\,,$$

il quale comprende $2n$ equazioni differenziali fra loro indipendenti.

4. Il più generale cambiamento di variabili che converte un sistema Hamiltoniano (II) in un altro simile sistema è adunque quello che converte l'espressione differenziale:

$$\sum_{i=1}^{n} q_i\,dp_i + \mathrm{U}dt$$

in un'altra del tipo

$$d\Omega + \sum_{i=1}^{n} q_i^\star\,dp_i^\star + \mathrm{U}^\star\,dt^\star\,,$$

ove Ω indica una funzione qualunque delle nuove variabili indipendenti $p_i^\star$, $q_i^\star$, $t^\star$ ed $\mathrm{U}^\star$ una funzione delle variabili stesse.

Ci proponiamo anzitutto di trovare il più generale cambiamento delle sole variabili p_i e q_i (ma non della t) che soddisfa alla condizione voluta.

Secondo quanto precede, un simile cambiamento *è una trasformazione tra due sistemi di variabili indipendenti*:

$$(p_i\,,q_i)\ ;\ (p_i^\star\,,q_i^\star)\,,$$

la quale dipende anche dal parametro t, *ed è tale che, riguardando questo come costante, si abbia identicamente*:

$$\sum_i q_i\,dp_i - \sum_i q_i^\star\,dp_i^\star = d\Omega\,.$$

Se a ciascun sistema di variabili si aggiunge una nuova variabile indipendente: z e $z^\star$, e si pone la relazione:

$$z = \Omega + z^\star\,,$$

tra *i due sistemi di variabili si ha una trasformazione di contatto, dipendente dal parametro* t.

Una cosiffatta trasformazione si trova subito nella sua forma più generale col procedimento seguente. Si assuma per Ω una funzione qualunque delle p_i, $p_i^\star$, t e si stabilisca a piacere nessuna, oppure una, od anche più equazioni fra le sole p_i, $p_i^\star$ e t, in guisa però che tra esse non sia possibile eliminare nè le p_i, nè le $p_i^\star$. Si trovino di poi le relazioni ancora occorrente a definire la trasformazione con quel procedimento col quale nella meccanica analitica le condizioni di equilibrio d' un sistema vincolato si deducono dall' equazione dei lavori virtuali, quando i vincoli sono espressi da equazioni finite tra i parametri di posizione ed il tempo, e cioè col classico *metodo dei moltiplicatori di Lagrange*.

Stabilite adunque le equazioni:

$$(\mathrm{V}) \qquad \Omega_\nu(p_1 \dots p_n\,;\, p_1^\star \dots p_n^\star\,;\, t) = 0 \qquad (\nu = 1\,, 2 \dots q)$$

ove $q \leqq n$, essendo le Ω_ν delle funzioni fra loro indipendenti, sia rapporto alle p_i, sia rapporto alle $p_i^\star$, alle precedenti equazioni si aggiungano quelle $2n - \nu$ altre che risultano per eliminazione dei moltiplicatori λ fra le equazioni seguenti:

$$(\mathrm{VI}) \qquad \left\{ \begin{aligned} q_i &= \frac{\partial \Omega}{\partial p_i} + \sum_\nu \lambda_\nu \frac{\partial \Omega_\nu}{\partial p_i} \\ q_i^\star &= \frac{\partial \Omega}{\partial p_i^\star} + \sum_\nu \lambda_\nu \frac{\partial \Omega_\nu}{\partial p_i^\star} \end{aligned} \right. \qquad (i = 1\,, 2 \dots n).$$

Colla teoria dei determinanti funzionali è facile indicare quella limitazione cui vanno assoggettate le Ω affinchè le equazioni (V) e (VI) sieno risolvibili tanto rispetto alle λ_ν, p_i, q_i quanto rispetto alle λ_ν, $p_i^\star$, $q_i^\star$ ossia *definiscano la trasformazione cercata.*

Posto:

$$\mathrm{W} \equiv \Omega + \lambda_1\, \Omega_1 + \cdots + \lambda_q\, \Omega_q\,,$$

detta limitazione è che a cagione delle (V) non sia identicamente nullo il seguente determinante, che è una funzione intera del grado $n - q$ nelle λ:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Omega_1}{\partial p_1} & \frac{\partial \Omega_1}{\partial p_2} \dots\dots & \frac{\partial \Omega_1}{\partial p_n} & 0 & 0 \dots\dots & 0 \\ \frac{\partial \Omega_2}{\partial p_1} & \frac{\partial \Omega_2}{\partial p_2} \dots\dots & \frac{\partial \Omega_2}{\partial p_n} & 0 & 0 \dots\dots & 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{\partial \Omega_q}{\partial p_1} & \frac{\partial \Omega_q}{\partial p_2} \dots\dots & \frac{\partial \Omega_q}{\partial p_n} & 0 & 0 \dots\dots & 0 \\ \frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial p_1^\star\, \partial p_1} & \frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial p_1^\star\, \partial p_2} \dots & \frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial p_1^\star\, \partial p_n} & \frac{\partial \Omega_1}{\partial p_1^\star} & \frac{\partial \Omega_2}{\partial p_1^\star} \dots & \frac{\partial \Omega_q}{\partial p_1^\star} \\ \frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial p_2^\star\, \partial p_1} & \frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial p_2^\star\, \partial p_2} \dots & \frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial p_2^\star\, \partial p_n} & \frac{\partial \Omega_1}{\partial p_2^\star} & \frac{\partial \Omega_2}{\partial p_2^\star} \dots & \frac{\partial \Omega_q}{\partial p_2^\star} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial p_n^\star\, \partial p_1} & \frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial p_n^\star\, \partial p_2} \dots & \frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial p_n^\star\, \partial p_n} & \frac{\partial \Omega_1}{\partial p_n^\star} & \frac{\partial \Omega_2}{\partial p_n^\star} \dots & \frac{\partial \Omega_q}{\partial p_n^\star} \end{vmatrix}$$

[Cfr. Lie-Engel, *Theorie der Transformationsgruppen*, II Absch., Cap. 6, Abth. I].

Si ponga:

$$V = \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \sum_\nu \lambda_\nu \frac{\partial \Omega_\nu}{\partial t}$$

e si immaginino comunque eliminate da questa equazione le λ per mezzo delle (VI). Avremo identicamente:

$$\sum_i q_i \, dp_i - \sum_i q_i^\star \, dp_i^\star + V \, dt = d\Omega .$$

Si noti che una volta ottenute le espressioni delle p_i e q_i nelle $p_i^\star$, $q_i^\star$ e t, dette $\Omega^\star$ e $V^\star$ le trasformate in queste variabili di Ω e V, avremo:

$$V^\star \equiv \frac{\partial \Omega^\star}{\partial t} - \sum_i q_i \frac{\partial p_i}{\partial t} .$$

Adunque colla trasformazione trovata abbiamo per identità:

$$\text{(VII)} \qquad \sum_t q_i \, dp_i + U \, dt = d\Omega + \sum_i q_i^\star \, dp_i^\star + (U^\star - V^\star) \, dt ,$$

ove $U^\star$ indica la trasformata di U nelle $p_i^\star$, $q_i^\star$ e t.

In particolare se $\nu = 0$, come condizioni di risolvibilità delle (VI), abbiamo che non sia identicamente nullo il determinante funzionale:

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial \Omega}{\partial p_1^\star}, \frac{\partial \Omega}{\partial p_2^\star} \dots \frac{\partial \Omega}{\partial p_n^\star} \right)}{\partial (p_1 \, p_2 \dots p_n)} ;$$

le (VI) divengono:

$$q_i = \frac{\partial \Omega}{\partial p_i} ; \; -q_i^\star = \frac{\partial \Omega}{\partial p_i^\star} ;$$

e la espressione della V diviene:

$$V = \frac{\partial \Omega}{\partial t} .$$

Per V si può assumere una funzione arbitrariamente data delle primitive variabili p_i, q_i, t: *allora è da assumersi per la* Ω *un integrale completo dell'equazione alle derivate parziali*:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = V \left(p_1, \dots, p_n ; \frac{\partial V}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial p_n} ; t \right)$$

colle costanti arbitrarie non aggiunte:

$$p_1^\star, p_2^\star \dots p_n^\star .$$

In ogni caso per la (VII) *posto*:

$$H^* = U^* - V^*$$

il trasformato del sistema Hamiloniano (II) *sarà*:

$$\frac{\partial p_i^*}{\partial t} = -\frac{\partial H^*}{\partial q_i^*}\ ;\ \frac{\partial q_i^*}{\partial t} = \frac{\partial H^*}{\partial p_i}.$$

Sulla indicata trasformazione particolare si basa la ordinaria teoria delle perturbazioni.

5. Per trovare la trasformazione più generale che converte il sistema Hamiltoniano (II) in un altro sistema Hamiltoniano:

$$\frac{dp_i^*}{\partial t^*} = \frac{\partial U^*}{\partial q_i}\ ;\ \frac{\partial q_i^*}{\partial t^*} = \frac{\partial U^*}{\partial p_i^*},$$

si consideri la più generale trasformazione tra i due sistemi di *variabili indipendenti*:

$$(p_1\ ,q_1\ ;p_2\ ,q_2\ ;\dots;p_n\ ,q_n\ ;t\ ,u),$$
$$(p_1^*,q_1^*;p_2^*,q_2^*;\dots;p_n^*,q_n^*;t^*,u^*)$$

che dà luogo ad una identità della forma:

$$\text{(VIII)}\qquad \sum_i q_i\, dp_i + u dt = d\Omega + \sum_i q_i^*\, dp_i^* + u^*\, dt^*.$$

Pongasi una qualunque relazione fra le variabili del primo sistema:

$$\text{(IX)}\qquad u - U(p_1 \dots p_n\,;\, q_1 \dots q_n\,;\, t) = 0.$$

Per la trasformazione considerata questa relazione si convertirà in una relazione:

$$F(p_1^*, q_1^*;\dots;p_n^*, q_n^*;t^*, u^*) = 0.$$

che non può essere identica. Supponiamo che F contenga u^*: questa supposizione in fondo *non è restrittiva* giacchè la coppia di variabili coniugate t^*, u^* è una qualunque delle coppie delle nuove variabili ed inoltre è sempre lecito di porre: invece della Ω la $\Omega_1 = \Omega + t^* u^*$, invece di t^* e u^* rispettivamente $t_1^* = \quad u^*$, $u_1^* = t^*$. Allora la equazione precedente si potrà risolvere rispetto alla u^*, e cioè porre sotto la forma:

$$u^* - U^*(q_1^* \dots p_n^*\,;\, q_1^* \dots q_n^*\,;\, t^*) = 0\,;$$

sicchè dalle espressioni delle primitive variabili p_i, q_i e t nelle nuove si potrà eliminare la variabile ausiliaria u^*, e così pure dalle formule che dànno la trasformazione inversa si potrà eliminare la u. Siccome poi nella identità (VIII) non compariscono nè du nè du^*, col sostituire ad u la funzione

U e ad $u^\star$ la $U^\star$ non si muterà la forma dell' identità stessa. Dunque *avremo identicamente*:

$$\sum_i q_i\, dp_i + U dt = d\Omega + \sum_i q_i{}^\star\, dp_i{}^\star + U^\star\, dt^\star \,;$$

così la trasformazione richiesta è trovata.

Per esempio, scelta comunque la Ω:

$$\Omega \equiv \Omega(p_1\,, p_2 \dots p_n\ ;\ p_1{}^\star\,, p_2{}^\star \dots p_n{}^\star\ ;\ t\,, t^\star)\,,$$

si assumano $n+1$ relazioni della forma:

$$\Omega_\nu(p_1 \dots p_n\ ;\ p_1{}^\star \dots p_n{}^\star\ ;\ t\,, t^\star) = 0 \qquad (\nu = 0\,, 1\,, 2 \dots n)$$

che soddisfacciano alla condizione di essere risolvibili tanto rispetto alle $p_1\,, \dots p_n\,, t$, quanto rispetto alle $p_1{}^\star\,, \dots p_n{}^\star\,, t^\star$. La trasformazione cercata è definita dalle $n+1$ precedenti equazioni e da quelle altre $n+1$ che si ottengono eliminando i moltiplicatori λ fra le $2(n+1)$ equazioni seguenti:

$$\left\{\begin{aligned} q_i + \sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu \frac{\partial \Omega_\nu}{\partial p_i} &= \frac{\partial \Omega}{\partial p_i}\,, \qquad (i = 1\,, 2 \dots n)\,; \\ u + \sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu \frac{\partial \Omega_\nu}{\partial t} &= \frac{\partial \Omega}{\partial t}\,, \\ -q_i{}^\star + \sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu \frac{\partial \Omega_\nu}{\partial p_i{}^\star} &= \frac{\partial \Omega}{\partial p_i{}^\star}\,, \qquad (i = 1\,, 2 \dots n)\,; \\ -u^\star + \sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu \frac{\partial \Omega_\nu}{\partial t^\star} &= \frac{\partial \Omega}{\partial t^\star}\,. \end{aligned}\right.$$

Per una trasformazione cosiffatta la (IX) si converte in un' equazione che non può contenere le sole $p_1{}^\star \dots p_n{}^\star\,, t$. Senza scapito della generalità possiamo adunque ritenere che la trasformata della (IX) contenga la $u^\star$.

6. Consideriamo un sistema qualunque di $2n$ equazioni differenziali del primo ordine fra $2n+1$ variabili:

$$\text{(X)} \qquad \frac{dx_0}{X_0} = \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} \dots = \frac{dx_{2n}}{X_{2n}}\,.$$

Ci proponiamo di esaminare se un tale sistema per trasformazione delle variabili x in altre y, fra loro indipendenti, sia riducibile alla forma canonica di Hamilton.

Secondo quanto precede bisogna cercare se esiste un' espressione differenziale:

$$Y_0\, dx_0 + Y_1\, dx_1 + \dots + Y_{2n}\, dx_{2n}\,,$$

della classe $2n+1$, il cui primo sistema di Pfaff coincide col sistema proposto: in altri termini, se è possibile determinare in funzione delle x le Y in guisa che posto:

$$(i\,,k)=\frac{\partial Y_i}{\partial x_k}-\frac{\partial Y_k}{\partial x_i}\qquad (i\,,k=0\,,1\,,2\ldots 2n)\,,$$

si abbia:

$$\text{(XI)}\qquad X_0(i\,,0)+X_1(i\,,1)+X_2(i\,,2)+\cdots+X_{2n}(i\,,2n)=0 \quad (i=0\,,1\,,2\ldots 2n)\,.$$

Ammesso possibile ciò, si riduca la espressione differenziale anzidetta alla forma (§ 3):

$$\sum_i q_i\,dp_i+U dt\,,$$

le equazioni differenziali (X) per introduzione delle nuove variabili indipendenti p_i, q_i e t assumeranno la forma Hamiltoniana (II).

Le (XI) non sono fra loro indipendenti, giacchè moltiplicata ordinatamente per $X_0 \ldots X_{2n}$ e sommate dànno luogo all' identità:

$$\sum_i \sum_k (i\,,k)\,X_i\,X_k=0\,;$$

sicchè, supposto per esempio $X_0 \neq 0$, la prima di esse è una conseguenza delle rimanenti $2n$.

Il sistema delle $2n$ equazioni, lineari, omogenee, alle derivate parziali del primo ordine (XI) ammette notoriamente infinite soluzioni. Scelta infatti ad arbitrio per es. la Y_0 fu dimostrato da Cauchy (Œuvres, S. I; t. VII, pag. 33) che le $Y_1 \ldots Y_{2n}$ si possono determinare in guisa da soddisfare alle $2n$ equazioni differenziali e da divenire uguali, per un particolare valore della variabile indipendente x_0, a funzioni arbitrariamente date delle $x_1\,, x_2 \ldots x_{2n}$: l' unica condizione che deve essere soddisfatta è che le funzioni considerate sieno funzioni analitiche regolari.

Del resto la stessa conclusione può trarsi ovviamente dalla nostra teoria invariantiva.

Integrate le (X) ed introdotte come nuove variabili invece delle $x_1 \ldots x_{2n}$ un sistema di $2n$ integrali indipendenti delle equazioni stesse:

$$y_i=y_i(x_0\,,x_1\ldots x_{2n})\qquad (i=1\,,2\ldots 2n)\,,$$

esse assumono la forma:

$$dx_0=\frac{dy_1}{0}=\frac{dy_2}{0}=\cdots=\frac{dy_{2n}}{0}\,,$$

e per conseguenza le (XI) divengono:

$$\frac{\partial Y_i}{\partial x_0}-\frac{\partial Y_0}{\partial y_i}=0\,.$$

La soluzione più generale di queste equazioni è:

$$Y_0 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_0}, \, Y_i = \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} + \eta_i,$$

ove Φ è una funzione arbitraria di tutte le variabili e le η_i sono funzioni arbitrarie delle sole: $y_1, y_2 \dots y_{2n}$. Per conseguenza le (X) costituiscono il primo sistema di Pfaff dell'espressione differenziale:

$$d\Phi + \sum_{i=1}^{2n} \eta_i \, dy_i,$$

nella quale si devono porre per le η_i delle funzioni delle y_i tali che non risulti nullo il determinante gobbo formato colle $\frac{\partial \eta_i}{\partial y_k} - \frac{\partial \eta_k}{\partial y_i}$, affinchè essa sia della classe $2n + 1$. Per esempio, basterebbe scegliere:

$$\eta_j = y_{n+j} \qquad \eta_{n+j} = 0 \qquad (j = 1, 2 \dots n).$$

Adunque si ha il *teorema* seguente che parmi più curioso che utile. *Qualsiasi sistema di* $2n$ *equazioni differenziali è sempre riducibile alla forma canonica di Hamilton.*

Chimica. — *Intorno all' olivile, la sua composizione e costituzione* (1). Nota del Socio G. Körner e del dott. L. Vanzetti.

L'olivile estratto dal Pelletier sin dal 1816 dalla gomma dell'olivo, di cui è il costituente principale, è stato più volte oggetto di studî chimici, specialmente per parte del compianto Sobrero, il quale lo sottopose ripetutamente all'analisi e gli attribuì la formula $C_{14} H_{18} O_5$.

Anche uno di noi, in unione al prof. Carnelutti (2), si era da tempo occupato di quella sostanza, ed in base a numerose analisi si credette poter attribuire all'olivile cristalizzato dall'acqua la formula: $C_{14} H_{18} O_6$ e a quello ottenuto da soluzione alcoolica l'altra: $C_{16} H_{22} O_6$, colle quali formule si accordava anche la composizione dei prodotti di trasformazione allora studiati. Alcuni fatti venuti successivamente alla luce ed in ispecie la determinazione quantitativa del ioduro metilico ottenibile scaldando l'olivile ed i suoi derivati con acido iodidrico, non si interpretavano felicemente colle predette for-

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della R. Scuola superiore di Agricoltura di Milano.

(2) Rendiconti del R. Istituto Lombardo Serie IIª, vol. XV, pag. 654.