ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCC.

1903

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XII.

1° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1903

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 1° marzo 1903.

P. BLASERNA, Vicepresidente.

Matematica. — *Sulla trasformazione delle equazioni differenziali di Hamilton.* Nota II del Corrispondente G. MORERA.

7. Secondo l'ultimo paragrafo (6) della mia precedente Nota [1] date $2n$ equazioni differenziali del primo ordine esistono infinite espressioni differenziali lineari fra loro differenti, e *non soltanto per differenziali esatti*, che ammettono quelle equazioni come primo sistema di Pfaff.

Adunque, osservando che un'espressione differenziale $\sum_{i=1}^{2n} \eta_i \, dy_i$, ove le η_i sono funzioni delle sole y_i, è sempre riducibile alla forma $\sum_{j=1}^{n} Y_j^* \, dy_j^*$, concludiamo che *qualsiasi sistema di* $2n$ *equazioni differenziali del primo ordine è il primo sistema di Pfaff di una espressione differenziale del tipo*:

$$\text{[I]} \qquad E_d \equiv \sum_{j=1}^{n} y_{n+j} \, dy_j + d\Phi$$

ove le y *sono un qualunque sistema di integrali indipendenti di dette equazioni differenziali.*

Consideriamo un sistema Hamiltoniano:

$$\text{[II]} \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} \; ; \; \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial U}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2 \ldots n),$$

e prendiamo per $y_1 \ldots y_n ; y_{n+1} \ldots y_{2n}$ quegli integrali che per un dato valore

[1] V. pag. 113.

iniziale t_0 della variabile indipendente t divengono rispettivamente uguali ai valori iniziali di $p_1, p_2 \dots p_n; q_1 \dots q_n$: allora si ha com'è noto [1]:

$$\sum_{j=1}^{n} y_{n+j}\, dy_j \equiv \mathrm{U}\, dt + \sum_{j=1}^{n} q_j\, dp_j + d\varphi ,$$

e cioè si trova per E_d quella forma che abbiamo appunto considerata nel § 1 della precedente Nota.

Ma se per le y si prendono degli integrali che per $t = t_0$ divengono uguali a funzioni qualunque ma fra loro indipendenti dei valori iniziali delle p e q, la forma della E_d *in generale* non sarà a priori nota, anzi la sua determinazione non si potrà fare senza integrazioni.

Esaminiamo più specialmente il caso in cui la U non dipenda da t. Si scelga un gruppo canonico cui appartenga U, che ora per simmetria scriveremo U_1; e un tal gruppo sia:

$$\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2 \dots \mathrm{U}_n; \mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2 \dots \mathrm{V}_n .$$

Allora gli integrali canonici di [II] sono [2]:

$$\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2 \dots \mathrm{U}_n; \mathrm{V}_1 - t, \mathrm{V}_2 \dots, \mathrm{V}_n$$

ed in [I] possiamo assumere:

$$y_1 = \mathrm{V}_1 - t; y_2 = f_2(\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2 \dots \mathrm{U}_n; \mathrm{V}_2 \dots \mathrm{V}_n); \dots$$
$$\dots\dots\dots\dots y_n = f_n(\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2 \dots \mathrm{U}_n; \mathrm{V}_2 \dots \mathrm{V}_n);$$
$$y_{n+j} = f_{n+j}(\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2 \dots \mathrm{U}_n; \mathrm{V}_1 - t; \mathrm{V}_2 \dots \mathrm{V}_n) \quad (j = 1, 2 \dots n),$$

ove le f sono funzioni arbitrarie dei rispettivi argomenti, soggette all'unica limitazione di essere indipendenti rispetto a $\mathrm{U}_1 \dots \mathrm{U}_n; \mathrm{V}_2 \dots \mathrm{V}_n$. Ciò posto la [I] diviene:

$$\mathrm{E}_d = \sum_{j=1}^{n} f_{n+j} \,.\, df_j - f_{n+1} \,.\, dt + d\Phi ,$$

ove per simmetria abbiam scritto f_1 invece di V_1; dunque la trasformazione:

$$p_1^{\star} = \mathrm{V}_1 \quad p_2^{\star} = f_2, \dots \qquad p_n^{\star} = f_n;$$
$$q_1^{\star} = f_{n+1}, q_2^{\star} = f_{n+2}, \dots \qquad q_n^{\star} = f_{2n},$$

[1] Cfr. la mia Nota: *Il metodo di Pfaff per l'integrazione delle equazioni a derivate parziali del 1° ordine*, inserita nei Rend. dell'Istituto lombardo, S. II, V, XVI, fasc. XIII (1883).

[2] Si tenga presente che un integrale è una soluzione dell'equazione a derivate parziali:

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \mathrm{U}_1}{\partial p_j} \frac{\partial y}{\partial q_j} - \frac{\partial \mathrm{U}_1}{\partial q_j} \frac{\partial y}{\partial p_j} \right) \equiv \frac{\partial y}{\partial t} + (\mathrm{U}_1, \mathrm{Y}) = 0 \text{, e che } (\mathrm{U}_1, \mathrm{V}_1) = 1 .$$

converte il sistema [II] in un altro sistema Hamiltoniano. Questa trasformazione riuscirà indipendente da t se le f_{n+j} non contengono $V_1 - t$. (Cfr. Lie, Mem. cit., pag. 155, Theorem III). Come fu notato da Lie, una cosifatta trasformazione non è in generale una trasformazione di contatto ridotta, cioè sulle sole p e q, come sono quelle considerate al § 4 della mia precedente Nota.

8. Consideriamo il sistema:

$$\text{[III]} \qquad \delta x_i = X_i \, \delta z \qquad (i = 0, 1, 2 \ldots 2n),$$

ove le X sono funzioni delle sole x.

Posto come al § 6:

$$(i, k) = \frac{\partial Y_i}{\partial x_k} - \frac{\partial Y_k}{\partial x_i} \qquad (i, k = 0, 1, \ldots 2n),$$

per mezzo del sistema di equazioni

$$(i, 0)\, X_0 + (i, 1)\, X_1 + \ldots + (i, 2n)\, X_{2n} = 0$$

si sieno determinate le Y in funzione delle x; allora la forma differenziale:

$$\text{[IV]} \qquad Y_{dx} \equiv Y_0\, dx_0 + Y_1\, dx_1 + \ldots + Y_{2n}\, dx_{2n}$$

secondo la nomenclatura di Lie è, a meno del differenziale esatto $d \sum_i X_i Y_i$, *un' invariante* per la trasformazione infinitesima definita dalle [III], ossia per la trasformazione infinitesima:

$$\text{[V]} \qquad U f \equiv \sum_{i=0}^{2n} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Si trova infatti [1]:

$$U Y_{dx} \equiv \sum_i \sum_k (ik)\, X_k\, dx_i + d \sum_i X_i Y_i \equiv d \sum_i X_i Y_i.$$

La funzione $\sum_i X_i Y_i$ è un invariante simultaneo della forma differenziale [IV] e della trasformazione infinitesima [V] per qualsiasi cambiamento di variabili.

Secondo la terminologia usata dal Poincaré nell' opera: « *Les mtéhodes nouvelles de la mécanique celeste* » (T. III, p. 9) *l'integrale della* [IV] *è un invariante integrale relativo alle linee chiuse*, per conseguenza l' espressione differenziale [IV] differisce per un differenziale esatto da un invariante assoluto lineare (ibid. p. 14). Tale differenziale esatto, come si vede subito

[1] Cfr. Lie, Leipziger Berichte, 1896 — *Einige Bemerkungen über Pfaff'sche Ausdrücke und Gleichungen.*

dal notare che

$$U(Y_{dz}+df)\equiv\sum_i\sum_k (ik)\,X_k\,dx_i + d[Uf+\sum_i X_i\,Y_i]$$

è quello di una soluzione dell' equazione a derivate parziali:

$$Uf+\sum_i X_i\,Y_i=0\,.$$

Una tale soluzione si ottiene con una quadratura quando sieno note le $2n$ soluzioni indipendenti dell' equazione a derivate parziali:

$$Uf=0\,,$$

ossia gli integrali indipendenti da z del sistema [III]. Espresse le $x_1 \dots x_{2n}$ in funzione di x_0 e di detti integrali, riguardando questi come costanti si calcoli la funzione:

$$f=-\int\sum_i X_i\,Y_i\,\frac{dx_0}{X_0}\,;$$

a quadratura eseguita si sostituiscano agli integrali le loro espressioni nelle x; la f così ottenuta è la soluzione richiesta.

Matematica. — *Sulle relazioni algebriche fra le funzioni ϑ di una variabile e sul teorema di addizione.* Nota del Corrispondente ALFREDO CAPELLI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Astronomia. — *Osservazioni delle comete 1902* d *Giacobini e 1903* a *Giacobini, fatte all'equatoriale di 38 cm.* Nota del Corrispondente E. MILLOSEVICH.

Nella seduta di dicembre ho avuto l'onore di comunicare la prima osservazione da me fatta della cometa 1902 *d*.

Aggiungo le tre seguenti posizioni, le sole che mi fu possibile di fare.

1902 Dicembre 20	$9^h32^m38^s$ R.C.R.
α apparente cometa	7 10 20.50 (9^n.559)
δ » »	$+$ 1° 5′ 15″.4 (0. 762)
1903 Gennaio 17	$9^h\ 7^m47^s$ R.C.R.
α apparente cometa	6 50 55^s.34 (9^n.341)
δ » »	$+$ 8°53′ 15.″4 (0. 690)
1903 Febbraio 21	$6^h49^m49^s$ R.C.R.
α apparente cometa	6 36 30. 64 (9^n.313)
δ » »	$+$20° 8′ 46″.1 (0. 538)