ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCC.

1903

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XII.

1° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1903

La prima cometa del 1903 (1903 a) fu scoperta dall'astronomo Giacobini, occupato a ricercare la cometa periodica Tempel$_3$-Swift, al 15 gennaio. Due sole posizioni fui in caso di fare di detta cometa.

1903 Gennaio 20	$6^h22^m31^s$ R.C.R.
α apparente cometa	22 58 48. 03 (9.524)
δ » »	$+$ 2°30′ 2″.1 (0.752)
1903 Febbraio 19	6^h58^m 0^s R.C.R.
α apparente cometa	23 41 26. 55 (9.640)
δ » »	$+$11°36′ 0″.0 (0.736)

L'aspetto della cometa, il 19 febbraio 1903, era quello d'una nebulosità circolare del diametro di $^3/_4$ di primo d'arco, con nucleo di ottava grandezza.

Matematica. — *Sulle terne ortogonali di congruenze a invarianti costanti*. Nota di A. F. Dall'Acqua, presentata dal Corrispondente G. Ricci.

Nella Nota presente espongo i risultamenti delle mie ricerche intorno alle terne di congruenze ortogonali a invarianti costanti.

Essi sono, a mio credere, non privi di eleganza, e si riassumono brevemente così:

— « Le terne di congruenze ortogonali a invarianti costanti sono costituite da *eliche* di ugual passo, avvolgentisi su cilindri circolari, i cui assi sono paralleli ad una retta fissa.

« Tutte le terne di tal natura vengono individuate, a meno di uno spostamento rigido, da tre parametri: ne esiste quindi una tripla infinità.

« Di queste, ∞^2 formano tra loro e con una terna rettilinea (*terna del Cattaneo*) angoli costanti, e hanno in comune la proprietà di aver uguale la somma delle torsioni delle linee delle tre congruenze » —.

— « Le eliche di una stessa congruenza sono sovrapponibili.

« Se si associa ad ogni punto la normale principale all'elica che vi passa, e (su questa) il centro di curvatura dell'elica, avremo una doppia infinità (non tripla) di rette distinte, che insieme con quella degli assi dei cilindri, forma parte di una terna rettilinea, che fa con la congruenza data angoli costanti.

« Ai punti di una retta parallela agli assi dei cilindri, vengono allora associate le generatrici di un'*elicoide rigata ad area minima*, e i centri di curvatura descrivono un'elica uguale a quelle della congruenza » —.

Questi i risultamenti principali. Ho determinato inoltre le condizioni necessarie e sufficienti affinchè nove costanti $\gamma_{h+1h+2k}$ siano gli invarianti di una terna del tipo studiato; ho ricavate di questa ed integrate le equazioni differenziali.

In una prossima Nota mostrerò una applicazione di questi risultamenti alla soluzione di una classe di problemi dinamici [1].

1. Indichiamo con

$$\varphi = ds^2 = \sum_{1}^{3}{}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

il quadrato dell' elemento lineare dello spazio. Le equazioni differenziali canoniche di una terna di congruenze ortogonali $[\lambda_1]$, $[\lambda_2]$, $[\lambda_3]$ sono

$$\frac{\partial x_r}{\partial s_h} = \lambda_h^{(r)} \qquad \begin{cases} r = 1\,,2\,,3 \\ h = 1\,,2\,,3 \end{cases}$$

dove s_h sono gli archi delle curve λ_h, e le $\lambda_h^{(r)}$ sodisfanno le relazioni

$$\Sigma_{rs}\, \lambda_h^{(r)}\, \lambda_k^{(s)}\, a_{rs} = \varepsilon_{hk} \qquad \varepsilon_{hk} = \begin{cases} 1 \text{ per } h = k \\ 0 \text{ per } h \neq k \end{cases}$$

Designeremo inoltre con $\lambda_{h|r}$ gli elementi

$$\lambda_{h|r} = \Sigma_s\, a_{rs}\, \lambda_h^{(s)},$$

con $\lambda_{h|rs}$ le loro derivate, covarianti a φ, rispetto ad x_s.

Gli invarianti della terna $[\lambda]$ sono dati dalle espressioni

$$\gamma_{hkl} = -\gamma_{khl} = \Sigma_{rs}\, \lambda_{h|rs}\, \lambda_k^{(r)}\, \lambda_l^{(s)}.$$

Da queste, derivando rispetto ad x_t, ed eliminando le derivate seconde delle $\lambda_{h|r}$, si ottengono (come è noto) nove equazioni di condizione per le γ_{hkl}. Queste, nel nostro caso ($\gamma_{hkl} =$ cost.), si possono scrivere

$$\gamma_{hk} \equiv \Sigma_l\, \gamma_{h+1\,h+2\,l}(\gamma_{l\,k+1\,k+2} - \gamma_{l\,k+2\,k+1}) - \gamma_{h\,h+1\,k+1}\, \gamma_{h\,h+2\,k+2} + \gamma_{h\,h+1\,k+2}\, \gamma_{h\,h+2\,k+1} = 0$$

2. Vediamo di dar loro una forma più adatta alle nostre ricerche, e più agilmente adoperabile.

Introduciamo a tale scopo le curvature medie (H_h) e totali (K_h) dei complessi [2] ortogonali alle $[\lambda_h]$, e le torsioni (τ_h) delle $[\lambda_h]$. Avremo

$$2\,\mathrm{H}_h = \gamma_{h\,h+1\,h+1} + \gamma_{h\,h+2\,h+2}$$

$$\mathrm{K}_h = \gamma_{h\,h+1\,h+1}\, \gamma_{h\,h+2\,h+2} - \gamma_{h\,h+1\,h+2}\, \gamma_{h\,h+2\,h+1}$$

$$\tau_h = \gamma_{h+1\,h+2\,h}$$

(1) Il metodo adoperato in queste ricerche è quello del *Calcolo Differenziale Assoluto*. Cfr. G. Ricci e T. Levi Civita, Mathematische Annalen, Bd. 54.

(2) Per la teoria del *Complesso ortogonale* ad una $[\lambda_h]$ e delle sue curvature, confronta la mia Memoria, *Sulla teoria delle congruenze di curve* ecc., Milano, Annali di Matematica, tomo VI, S. III, pag. 1 e segg.

Le prime ci esprimono le somme e i prodotti della quantità $\gamma_{hh+1h+1}$, $\gamma_{hh+2h+2}$, che saranno perciò radici dell' equazione

$$\gamma^2 - 2\,H_h\,\gamma + K_h - \tau_{h+1}\,\tau_{h+2} = 0\,.$$

Si avrà cioè

$$\gamma_{hh+1h+1} = H_h + V_h \quad , \quad \gamma_{hh+2h+2} = H_h - V_h\,.$$

dove

$$V_h^2 = H_h^2 - K_h + \tau_{h+1}\,\tau_{h+2}$$

Potremo quindi ora scrivere le $\gamma_{hk} = 0$, o i tre gruppi equivalenti $\gamma_{hk} - \gamma_{kh} = 0$, $\gamma_{hh} + \gamma_{kk} = 0$, $\gamma_{hh+1}\,V_{h+2} + \gamma_{hh+2}\,V_{h+1} = 0$, sotto la forma

(1) $$-H_h\,(\tau_{h+1} + \tau_{h+2}) + H_{h+1}\,V_{h+2} + H_{h+2}\,V_{h+1} = 0$$

(2) $$\Sigma_p\,H_p^2 - H_{h+1}\,V_{h+1} + H_{h+2}\,V_{h+2} + V_h^2 - \tau_{h+1}\,\tau_{h+2} = 0$$

(3) $$\tau_h\,\Sigma_p\,H_p^2 + \Sigma_p\,\tau_p\,V_p^2 - 2\,V_1\,V_2\,V_3 - \tau_1\,\tau_2\,\tau_3 = 0$$

Come si verifica facilmente, queste diventano identità quando si facciano simultaneamente nulle tutte le H, e conseguentemente le K.

Questa anzi è la soluzione più generale possibile. Infatti in ogni altro caso, le (3) che differiscono soltanto per il coefficente del primo termine, danno $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 \equiv \tau$, cioè

$$\tau\,(\Sigma_p\,H_p^2 + \Sigma_p\,V_p^2 - \tau^2) = 2\,V_1\,V_2\,V_3\,.$$

Le (2) sommate porgono

(4) $$3\,\Sigma_p\,H_p^2 + \Sigma_p\,V_p^2 - 3\,\tau^2 = 0\,.$$

Inoltre perchè le H siano diverse da zero è necessario si annulli il determinante dei loro coefficienti nelle (1), sia cioè

$$\tau\,(\Sigma_p\,V_p^2 - 4\,\tau^2) = -V_1\,V_2\,V_3.$$

Dal confronto di queste tre si ricava

$$\tau\,(\Sigma_p\,V_p^2 - 3\,\tau^2) = 0$$

per la quale la (4) si riduce a una somma di quadrati, e non può essere sodisfatta quando H_1, H_2, H_3 non siano tutti nulli.

Dunque fra i nove invarianti della nostra terna devono passare le sei relazioni

$$H_h = 0 \quad , \quad K_h = 0 \quad ; \qquad\qquad h = 1, 2, 3$$

tre quindi rimangono arbitrarî, cioè: « La determinazione delle nostre terne si può far dipendere da tre parametri ».

3. Se un terna [λ] ha gli invarianti costanti, li avrà pure ogni terna [μ] che formi angoli costanti con la [λ].

Se poniamo $\cos \widehat{\mu_h \lambda_k} = \alpha_{hk}$ (= cost.), sarà

$$\mu_{h|r} = \Sigma_p \, \alpha_{hp} \, \lambda_{p|r}$$

e per gli invarianti della terna $[\mu]$ avremo le espressioni

$$g_{hkl} = \Sigma_{pqr} \, \alpha_{hp} \, \alpha_{kq} \, \alpha_{lr} \, \gamma_{pqr} \, .$$

Ora io dico che si possono sempre assumere le α_{hk} in modo che tutti i g_{hkl} si annullino all'infuori di uno con tutti gli indici distinti: ad esempio g_{123}: si abbia cioè $g_{h+1h+2l}$ eguale a zero per h, l diversi da 3, eguale ad una costante g per $h = l = 3$, o più sinteticamente $g_{h+1h+2l} = g \, \varepsilon_{3h} \, \varepsilon_{3l}$, da cui

$$\Sigma_{pqr} \, \alpha_{h+1p} \, \alpha_{h+2q} \, \alpha_{lr} \, \gamma_{pqr} = g \, \varepsilon_{3h} \, \varepsilon_{3l} .$$

Moltiplicando per α_{lk} e sommando rispetto ad l

$$\Sigma_{pq} \, \alpha_{h+1p} \, \alpha_{h+2q} \, \gamma_{pqk} = g \, \varepsilon_{3h} \, \alpha_{3k}$$

oppure (scambiando p con q e sommando)

$$\Sigma_p \, \alpha_{hp} \, \gamma_{p+1p+2k} = g \, \varepsilon_{3h} \, \alpha_{3k} \, .$$

Moltiplicando per α_{hl} e sommando rispetto ad h

$$\gamma_{l+1l+2k} = g \, \alpha_{3l} \, \alpha_{3k} \, .$$

Inoltre, facendo in questa $l = k$ e sommando

$$\Sigma_k \, \gamma_{k+1k+2k} = \Sigma_k \, \tau_k = g \, .$$

Abbiamo così dimostrato: Che gli invarianti di una terna, e quindi la terna stessa dipendono dal parametro g e dai due parametri che individuano la direzione μ_3 (coseni direttori $\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}$). — Che tutte le terne che hanno comune la somma delle torsioni formano tra loro angoli costanti. — Che ogni terna forma angoli costanti con una terna che ha tutti gli invarianti nulli eccetto una torsione (cost.).

4. Questa terna rientra nel tipo studiato dal dott. Cattaneo [1] delle « terne di congruenze rettilinee, costituite da sistemi piani cartesiani ortogonali situati sovra piani paralleli, e dalle normali a tali piani ». Nel caso nostro aggiungeremo che esse si ottengono da un sistema cartesiano ortogonale dello spazio, facendo ruotare i piani $z =$ cost. intorno all'asse z, di un angolo ϑ; che varia linearmente con z.

Indicando con $y_{h|r}$ i sistemi coordinati covarianti delle linee x, y, z, sarà

$$\begin{aligned} \mu_{1|r} &= y_{1|r} \cos \vartheta + y_{2|r} \operatorname{sen} \vartheta \\ \mu_{2|r} &= y_{2|r} \cos \vartheta - y_{1|r} \operatorname{sen} \vartheta \qquad (5) \\ \mu_{3|r} &\equiv y_{3|r} \end{aligned}$$

[1] P. Cattaneo, *Sulle congruenze di linee in uno spazio piano a tre dimensioni.* Atti del R. Istituto Veneto, tomo LXI, parte II, pag. 42 e segg.

e le relazioni tra gli invarianti della $[\mu]$ e quelli (nulli) della $[y]$ saranno tutte sodisfatte per $\vartheta = gz + c$.

In coordinate cartesiane x, y, z, avremo più semplicemente

$$(6)\quad \begin{cases} \mu_{1|1} = \cos(gz + c) \quad , \quad \mu_{1|2} = \operatorname{sen}(gz + c) \quad , \quad \mu_{1|3} = 0 \\ \mu_{2\,1} = -\operatorname{sen}(gz + c) \quad , \quad \mu_{2|2} = \cos(gz + c) \quad , \quad \mu_{2|3} = 0 \\ \mu_{3|1} = 0 \quad , \quad \mu_{3|2} = 0 \quad , \quad \mu_{3|3} = 1 \end{cases}$$

Possiamo per mezzo di queste trovare una espressione molto semplice per le $\lambda_{h|r}$, riferite alle coordinate x, y, z.

La prima formola del § 3 dà

$$\lambda_{h|r} = \Sigma_k\, \alpha_{kh}\, \mu_{k|r}$$

da cui

$$(7)\quad \begin{cases} \lambda_{h|1} = \dfrac{\partial x}{\partial s_h} = \alpha_{1h} \cos(gz + c) - \alpha_{2h} \operatorname{sen}(gz + c) \\ \lambda_{h|2} = \dfrac{\partial y}{\partial s_h} = \alpha_{1h} \operatorname{sen}(gz + c) + \alpha_{2h} \cos(gz + c) \\ \lambda_{h|3} = \dfrac{\partial z}{\partial s_h} = \alpha_{3h} \end{cases}$$

La terza mostra intanto che le $[\lambda_h]$ formano angoli costanti con l'asse z: le altre due, divise per la terza ed integrate, danno, mediante eliminazione di z

$$(x - c_h)^2 + (y - c'_h)^2 = \frac{\alpha_{1h}^2 + \alpha_{2h}^2}{g^2\, \alpha_{3h}^2} = \frac{1}{g^2} \frac{1 - \alpha_{3h}^2}{\alpha_{3h}^2}$$

ossia, indicando con α_h l'angolo che la λ_h forma con l'asse z ($\cos \alpha_h = \alpha_{3h}$)

$$(x - c_h)^2 + (y - c'_h)^2 = r_h^2 = \frac{1}{g^2} \operatorname{tg}^2 \alpha_h$$

che è l'equazione di un cilindro circolare di raggio $r_h = \dfrac{1}{g} \operatorname{tg} \alpha_h$, con le generatrici parallele all'asse delle z. Come era evidente a priori le λ sono eliche circolari. Essendo α_h l'angolo che l'elica λ_h forma con le generatrici del cilindro, il passo dell'elica è

$$r_h \frac{2\pi}{\operatorname{tg} \alpha_h} = \frac{2\pi}{g}.$$

Ricaviamo di qua (e ciò a priori non era evidente) che tutte le eliche della terna hanno lo stesso passo e si avvolgono su cilindri con gli assi paralleli all'asse z.

Osservando che i raggi di questi cilindri sono eguali per una stessa congruenza, ne ricaviamo anche che questa risulta di eliche congruenti.

5. Consideriamo ora una generica congruenza $[\lambda]$ della nostra terna e imaginiamo di associare ad ogni punto dello spazio la normale principale all' elica che vi passa.

Notiamo anzitutto che le normali principali alle eliche, essendo normali ai cilindri su cui le eliche si avvolgono, sono normali all' asse z. Indicando con n queste normali, potremo porre

$$\cos \widehat{nx} = \cos \beta \quad , \quad \cos \widehat{ny} = \operatorname{sen} \beta \quad , \quad \cos \widehat{nz} = 0 .$$

La tangente t all' elica, ha i coseni $\lambda_1 , \lambda_2 , \lambda_3$, dati dalle (7) (omesso per brevità l'indice h). Sarà

$$\cos \widehat{nt} = \lambda_1 \cos \beta + \lambda_2 \operatorname{sen} \beta = 0$$

sostituendo per λ_1 , λ_2 i loro valori, si riconosce facilmente che

$$\beta = gz + k$$

dove k indica una costante.

Dunque tutte le rette n giacenti in un piano $z = \text{cost.}$ sono parallele ($\beta = \text{cost.}$), e sono le ∞ rette parallele del piano, prese ∞ volte. Quando il punto associato alla retta n si sposta sopra una parallela all'asse z, la n ruota generando un'elicoide rigata ad area minima.

Dunque: « La congruenza delle normali principali alle eliche di una « $[\lambda_h]$ appartiene insieme con la congruenza costituita dagli assi dei ci- « lindri, ad una terna del Cattaneo ».

Il centro di curvatura dell'elica (sulla normale, ad una distanza dal punto associato $= r_h$) ha per coordinate (x , y , z coordinate del punto associato)

$$c_h = x + r_h \cos \beta$$
$$c'_h = y + r_h \operatorname{sen} \beta$$

essendo la terza coordinata uguale alla coordinata z del punto.

Quando il punto si sposta sopra una parallela all'asse z, il centro di curvatura percorre un' elica congruente alle eliche della $[\lambda_h]$.

Matematica. — *Sul problema di Dirichlet nello spazio iperbolico indefinito.* Nota di GUIDO FUBINI, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Meccanica. — *Sull' equilibrio d' un ellissoide planetario di rivoluzione elastico isotropo.* Nota I di A. VITERBI, presentata dal Corrispondente G. RICCI.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.