ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCC.

1903

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

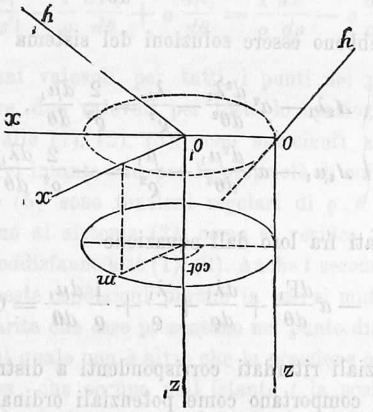
PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1903

Fisica matematica. — *Campo elettromagnetico generato dal moto circolare uniforme di una carica elettrica parallelamente ad un piano conduttore indefinito.* Nota I di G. Picciati, presentata dal Socio V. Volterra.

In una Nota recente (1) ho determinato il campo elettromagnetico generato da una carica elettrica m in moto circolare uniforme; considero ora il caso in cui la carica ha un moto circolare uniforme parallelamente ad un piano conduttore indefinito omogeneo σ, il mezzo ambiente essendo l' etere.

1. Riferiamoci ad un sistema di assi fissi $Oxyz$, aventi per piano $z=0$ il piano σ, e ad un sistema di assi mobili $O'x'y'z'$, invariabilmente collegati con la carica m, scelti nel modo indicato dalla figura. Facendo uso



delle stesse notazioni, i potenziali del campo generato dalla carica, quando non si ha il piano conduttore, conservano le loro espressioni date nella Nota citata, col solo mutamento di z in $z-d$ nella espressione della funzione r che in essi comparisce, se d è la distanza del piano in cui la carica si muove dal piano conduttore σ. L' introduzione nel campo del piano conduttore σ porta in esso delle modificazioni, originandosi una variabile distribuzione di elettricità indotta sopra il piano stesso, alla quale corrisponde un potenziale elettrostatico ed un potenziale vettore, del quale è nulla la com-

(1) *Campo elettromagnetico* ecc. Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, vol. XII, fasc. 2°, 1903, pag. 41. Indicherò le formole relative a questa Nota con N. p.

ponente secondo la normale al piano, il moto della elettricità avendo luogo nel piano stesso. Riferendoci nel sistema di assi mobili alle coordinate cilindriche ϱ, θ, z' siano F_1 il potenziale elettrostatico indotto e λ_1, μ_1 le componenti di quello vettore secondo le linee $\theta = \text{cost.}$, $\varrho = \text{cost.}$; siano poi F, λ, μ i potenziali analoghi nel caso in cui non si ha il piano conduttore. I potenziali del campo così modificato sono quindi $F + F_1$, $\lambda + \lambda_1$, $\mu + \mu_1$: la risoluzione del problema proposto è perciò ridotta alla determinazione delle funzioni F_1, λ_1, μ_1. Note queste e le F, λ, μ, le (19) e (20) della Nota precedente danno le componenti delle forze elettromagnetiche del campo che si considera. Per potere procedere alla loro determinazione esaminiamo a quali condizioni debbono soddisfare le F_1, λ_1, μ_1 considerate come funzioni di ϱ, θ, z', t.

Intanto il fenomeno essendo stazionario rispetto agli assi mobili $O'x'y'z'$, queste funzioni non dipenderanno esplicitamente dal tempo. Come si è visto nella Nota precedente, il potenziale elettrostatico F_1 deve essere soluzione dell'equazione

$$\square F_1 = \Delta_2 F_1 - a^2 \frac{d^2 F_1}{d\theta^2} = 0, \tag{1}$$

ed i due λ_1, μ_1 debbono essere soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \Delta_2 \lambda_1 - a^2 \dfrac{d^2\lambda_1}{d\theta^2} - \dfrac{\lambda_1}{\varrho^2} = \dfrac{2}{\varrho^2}\dfrac{d\mu_1}{d\theta}, \\ \Delta_2 \mu_1 - a^2 \dfrac{d^2\mu_1}{d\theta^2} - \dfrac{\mu_1}{\varrho^2} = -\dfrac{2}{\varrho^2}\dfrac{d\lambda_1}{d\theta}, \end{cases} \tag{2}$$

essendo inoltre legati fra loro dall'equazione

$$-a\frac{dF_1}{d\theta} + \frac{d\lambda_1}{d\varrho} + \frac{\lambda_1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho}\frac{d\mu_1}{d\theta} = 0. \tag{3}$$

Essendo potenziali ritardati corrispondenti a distribuzione di superficie sul piano σ essi si comportano come potenziali ordinarî, le loro espressioni analitiche sotto forma di integrali estesi al piano σ non mutando col mutare il segno di z'; sono quindi funzioni di $|z'|$. Le condizioni caratteristiche relative al piano σ sono

$$-\frac{1}{2\pi}\frac{dF_1}{d|z'|} = e_1; \quad -\frac{1}{2\pi}\frac{d\lambda_1}{d|z'|} = Au_1; \quad -\frac{1}{2\pi}\frac{d\mu_1}{d|z'|} = Av_1$$

essendo e_1, u_1, v_1 la densità di distribuzione e le componenti della corrente indotta sul piano secondo le linee $\theta = \text{cost}$, $\varrho = \text{cost}$. Ora la legge di Ohm per le superfici conduttrici omogenee ci dice che la corrente è proporzionale alla componente tangenziale della forza elettrica ed ha la stessa direzione. Possiamo quindi porre, indicando con (H), (K) le componenti tangenziali della forza elettrica,

$$(4) \qquad (\mathrm{H}) = \mathrm{A}kw_1\,, \quad (\mathrm{K}) = \mathrm{A}kv_1$$

essendo k costante di cui il significato fisico è il seguente [1]: essa è un trentesimo della resistenza dell'unità di superficie del piano conduttore espressa in ohm. Ricordando le espressioni generali delle forze elettromagnetiche per i potenziali del campo, date dalle (19) della N. p., le condizioni relative al piano σ per i potenziali F_1, λ_1, μ_1 sono

$$-\frac{d}{d\varrho}(\mathrm{F}+\mathrm{F}_1) + a\frac{d}{d\theta}(\lambda+\lambda_1) = \frac{k}{2\pi}\frac{d\lambda_1}{d|z'|}\,,$$

$$-\frac{1}{\varrho}\frac{d}{d\theta}(\mathrm{F}+\mathrm{F}_1) + a\frac{d}{d\theta}(\mu+\mu_1) = \frac{k}{2\pi}\frac{d\mu_1}{d|z'|}\,,$$

a cui si può dare la forma:

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{k}{2\pi}\dfrac{d\lambda_1}{d|z'|} - \dfrac{d\mathrm{F}_1}{d\varrho} + a\dfrac{d\lambda_1}{d\theta} = \dfrac{d\mathrm{F}}{d\varrho} - a\dfrac{d\lambda}{d\theta}\,. \\[2ex] \dfrac{k}{2\pi}\dfrac{d\mu_1}{d|z'|} - \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{d\mathrm{F}_1}{d\theta} + a\dfrac{d\mu_1}{d\theta} = \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{d\mathrm{F}}{d\varrho} - a\dfrac{d\mu}{d\theta}\,. \end{cases}$$

A queste relazioni valevoli per tutti i punti del piano $z'=0$ se ne possono sostituire altre due valevoli per tutto lo spazio; allora, come vedremo, esse, insieme alle (1), (2), (3), sono sufficienti alla determinazione di F_1, λ_1, μ_1. Si osservi intanto che, per le proprietà di cui godono F_1, λ_1, μ_1, i primi membri delle (5) sono funzioni regolari di $\varrho, \theta, |z'|$, per $|z'|>0$; esse inoltre soddisfanno al sistema (2), come si verifica facilmente tenendo conto che F_1, λ_1, μ_1 soddisfanno alle (1), (2). Anche i secondi membri delle (5) soddisfanno a tutte queste condizioni purchè in essi si muti z' in $-|z'|$, con che si toglie la singolarità che esse presentano nel punto di coordinate $\varrho = \mathrm{R}$, $\theta = -ar$, $z' = d$, il quale non è altro che la posizione occupata nell'istante $t - \mathrm{A}r$ dalla carica m, che occupa nell'istante t la posizione m. Questo si riconosce subito ricordando le espressioni di F, λ, μ che sono:

$$\mathrm{F} = \frac{m}{r - a\mathrm{R}\varrho\,\mathrm{sen}\,(\theta+ar)}\,,$$

$$\lambda = a\mathrm{RF}\,\mathrm{sen}\,(\theta+ar)\,,$$

$$\mu = a\mathrm{RF}\cos(\theta+ar)$$

essendo r definita dall'equazione

$$r^2 = \varrho^2 + \mathrm{R}^2 + (z'-d)^2 - 2\mathrm{R}\varrho\cos(\theta+ar).$$

[1] Vedi Levi-Civita, *Sur le champ électromagnétique* etc. Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, série III, T. IV, 1902, pag. 25.

Indicando le espressioni di F, λ, μ dopo la sostituzione di $-|z'|$ a z' con F', λ', μ' e ponendo

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} P &= \frac{k}{2\pi}\frac{d\lambda_1}{d|z'|} - \frac{dF_1}{d\varrho} + a\frac{d\lambda_1}{d\theta} - \frac{dF'}{d\varrho} + a\frac{d\lambda'}{d\theta} \\ Q &= \frac{k}{2\pi}\frac{d\mu_1}{d|z'|} - \frac{1}{\varrho}\frac{dF_1}{d\theta} + a\frac{d\mu_1}{d\theta} - \frac{1}{\varrho}\frac{dF'}{d\theta} + a\frac{d\mu'}{d\theta} \end{aligned}\right.$$

le funzioni P, Q hanno le seguenti caratteristiche: sono regolari in tutto il semispazio S da una banda di un piano indefinito σ (la regione $z' > 0$); si annullano sul piano $z' = 0$; all'infinito si annullano, assieme alle loro derivate prime, come $\frac{1}{\varrho^2 + z'^2}$ almeno; soddisfanno al sistema di equazioni

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta_2 P - a^2\frac{d^2P}{d\theta^2} - \frac{P}{\varrho^2} &= \frac{2}{\varrho^2}\frac{dQ}{d\theta}, \\ \Delta_2 Q - a^2\frac{d^2Q}{d\theta^2} - \frac{Q}{\varrho^2} &= -\frac{2}{\varrho^2}\frac{dP}{d\theta}. \end{aligned}\right.$$

Si può dimostrare che queste funzioni P, Q *sono identicamente nulle, e quindi concludere che le relazioni* $P = 0$, $Q = 0$ *sono valevoli in tutto lo spazio* S *e non solo sul piano* $z' = 0$.

2. Si consideri in generale l'equazione

$$(8)\quad \Delta_2 f + c^2 f = 0,$$

essendo $\Delta_2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}$ e c costante reale; per essa sussiste la seguente proprietà:

« Ogni integrale dell'equazione (8) regolare nel semispazio S, nullo sul piano $z = 0$, e nullo all'infinito, insieme alle sue derivate prime, come $\frac{1}{r^2}$ almeno ($r^2 = x^2 + y^2 + z^2$) è identicamente nullo per qualsiasi valore della costante c ».

Si dimostra questo nel seguente modo. Siano u e v due integrali della (8) regolari in un generico campo Σ: dalle equazioni

$$\Delta_2 u + c^2 u = 0,$$
$$\Delta_2 v + c^2 v = 0,$$

moltiplicando rispettivamente per v ed u, sottraendo ed integrando si ha

$$\int_\Sigma (v\Delta_2 u - u\Delta_2 v)\, d\Sigma = 0.$$

Indicando con σ il contorno di Σ e con n la normale a σ diretta verso Σ si ha per il teorema di Green

$$\int_\sigma \left(u \frac{dv}{dn} - v \frac{du}{dn}\right) d\sigma = 0.$$

Ricordando che l'espressione del Δ_2 in coordinate polari ϱ, φ, θ è

$$\Delta_2 = \frac{1}{r^2}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\operatorname{sen}\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\varphi}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right\}$$

e che quindi per una funzione della sola r si riduce ad $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right)$, è noto che un particolare integrale della (8) è dato da $\frac{\cos cr}{r}$, essendo r la distanza del punto variabile dall'origine. Esso è regolare in tutto lo spazio, eccettuato solo l'origine; e si annulla all'infinito assieme alle sue derivate.

Indichiamo con p il piano $z = 0$, essendo S il semispazio $z > 0$; con M un generico (variabile) punto di S e con M′ un punto pure generico di S, ma fisso; con M'_1 il suo simmetrico rispetto al piano p, con r, r' le distanze MM′, MM'_1. La funzione $\frac{\cos cr'}{r'}$ è un integrale della (8) regolare in tutto S; anche la funzione $\frac{\cos cr}{r}$ è un integrale della (8), ma ha entro S una singolarità nel punto M′. Poniamo

$$v = \frac{\cos cr}{r} - \frac{\cos cr'}{r'}$$

ed indichiamo con u un integrale della (8) regolare in tutto S e nullo all'infinito, assieme alle sue derivate prime, come $\frac{1}{r^2}$ almeno. Sia T una superficie qualunque esterna ad una semisfera di raggio grandissimo, τ una sferetta di centro in M′; per quanto grande si scelga T e piccola τ nello spazio compreso fra p, T, τ le u, v sono regolari; quindi indicando con p' la porzione di p intercetta da T si ha

$$\int_{p'+T+\tau} \left(u \frac{dv}{dn} - v \frac{du}{dn}\right) d\sigma = 0. \tag{9}$$

Prendiamo per es. per T una sfera di centro M′ e di raggio $\frac{1}{\varepsilon}$ e per τ una sfera con lo stesso centro e raggio ε. Avremo nei punti di T, per essere $dn = -dr$,

$$\left(u \frac{dv}{dn} - v \frac{du}{dn}\right) d\sigma = \left(v \frac{du}{dr} - u \frac{dv}{dr}\right) r^2 \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi \, d\theta =$$
$$= \left(v \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{du}{dr} - \frac{u}{\varepsilon^2}\frac{dv}{dr}\right) \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi \, d\theta .$$

Per ipotesi al decrescere indefinito di ε le quantità $\frac{u}{\varepsilon^2}$, $\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{du}{dr}$ si mantengono sempre finite, v e $\frac{dv}{dr}$ hanno per limite lo zero, e quindi l' integrale esteso a T tende a zero con ε. Sopra τ, tenendo presente l' espressione di v, si ha, essendo $dn = dr$,

$$\frac{dv}{dn}\,d\sigma = \left(-\frac{\cos cr}{r^2} + \ldots\right) r^2 \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi\, d\theta = (-\cos c\varepsilon + \gamma) \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi\, d\theta$$

indicando γ termini che vanno a zero con ε; inoltre $v d\sigma$ tende a zero con ε. Si ha quindi:

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_\tau \left(u\frac{dv}{dn} - v\frac{du}{dn}\right) d\sigma = \lim_{\varepsilon=0}\int_\tau u(-\cos c\varepsilon) \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi\, d\theta$$

$$= \lim_{\varepsilon=0}\int_\tau (-u' + u' - u)\cos c\varepsilon \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi\, d\theta$$

$$= -4\pi u' + \lim_{\varepsilon=0}\int_\tau (u' - u)\cos c\varepsilon \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi\, d\theta = -4\pi u',$$

indicando u' il valore di u in M'.

Al limite dunque la (9) ci dà

$$4\pi u' = \int_p \left(u\frac{dv}{dn} - v\frac{du}{dn}\right) d\sigma;$$

ma siccome la v è nulla sopra p resterà

$$(10) \qquad 4\pi u' = \int_p u\frac{dv}{dn}\,d\sigma.$$

Con che ogni integrale u della (8) regolare in S e nullo all' infinito nel modo detto rimane espresso mediante i valori che esso prende sul piano p. Essendo nel caso nostro la u nulla sopra p si ha $u = 0$ in tutto lo spazio.

Dalla proprietà dimostrata si deduce subito quest' altra.

Si indichi con u un integrale della (8) regolare nel semispazio S; riferendoci a coordinate cilindriche ϱ, θ, z sarà u, per la sua regolarità, funzione periodica di θ; quindi potremo porre

$$u = u_0 + \sum_1^\infty {}_n (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta)$$

con u_0, a_n, b_n funzioni solo di ϱ e z.

Avendosi in coordinate cilindriche

$$\Delta_2 = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial}{\partial\varrho}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

poniamo

$$\Delta_2 = \Delta'_2 + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

con che Δ'_2 è l'espressione del Δ_2 per una funzione indipendente da θ, cioè simmetrica rispetto alla normale al piano $z = 0$. La (8) ci dà allora

$$\Delta'_2 u_0 + c^2 u_0 + \sum_1^\infty {}_n \left\{ \left[\Delta'_2 a_n - \left(\frac{n^2}{\varrho^2} - c^2 \right) a_n \right] \cos n\theta + \right.$$
$$\left. + \left[\Delta'_2 b_n - \left(\frac{n^2}{\varrho^2} - c^2 \right) b_n \right] \operatorname{sen} n\theta \right\} = 0$$

ed esige che per conseguenza si annullino separatamente il termine indipendente da θ ed i coefficienti di ogni $\cos n\theta$, $\operatorname{sen} n\theta$. Otteniamo quindi:

$$\Delta'_2 u_0 + c^2 u_0 = 0 \,,$$
$$\Delta'_2 a_n + \left(c^2 - \frac{n^2}{\varrho^2} \right) a_n = 0 \,,$$
$$\Delta'_2 b_n + \left(c^2 - \frac{n^2}{\varrho^2} \right) b_n = 0 \,.$$

Se per l'integrale u si aggiunge la condizione che sia nullo sul piano $z = 0$ e nullo all'infinito insieme alle derivate prime nel modo sopra detto si sa che esso è identicamento nullo; devono quindi essere identicamente nulli anche u_0, a_n, b_n. Otteniamo perciò:

« Ogni integrale dell'equazione

$$\Delta'_2 f + \left(c^2 - \frac{n^2}{\varrho^2} \right) f = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

regolare in S, nullo per $z = 0$ e nullo all'infinito, assieme alle sue derivate prime, come $\frac{1}{\varrho^2 + z^2}$ almeno è identicamente nullo ».

Fisica. — *Intorno ad un nuovo apparecchio per la determinazione dell'equivalente meccanico della caloria e ad alcune modificazioni del calorimetro solare, del dilatometro, del termometro e del psicrometro.* Nota di G. Guglielmo, presentata dal Socio P. Blaserna.

Fisica. — *Intorno alla determinazione della densità e della massa di quantità minime di un solido.* Nota II di G. Guglielmo, presentata dal Socio P. Blaserna.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.