ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCC.

1903

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1903

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 15 marzo 1903.

P. Villari, Presidente.

Fisica matematica. — *Campo elettromagnetico generato dal moto circolare uniforme di una carica elettrica parallelamente ad un piano conduttore indefinito*. Nota II [1] di G. Picciati, presentata dal Socio V. Volterra.

3. Riprendiamo ora a considerare la due funzioni P, Q ricordando le loro caratteristiche e riferendoci alle coordinate ϱ, θ, z'; essendo, per la loro regolarità, funzioni periodiche di θ possiamo porre

$$P = P_0 + \sum_{1}^{\infty}{}_n (g_n \cos n\theta + h_n \operatorname{sen} n\theta)$$

$$Q = Q_0 + \sum_{1}^{\infty}{}_n (e_n \cos n\theta + l_n \operatorname{sen} n\theta),$$

con P_0, Q_0, g_n, h_n, e_n, l_n funzioni solo di ϱ, z' regolari ed annullantesi all'infinito e per $z' = 0$. Sostituendo queste espressioni di P, Q nelle equazioni (7) a cui esse devono soddisfare, e ponendo al solito $\Delta_2 = \Delta'_2 + \frac{1}{\varrho^2}\frac{d^2}{d\theta^2}$ si ottiene, annullando separatamente i termini indipendenti da θ ed i coef-

[1] V. pag. 159.

ficienti di ogni $\cos n\theta$, $\operatorname{sen} n\theta$, le equazioni:

$$(12)\qquad \Delta'_2 P_0 - \frac{P_0}{\varrho^2} = 0\ ,\ \Delta'_2 Q_0 - \frac{Q_0}{\varrho^2} = 0\,;$$

$$(13)\qquad \begin{cases} \Delta'_2 g_n - \left(\dfrac{n^2+1}{\varrho^2} - n^2 a^2\right) g_n = \dfrac{2n}{\varrho^2}\, l_n\,, \\ \Delta'_2\, l_n - \left(\dfrac{n^2+1}{\varrho^2} - n^2 a^2\right) l_n = \dfrac{2n}{\varrho^2}\, g_n\,; \end{cases}$$

$$(14)\qquad \begin{cases} \Delta'_2 h_n - \left(\dfrac{n^2+1}{\varrho^2} - n^2 a^2\right) h_n = -\dfrac{2n}{\varrho^2}\, e_n\,; \\ \Delta'_2\, e_n - \left(\dfrac{n^2+1}{\varrho^2} - n^2 a^2\right) e_n = -\dfrac{2n}{\varrho^2}\, h_n\,. \end{cases}$$

Di queste equazioni le (12) rientrano senz'altro nel tipo più sopra considerato; quindi è $P_0 = 0$, $Q_0 = 0$; dalle (13) si hanno poi le altre equazioni

$$\Delta'_2 (g_n + l_n) + \left[n^2\, a^2 - \frac{(n+1)^2}{\varrho^2}\right](g_n + l_n) = 0\,,$$

$$\Delta'_2 (g_n - l_n) + \left[n^2\, a^2 - \frac{(n-1)^2}{\varrho^2}\right](g_n - l_n) = 0\,,$$

le quali, rientrando nel tipo considerato, danno $g_n + l_n = 0$, $g_n - l_n = 0$, quindi $g_n = 0$, $l_n = 0$. Analogamente dalle (14) si ha pure $h_n = 0$, $e_n = 0$, e quindi in conclusione in tutto lo spazio S si ha $P = 0$, $Q = 0$, come si voleva dimostrare.

Riepilogando: essendo $P = 0$, $Q = 0$ in tutto lo spazio S si possono alle relazioni (5), valevoli per i punti del piano $z' = 0$, sostituire le due relazioni

$$(15)\qquad \begin{cases} \dfrac{k}{2\pi}\dfrac{d\lambda_1}{d|z'|} - \dfrac{dF_1}{d\varrho} + a\,\dfrac{d\lambda_1}{d\theta} = \dfrac{dF'}{d\varrho} - a\,\dfrac{d\lambda'}{d\theta} \\ \dfrac{k}{2\pi}\dfrac{d\mu_1}{d|z'|} - \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{dF_1}{d\theta} + a\,\dfrac{d\mu_1}{d\theta} = \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{dF'}{d\theta} - a\,\dfrac{d\mu'}{d\theta} \end{cases}$$

valevoli in tutto lo spazio; *il nostro problema è ora ridotto alla determinazione delle funzioni* F_1, λ_1, μ_1. *aventi il comportamento qualitativo indicato e soddisfacenti alle* (15) *ed alle altre*

$$(1)\qquad \square F_1 = \Delta_2\, F_1 - a^2\,\frac{d^2 F_1}{d\theta^2} = 0\,,$$

$$(2)\qquad \begin{cases} \Delta_2\, \lambda_1 - a^2\,\dfrac{d^2\lambda_1}{d\theta^2} - \dfrac{\lambda_1}{\varrho^2} = \dfrac{2}{\varrho^2}\,\dfrac{d\mu_1}{d\theta}\,, \\ \Delta_2\, \mu_1 - a^2\,\dfrac{d^2\mu_1}{d\theta^2} - \dfrac{\mu_1}{\varrho^2} = -\dfrac{2}{\varrho^2}\,\dfrac{d\lambda_1}{d\theta}\,, \end{cases}$$

$$(3)\qquad -a\,\frac{dF_1}{d\theta} + \frac{d\lambda_1}{d\varrho} + \frac{\lambda_1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho}\,\frac{d\mu_1}{d\theta} = 0\,.$$

Determinazione di F_1. — Derivando la prima delle (15) rispetto a ϱ e sommandola con l'equazione stessa divisa per ϱ e con la seconda delle (15) derivata rispetto a θ e divisa per ϱ si ottiene

$$\frac{k}{2\pi}\frac{d}{d|z'|}\left\{\frac{d\lambda_1}{d\varrho}+\frac{\lambda_1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho}\frac{d\mu_1}{d\theta}\right\}-$$

$$-\left\{\frac{d^2F_1}{d\varrho^2}+\frac{1}{\varrho}\frac{dF_1}{d\varrho}+\frac{1}{\varrho^2}\frac{d^2F_1}{d\theta^2}\right\}+a\frac{d}{d\theta}\left\{\frac{d\lambda_1}{d\varrho}+\frac{\lambda_1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho}\frac{d\mu_1}{d\theta}\right\}=$$

$$=\left\{\frac{d^2F'}{d\varrho^2}+\frac{1}{\varrho}\frac{dF'}{d\varrho}+\frac{1}{\varrho^2}\frac{d^2F'}{d\theta^2}\right\}-a\frac{d}{d\theta}\left\{\frac{d\lambda'}{d\varrho}+\frac{\lambda'}{\varrho}+\frac{1}{\varrho}\frac{d\mu'}{d\theta}\right\},$$

quindi avendo riguardo alla (3) si ha per F_1

$$\frac{ak}{2\pi}\frac{d^2F_1}{d|z'|d\theta}-\left\{\frac{d^2F_1}{d\varrho^2}+\frac{1}{\varrho}\frac{dF_1}{d\varrho}+\frac{1}{\varrho^2}\frac{d^2F_1}{d\theta^2}-a^2\frac{d^2F_1}{d\theta^2}\right\}=$$

$$=\frac{d^2F'}{d\varrho^2}+\frac{1}{\varrho}\frac{dF'}{d\varrho}+\frac{1}{\varrho^2}\frac{d^2F'}{d\theta^2}-a^2\frac{d^2F'}{d\theta^2}.$$

Questa equazione, dovendo F_1 ed analogamente F' soddisfare anche alla (1), diviene

$$\frac{ak}{2\pi}\frac{d^2F_1}{d|z'|d\theta}+\frac{d^2F_1}{d|z'|^2}=-\frac{d^2F'}{d|z'|^2}.$$

Integrando rispetto a $|z'|$ da un valore qualunque sino all'infinito, annullandosi i due membri per $|z'|=\infty$ si ha

$$\frac{ak}{2\pi}\frac{dF_1}{d\theta}+\frac{dF_1}{d|z'|}=-\frac{dF'}{d|z'|}. \tag{16}$$

Da questa equazione è facile dedurre l'espressione di F_1; nota questa, le (15) danno allora λ_1 e μ_1.

Poniamo

$$r^{\alpha,\beta}=\sqrt{\varrho^2+R^2+\left[|z'|+d+\alpha+\frac{k}{2\pi}\beta\right]^2-2R\varrho\cos\left(\theta+ar^{\alpha,\beta}+\frac{ak}{2\pi}\alpha+a\beta\right)}$$

essendo α, β due indeterminate, ed inoltre poniamo

$$F^{\alpha,\beta}=\frac{m}{r^{\alpha,\beta}-aR\varrho\,\mathrm{sen}\left(\theta+ar^{\alpha,\beta}+\frac{ak}{2\pi}\alpha+a\beta\right)};$$

avremo intanto

$$F^{0,0}=\frac{m}{r^{0,0}-aR\varrho\,\mathrm{sen}\,(\theta+ar^{0,0})}=\frac{m}{r-aR\varrho\,\mathrm{sen}\,(\theta+ar)}=F',$$

$$(F^{\alpha,0})_{\alpha=\infty}=\left[\frac{m}{r^{\alpha,0}-aR\varrho\,\mathrm{sen}\left(\theta+ar^{\alpha,0}+\frac{ak}{2\pi}\alpha\right)}\right]_{\alpha=\infty}=0,$$

ed inoltre

$$\square F^{\alpha,\beta} = \Delta_2 F^{\alpha,\beta} - a^2 \frac{d^2 F^{\alpha,\beta}}{d\theta^2} = 0,$$

ciò che si riconosce subito ricordando che F′ soddisfa alla $\square F' = 0$. Si ha poi

$$\frac{dF^{\alpha,0}}{d\alpha} = \frac{ak}{2\pi}\frac{dF^{\alpha,0}}{d\theta} + \frac{dF^{\alpha,0}}{d|z'|},$$

quindi potendosi la (16) scrivere anche

$$(16') \qquad \frac{ak}{2\pi}\frac{d}{d\theta}(F_1 + F') + \frac{d}{d|z'|}(F_1 + F') = \frac{ak}{2\pi}\frac{dF'}{d\theta},$$

si riconosce subito che la funzione

$$(17) \qquad F_1 + F' = -\frac{ak}{2\pi}\int_0^\infty \frac{dF^{\alpha,0}}{d\theta}\, d\alpha$$

soddisfa alla (16)′. Essa soddisfa anche alla $\square(F_1 + F') = 0$, si annulla all'infinito, è regolare per tutti i valori di ϱ, θ, z', avendo solo una discontinuità normale per $z' = 0$; ci dà quindi la funzione cercata F_1. Infatti dovendo F_1 soddisfare alla (16), posto

$$G = -\frac{ak}{2\pi}\int_0^\infty \frac{dF^{\alpha,0}}{d\theta}\, d\alpha,$$

si dovrà avere

$$\frac{ak}{2\pi}\frac{dF_1}{d\theta} + \frac{dF_1}{d|z'|} = -\frac{dF'}{d|z'|},$$

$$\frac{ak}{2\pi}\frac{dG}{d\theta} + \frac{dG}{d|z'|} = \frac{ak}{2\pi}\frac{dF'}{d\theta},$$

e quindi anche

$$\frac{ak}{2\pi}\frac{d}{d\theta}(F_1 + F' - G) + \frac{d}{d|z'|}(F_1 + F' - G) = 0$$

e perciò dovrà essere $F_1 + F' - G$ una funzione arbitraria di $\theta - \frac{ak}{2\pi}|z'|$, che dovendo però soddisfare alla $\square f = 0$ ed annullarsi all'infinito sarà quindi identicamente nulla; e ciò dimostra l'unicità della soluzione data dalla (17).

Determinazione di λ_1 e μ_1. — Noto F_1 le (15) danno le funzioni λ_1 e μ_1; si ha infatti per λ_1

$$(18) \qquad a\frac{d\lambda_1}{d\theta} + \frac{k}{2\pi}\frac{d\lambda_1}{d|z'|} = \frac{d}{d\varrho}(F_1 + F') - a\frac{d\lambda}{d\theta},$$

della quale, posto

$$\lambda^\beta = a R F^{0,\beta} \operatorname{sen}(\theta + ar^{0,\beta} + a\beta),$$

essendo quindi

$$(\lambda^\beta)_{\beta=\infty} = 0, \quad (\lambda^\beta)_{\beta=0} = \lambda',$$

$$\frac{d}{d\beta} = a\frac{d}{d\theta} + \frac{k}{2\pi}\frac{d}{d|z'|},$$

si ha un integrale dato da

$$(19) \qquad \lambda_1 = \frac{ak}{2\pi}\int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty \frac{d^2 F^{\alpha,\beta}}{d\varrho\, d\theta}\, d\beta + a\int_0^\infty \frac{d\lambda^\beta}{d\theta}\, d\beta$$

essendo $F^{\alpha,\beta}$ l'espressione precedentemente definita. Infatti si ha

$$a\frac{d\lambda_1}{d\theta}+\frac{k}{2\pi}\frac{d\lambda_1}{d|z'|}=\frac{ak}{2\pi}\int_0^\infty d\alpha\int_0^\infty\frac{d^2}{d\varrho\, d\theta}\left(a\frac{dF^{\alpha,\beta}}{d\theta}+\frac{k}{2\pi}\frac{dF^{\alpha,\beta}}{d|z'|}\right)d\beta+$$
$$+a\int_0^\infty\frac{d}{d\theta}\left(a\frac{d\lambda^\beta}{d\theta}+\frac{k}{2\pi}\frac{d\lambda^\beta}{d|z'|}\right)d\beta=\frac{ak}{2\pi}\int_0^\infty d\alpha\int_0^\infty\frac{d^2}{d\varrho\, d\theta}\left(\frac{dF^{\alpha,\beta}}{d\beta}\right)d\beta+$$
$$+a\int_0^\infty\frac{d}{d\theta}\left(\frac{d\lambda^\beta}{d\beta}\right)d\beta=\frac{ak}{2\pi}\int_0^\infty\frac{d^2}{d\varrho\, d\theta}(-F^{\alpha,0})\,d\alpha+a\frac{d}{d\theta}(-\lambda^0)=$$
$$=\frac{d}{d\varrho}(F_1+F')-a\frac{d\lambda'}{d\theta}.$$

Analogamente avendosi per μ_1 l'equazione

$$a\frac{d\mu_1}{d\theta}+\frac{k}{2\pi}\frac{d\mu_1}{d|z'|}=\frac{1}{\varrho}\frac{d}{d\theta}(F_1+F')-a\frac{d\mu'}{d\theta},\tag{20}$$

posto

$$\mu^\beta=aRF^{0,\beta}\cos(\theta+ar^{0,\beta}+a\beta),$$

essendo

$$(\mu^\beta)_{\beta=\infty}=0\,,\quad(\mu^\beta)_{\beta=0}=\mu',$$

si ha un integrale della (20) dato da

$$\mu_1=\frac{ak}{2\pi}\int_0^\infty d\alpha\int_0^\infty\frac{1}{\varrho}\frac{d^2F^{\alpha,\beta}}{d\theta^2}d\beta+a\int_0^\infty\frac{d\mu^\beta}{d\theta}d\beta\,,\tag{21}$$

verificandosi questo nel modo sopra indicato per λ_1.

Le espressioni (19) e (21) determinate per λ_1, μ_1 soddisfanno, oltre che alle (15), anche a tutte le altre condizioni stabilite per esse; sono regolari per tutti i valori di ϱ, θ, z', avendo solo una discontinuità normale per $z'=0$; si annullano all'infinito e soddisfanno al sistema di equazioni (2), ed inoltre, insieme ad F_1, alla (3), come si può facilmente verificare. Infatti, per rendere soddisfatta la prima delle (2), si dovrà avere

$$\frac{ak}{2\pi}\int_0^\infty d\alpha\int_0^\infty\left[\varDelta_2\left(\frac{d^2F^{\alpha,\beta}}{d\varrho\, d\theta}\right)-a^2\frac{d^4F^{\alpha,\beta}}{d\varrho\, d\theta^3}-\frac{1}{\varrho^2}\frac{d^2F^{\alpha,\beta}}{d\varrho\, d\theta}-\frac{2}{\varrho^2}\frac{d^3F^{\alpha,\beta}}{d\theta^3}\right]d\beta+$$
$$+a\int_0^\infty\left[\varDelta_2\left(\frac{d\lambda^\beta}{d\theta}\right)-a^2\frac{d^3\lambda^\beta}{d\theta^3}-\frac{1}{\varrho^2}\frac{d\lambda^\beta}{d\theta}-\frac{2}{\varrho^2}\frac{d^2\mu^\beta}{d\theta^2}\right]d\beta=0$$

e quindi anche

$$\frac{ak}{2\pi}\int_0^\infty d\alpha\int_0^\infty\frac{d^2}{d\varrho\, d\theta}\left[\varDelta_2F^{\alpha,\beta}-a^2\frac{d^2F^{\alpha,\beta}}{d\theta^2}\right]d\beta+$$
$$+a\int_0^\infty\frac{d}{d\theta}\left[\varDelta_2\lambda^\beta-a^2\frac{d^2\lambda^\beta}{d\theta^2}-\frac{\lambda^\beta}{\varrho^2}-\frac{2}{\varrho^2}\frac{d\mu^\beta}{d\theta}\right]d\beta=0,$$

il che si riconosce, osservando che $F^{\alpha,\beta}$, λ^{β}, μ^{β} soddisfanno alle stesse equazioni a cui soddisfanno F', λ', μ' cioè alle (1), (2), (3).

Come alla prima delle (2), si riconosce in modo simile che le espressioni trovate per F_1, λ_1, μ_1 soddisfanno anche alla seconda delle (2) ed alla (3). Esse sono inoltre le uniche soddisfacenti a tutte le condizioni del problema. Infatti procedendo come si è fatto per la F_1, si riconosce che le espressioni di λ_1 e μ_1 non possono differire dalle (19) e (21) che per funzioni arbitrarie di $\frac{k}{2\pi}\theta - a|z'|$; queste, dovendo soddisfare al sistema (2) ed annullarsi all'infinito, sono perciò identicamente nulle.

Determinati così completamente i potenziali F_1, λ_1, μ_1, le componenti delle forze elettromagnetiche del campo che si considera sono:

$$
(22)\quad \left\{\begin{aligned}
&(\mathrm{H}) = -\frac{dF}{d\varrho} + a\frac{d\lambda}{d\theta} - \frac{dF_1}{d\varrho} + a\frac{d\lambda_1}{d\theta} = \mathrm{H} + \mathrm{H}_1 ,\\
&(\mathrm{K}) = -\frac{1}{\varrho}\frac{dF}{d\theta} + a\frac{d\mu}{d\theta} - \frac{1}{\varrho}\frac{dF_1}{d\theta} + a\frac{d\mu_1}{d\theta} = \mathrm{K} + \mathrm{K}_1 ,\\
&(\mathrm{Z}') = -\frac{dF}{dz'} - \frac{dF_1}{dz'} = \mathrm{Z}' + \mathrm{Z}'_1 ;
\end{aligned}\right.
$$

$$
(23)\quad \left\{\begin{aligned}
&(\mathrm{E}) = \frac{d\mu}{dz'} + \frac{d\mu_1}{dz'} = \mathrm{E} + \mathrm{E}_1 ,\\
&(\mathrm{G}) = -\frac{d\lambda}{dz'} - \frac{d\lambda_1}{dz'} = \mathrm{G} + \mathrm{G}_1 ,\\
&(\mathrm{N}') = \frac{1}{\varrho}\frac{d\lambda}{d\theta} - \frac{d\mu}{d\varrho} - \frac{\mu}{\varrho} + \frac{1}{\varrho}\frac{d\lambda_1}{d\theta} - \frac{d\mu_1}{d\varrho} - \frac{\mu_1}{\varrho} = \mathrm{N}' + \mathrm{N}'_1 ,
\end{aligned}\right.
$$

essendo H, K, ... N′ le componenti delle forze elettromagnetiche del campo generato dalla carica quando non si ha il piano conduttore.

4. Le espressioni determinate per F_1, λ_1, μ_1 mostrano facilmente che, finchè è $k > 0$, esse sono funzioni che si comportano regolarmente anche per valori di a piccolissimi; d'altra parte l'ipotesi $k > 0$ è quella che si verifica sempre nelle condizioni sperimentali ordinarie, essendo k un trentesimo della resistenza dell'unità di superficie del piano conduttore espressa in ohm, quindi un numero generalmente piccolo ma diverso da zero.

Le funzioni F_1, λ_1, μ_1 si possono quindi sviluppare secondo le potenze di a, per a assai piccolo; consideriamo il caso che della $a = A\omega$ si possano trascurare le potenze superiori alla prima. Comparendo in $F_1 + F'$, λ_1, μ_1 come fattore la a, si può porre allora $a = 0$ nell'espressione che comparisce come fattore della a. Si ottiene allora

$$
r^{\alpha,\beta} = \sqrt{\varrho^2 + R^2 + \left[|z'| + d + \alpha + \frac{k}{2\pi}\beta\right]^2 - 2R\varrho\cos\theta} ,
$$

$$
F^{\alpha,\beta} = \frac{m}{r^{\alpha,\beta}} ,
$$

$$
\lambda^{\beta} = 0 \ , \ \mu^{\beta} = 0
$$

quindi si ha più semplicemente

$$
(24)\left\{\begin{aligned}
&F_1 + F' = -\frac{ak}{2\pi}\int_0^\infty \frac{dF^{\alpha,0}}{d\theta}\,d\alpha\,,\\
&\lambda_1 = \frac{ak}{2\pi}\int_0^\infty d\alpha\int_0^\infty \frac{d^2F^{\alpha,\beta}}{d\varrho\,d\theta}\,d\beta\ ;\ \mu_1 = \frac{ak}{2\pi}\int_0^\infty d\alpha\int_0^\infty \frac{1}{\varrho}\frac{d^2F^{\alpha,\beta}}{d\theta^2}\,d\beta
\end{aligned}\right.
$$

Ponendo

$$
\begin{aligned}
B &= \varrho^2 + R^2 - 2R\varrho\cos\theta + [|z'| + d]^2,\\
D &= |z'| + d,
\end{aligned}
$$

si ricava

$$
F_1 + F' = -\frac{ak}{2\pi}\int_0^\infty \frac{d}{d\theta}\left(\frac{m}{\sqrt{B + 2D\alpha + \alpha^2}}\right)d\alpha = \frac{mak}{2\pi}\cdot\frac{R\varrho\,\mathrm{sen}\,\theta}{\sqrt{B}(\sqrt{B} + D)}\,,
$$

il che ci permette di determinare senz'altro le componenti delle forze elettriche, giacchè nelle (22) devono essere trascurati i termini $a\frac{d\lambda}{d\theta} + a\frac{d\lambda_1}{d\theta}$, $a\frac{d\mu}{d\theta} + a\frac{d\mu_1}{d\theta}$ che sono di secondo grado in a. Per avere anche le componenti delle forze magnetiche è conveniente procedere al calcolo diretto di $\frac{d\lambda_1}{d|z'|}, \frac{d\mu_1}{d|z'|}, \frac{1}{\varrho}\frac{d\lambda_1}{d\theta} - \frac{d\mu_1}{d\varrho} - \frac{\mu_1}{\varrho}$ in luogo delle λ_1 e μ_1.

Si ha intanto, per le (24),

$$
\frac{d\lambda_1}{d|z'|} = \frac{ak}{2\pi}\int_0^\infty d\beta\int_0^\infty \frac{d^2}{d\varrho\,d\theta}\left(\frac{dF^{\alpha,\beta}}{d|z'|}\right)d\alpha\,,
$$

ma essendo $\frac{d}{d|z'|} = \frac{d}{d\alpha}$, sarà anche

$$
\begin{aligned}
\frac{d\lambda_1}{d|z'|} &= \frac{mak}{2\pi}\int_0^\infty d\beta\int_0^\infty \frac{d^2}{d\varrho\,d\theta}\left[\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{r^{\alpha,\beta}}\right)\right]d\alpha = -\frac{mak}{2\pi}\int_0^\infty \frac{d^2}{d\varrho\,d\theta}\left(\frac{1}{r^{0,\beta}}\right)d\beta\\
&= -\frac{mak}{2\pi}\int_0^\infty \frac{d^2}{d\varrho\,d\theta}\left(\frac{1}{\sqrt{\varrho^2 + R^2 - 2R\varrho\cos\theta + \left[|z'| + d + \frac{k}{2\pi}\beta\right]^2}}\right)d\beta\\
&= -\frac{mak}{2\pi}\int_0^\infty \frac{d^2}{d\varrho\,d\theta}\left(\frac{1}{\sqrt{B + 2D\cdot\frac{k}{2\pi}\beta + \left(\frac{k}{2\pi}\beta\right)^2}}\right)d\beta
\end{aligned}
$$

avendo B e D le precedenti espressioni. Si ottiene allora

$$
(25)\qquad \frac{d\lambda_1}{d|z'|} = ma\frac{d}{d\varrho}\left[\frac{R\varrho\,\mathrm{sen}\,\theta}{\sqrt{B}(\sqrt{B} + D)}\right].
$$

Analogamente, avendosi

$$\frac{d\mu_1}{d|z'|} = \frac{mak}{2\pi}\int_0^\infty d\beta \int_0^\infty \frac{1}{\varrho}\frac{d^2}{d\theta^2}\left[\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{r^{\alpha,\beta}}\right)\right] d\alpha = -\frac{mak}{2\pi}\int_0^\infty \frac{1}{\varrho}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r^{0,\beta}}\right) d\beta$$

$$= -\frac{mak}{2\pi}\int_0^\infty \frac{1}{\varrho}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{\sqrt{B + 2D\frac{k}{2\pi}\beta + \left(\frac{k}{2\pi}\beta\right)^2}}\right) d\beta,$$

si ottiene

$$\frac{d\mu_1}{d|z'|} = ma\,\frac{1}{\varrho}\frac{d}{d\theta}\left[\frac{R\varrho \operatorname{sen}\theta}{\sqrt{B}(\sqrt{B}+D)}\right]. \tag{26}$$

Si ha poi finalmente

$$\frac{1}{\varrho}\frac{d\lambda_1}{d\theta} - \frac{d\mu_1}{d\varrho} - \frac{\mu_1}{\varrho} =$$

$$= \frac{ak}{2\pi}\int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty \left[\frac{1}{\varrho}\frac{d^3 F^{\alpha,\beta}}{d\varrho\, d\theta^2} - \frac{d}{d\varrho}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{d^2F^{\alpha,\beta}}{d\theta^2}\right) - \frac{1}{\varrho^2}\frac{d^2F^{\alpha,\beta}}{d\theta^2}\right] d\beta = 0,$$

quindi, osservando che è $\frac{d}{dz'} = \pm \frac{d}{d|z'|}$ secondochè $z' \gtrless 0$, le componenti delle forze elettromagnetiche dovute all' induzione sul piano conduttore σ sono:

$$\left\{\begin{aligned} H_1 &= -\frac{dF_1}{d\varrho}, & E_1 &= ma\,\frac{1}{\varrho}\frac{d\chi}{d\theta},\\ K_1 &= -\frac{1}{\varrho}\frac{dF_1}{d\theta}, & G_1 &= -ma\,\frac{d\chi}{d\varrho},\\ Z'_1 &= -\frac{dF_1}{dz'}; & N'_1 &= 0, \end{aligned}\right.$$

per $z' > 0$, avendo posto

$$\chi = \frac{R\varrho \operatorname{sen}\theta}{\sqrt{B}(\sqrt{B}+D)}, \quad F_1 = -\frac{m}{\sqrt{B}} + \frac{mak}{2\pi}\chi;$$

e per $z' < 0$ sono invece

$$\left\{\begin{aligned} H_1 &= -\frac{dF_1}{d\varrho}, & E_1 &= -ma\,\frac{1}{\varrho}\frac{d\chi}{d\theta},\\ K_1 &= -\frac{1}{\varrho}\frac{dF_1}{d\theta}, & G_1 &= ma\,\frac{d\chi}{d\varrho},\\ Z'_1 &= -\frac{dF_1}{dz'}; & Z'_1 &= 0. \end{aligned}\right.$$

Riferiamoci ora agli assi mobili $O'\,x'\,y'\,z'$ ed alle variabili x', y', z': indicando le componenti delle forze elettromagnetiche totali relative a questi assi con $(X'), (Y'), (Z'); (L'), (M'), (N')$, e ricordando che si ha

$$\left\{\begin{aligned} (X') &= (H)\cos\theta - (K)\operatorname{sen}\theta, & (L') &= (E)\cos\theta - (G)\operatorname{sen}\theta,\\ (Y') &= (H)\operatorname{sen}\theta + (K)\cos\theta, & (M') &= (E)\operatorname{sen}\theta + (G)\cos\theta,\\ (Z') &= (Z'); & (N') &= (N'), \end{aligned}\right.$$

ed inoltre

$$\frac{d}{dx'}=\cos\theta\frac{d}{d\varrho}-\frac{\operatorname{sen}\theta}{\varrho}\frac{d}{d\theta}\,;\;\frac{d}{dy'}=\operatorname{sen}\theta\frac{d}{d\varrho}+\frac{\cos\theta}{\varrho}\frac{d}{d\theta}\,,$$

si ottengono per le forze elettromagnetiche le espressioni seguenti:

$$(27)\;\left\{\begin{aligned}(\mathrm{X}')&=-\frac{d}{dx'}\{\mathrm{F}+\mathrm{F}_1\},\\(\mathrm{Y}')&=-\frac{d}{dy'}\{\mathrm{F}+\mathrm{F}_1\},\\(\mathrm{Z}')&=-\frac{d}{dz'}\{\mathrm{F}+\mathrm{F}_1\};\end{aligned}\right.\qquad(28)\;\left\{\begin{aligned}(\mathrm{L}')&=\mathrm{L}'\pm ma\frac{d\chi}{dy'},\\(\mathrm{M}')&=\quad\mp ma\frac{d\chi}{dx'},\\(\mathrm{N}')&=\mathrm{N}',\end{aligned}\right.$$

secondo che è $z'\gtrless 0$. In queste formole si ha, ricordando le espressioni di F, L'. N' date nella Nota precedente

$$\mathrm{F}=\frac{m}{\sqrt{(x'-\mathrm{R})^2+y'^2+(z'-d)^2}},$$

$$\mathrm{L}'=a\mathrm{R}\frac{d\mathrm{F}}{dz'}\,,\quad\mathrm{N}'=-a\mathrm{R}\frac{d\mathrm{F}}{dx'}\,,$$

ed inoltre

$$\chi=\frac{\mathrm{R}y'}{\sqrt{\mathrm{B}}(\sqrt{\mathrm{B}}+\mathrm{D})}\,,\;\mathrm{F}_1=-\frac{m}{\sqrt{\mathrm{B}}}+\frac{mak}{2\pi}\chi$$

essendo

$$\sqrt{\mathrm{B}}=\sqrt{(x'-\mathrm{R})^2+y'^2+[|z'|+d]^2},$$
$$\mathrm{D}=|z'|+d.$$

Consideriamo in particolare i punti al di là del piano conduttore e per i quali è $z'<0$. Avendosi allora $\mathrm{F}=\frac{m}{\sqrt{\mathrm{B}}}$ le componenti della forza elettrica totale derivano dal potenziale $\frac{mak}{2\pi}\chi$; la forza magnetica di induzione avendo per componenti $-ma\frac{d\chi}{dy'}$, $ma\frac{d\chi}{dx'}$, 0 è, come sempre, parallela al piano conduttore ed inoltre normale alla proiezione della forza elettrica sul piano conduttore $z'=0$. Per i punti M situati sulla normale al piano conduttore σ, condotta dalla posizione m della carica m ed al disotto del piano stesso, si ha:

$$(\mathrm{X}')=0\;,\;(\mathrm{Y}')=-\frac{mak}{2\pi}\cdot\frac{\mathrm{R}}{2(z'-d)^2}\;,\;(\mathrm{Z}')=0$$

$$(\mathrm{L}')=\mathrm{L}'-\frac{ma\mathrm{R}}{2[|z'|+d]^2}\;,\;(\mathrm{M}')=0\quad,\quad(\mathrm{N}')=\mathrm{N}'$$

quindi essendo

$$\frac{1}{(z'-d)^2}=\frac{1}{[|z'|+d]^2}=\frac{1}{\mathrm{M}m^2}$$

ed inoltre

$$L' = \frac{amR}{Mm^2}\ ,\quad N' = 0\ ,$$

per i punti M le componenti delle forze elettromagnetiche divengono

$$(X') = 0\ ,\ (Y') = -\frac{mak}{4\pi}\cdot\frac{1}{Mm^2}\ ,\ (Z') = 0\ ,$$

$$(L') = \frac{maR}{2}\cdot\frac{1}{Mm^2}\ ,\ (M') = 0\quad ,\quad (N') = 0\,.$$

Quando invece non si ha il piano conduttore, le componenti delle forze elettromagnetiche sono:

$$X' = 0\ ,\ Y' = 0\ ,\ Z' = -\frac{m}{Mm^2}\ ,$$

$$L' = maR\,\frac{1}{Mm^2}\ ,\ M' = 0\ ,\ N' = 0\,.$$

Si può quindi concludere che per i punti M, al di sotto del piano conduttore σ, si ha: « La forza elettrica è inversamente proporzionale al quadrato della distanza Mm ed opposta direttamente alla convezione.

La forza magnetica è pure inversamente proporzionale al quadrato della distanza Mm, e diretta, rispetto alla traiettoria della carica m, secondo la regola di Ampère. Il suo rapporto con la forza magnetica che si ha nei punti M, quando manca il piano conduttore (con l'approssimazione considerata), è uguale ad $\frac{1}{2}$ ».

A resultati analoghi è pervenuto il prof. Levi-Civita [1] nel caso del campo elettromagnetico generato dalla carica in moto di traslazione uniforme.

Matematica. — *Moti di un punto libero a caratteristiche indipendenti.* Nota di A. F. Dall'Acqua, presentata dal Corrispondente G. Ricci.

Matematica. — *Sulle corrispondenze algebriche fra due curve.* Nota di Michele de Franchis, presentata dal Corrispondente E. Castelnuovo.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

[1] Vedi mem. cit. pag. 42. Si avverta che io ho qui tenuto conto soltanto dei termini in a, riguardando k come un parametro finito. In quest'ordine di approssimazione sono evidentemente trascurabili i termini in $\frac{a^2}{k^2}$. Per fare il confronto colle espressioni, assegnate dal Levi-Civita nel caso del moto traslatorio, conviene porre nelle sue formule $h = 0$. Il fattore di riduzione per la forza magnetica risulta allora eguale ad $\frac{1}{2}$, come nel caso presente.