ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCC.

1903

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1903

Matematica. — *Sul problema di Dirichlet nello spazio iperbolico indefinito.* Nota di Guido Fubini, presentata dal Socio V. Volterra.

In una Nota, dello stesso titolo di questa (Rendiconti Lincei, 1900) il prof. Bianchi costruisce una funzione armonica in tutto lo spazio iperbolico, quando ne siano prefissi i valori all' infinito. Egli usa a tal uopo di rappresentazioni conformi di spazî non euclidei. Non sarà forse privo d' interesse il vedere che lo stesso problema si può risolvere con mezzi assai più elementari: tanto più che così si vedrà meglio perchè il singolare metodo del prof. Bianchi conduca effettivamente alla risoluzione del problema. Indichiamo con x, y, z coordinate cartesiane ortogonali; e siano R, a due costanti; poniamo l' elemento lineare uguale a

$$(1) \qquad ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\{R^2 - [(x-a)^2 + y^2 + z^2]\}^2}$$

Esso è l' elemento lineare della metrica iperbolica, di cui la sfera S di centro $(a, 0, 0)$ e di raggio R rappresenta l'assoluto. Facciamo ora l'inversione per raggi vettori reciproci

$$x = \frac{x'}{\varrho'^2} \qquad y = \frac{y'}{\varrho'^2} \qquad z = \frac{z'}{\varrho'^2} \qquad \text{dove } \varrho'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

Avremo, (sostituendo in (1))

$$ds^2 = \frac{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}{[(R^2 - a^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) + 2a\,x' - 1]^2}$$

dove, come facilmente si verifica, il denominatore rappresenta appunto il quadrato dell' equazione della sfera trasformata di S. Da ciò si deduce in particolare:

Una inversione per raggi vettori reciproci trasforma le funzioni armoniche della metrica definita considerando una sfera S *come assoluto nelle funzioni armoniche della metrica definita considerando come assoluto la trasformata di* S.

E allora un metodo ben noto permette di risolvere subito il nostro problema. Sia data su S una catena di valori U e sia P un punto interno alla sfera in cui si voglia calcolare il valore di una funzione armonica entro S (nella metrica definita da S) e che al contorno di S prenda i valori U. Presa come origine degli assi il centro O di S sia ϱ il raggio vettore OP e sia γ l'angolo che un raggio OA forma con OP. Se noi facciamo un'inversione per raggi vettori reciproci col polo nel punto Q immagine di P, il trasformato P′ di P sarà il centro della sfera S′ trasformata di S. Siano A , A′ due punti corrispondenti generici di S , S′ ; $d\sigma$, $d\sigma'$ gli elementi di area (euclidea) di due elementi corrispondenti di S , S′ ; sia γ' l'angolo che P′ A′ forma con P′ P scelto in modo di essere crescente con γ; sia R′ il raggio di S′. Immaginiamo una catena di valori U′ su S′ definita dalla $U'(A') = U(A)$. Per il teorema precedente il valore della funzione incognita in P è uguale al valore in P′ di una funzione armonica in S′ nella metrica definita da S′ come assoluto e che al contorno di S′ prende i valori U′. Essa per teoremi noti sarà la media (euclidea) dei valori U′ ; il valore cercato è perciò:

$$(\alpha) \qquad \frac{1}{4\pi R'^2}\int U' d\sigma' = \frac{1}{4\pi R'^2}\int U \frac{d\sigma'}{d\sigma} d\sigma$$

Ora evidentemente:

$$\frac{R^2}{R'^2}\,\frac{d\sigma'}{d\sigma} = \frac{d(\cos\gamma')}{d(\cos\gamma)}$$

Perciò (α) diventa:

$$(\beta) \qquad \frac{1}{4\pi R^2}\int U \frac{d(\cos\gamma')}{d(\cos\gamma)} d\sigma$$

Nel triangolo APQ è:

$$A(P)Q = \pi - \gamma'$$

donde:

$$(\gamma) \qquad PQ^2 = AP^2 + AQ^2 + 2AP\,.\,AQ\cos\gamma'$$

Poichè $\dfrac{AP}{AQ} = \dfrac{\varrho}{R}$; $PQ = OQ - OP$; $AP^2 = R^2 + \varrho^2 - 2R\varrho\cos\gamma$; $OP = \varrho$.

$OP.OQ = R^2$ la (γ) diventa:

$$\frac{(R^2-\varrho^2)^2}{\varrho^2} = \left[1 + 2\frac{\varrho}{R}\cos\gamma' + \frac{\varrho^2}{R^2}\right]\left[R^2 + \frac{R^4}{\varrho^2} - 2\frac{R^3}{\varrho}\cos\gamma\right]$$

donde:

$$\frac{d(\cos\gamma')}{d(\cos\gamma)} = \frac{(R^2-\varrho^2)^2}{[R^2+\varrho^2-2R\varrho\cos\gamma]^2}$$

e quindi (β) diventa:

$$\frac{1}{4\pi R^2}\int_\sigma U \frac{(R^2-\varrho^2)^2}{[R^2+\varrho^2-2R\varrho\cos\gamma]^2}\,d\sigma$$

che ci dà il valore cercato nel punto P e che è appunto la formula stessa del prof. Bianchi. Il teorema della media usato in questa ricerca si deduce facilmente dal teorema di Gauss per una sfera dello spazio iperbolico, quando questa sfera tende all'assoluto.

Infatti noi sappiamo che anche nello spazio iperbolico il valore di una funzione u armonica in un punto O_1 è dato da:

$$u(O_1)=\frac{1}{4\pi}\int u\,d\sigma$$

dove u rappresenta la catena dei valori di detta funzione su una sfera qualunque di centro O_1, e $d\sigma$ indica l'angolo solido, sotto cui è visto da O_1 l'elemento corrispondente della sfera stessa. Se noi passiamo ora a una rappresentazione conforme dello spazio iperbolico su uno spazio euclideo, in modo che *il punto* O *immagine di* O_1 *divenga centro della sfera* S *immagine dell'assoluto*, la formula corrispondente continua a valere, perchè le sfere col centro in O_1 sono mutate in sfere col centro in O, e gli angoli solidi col centro in O_1 restano mutati in angoli solidi equivalenti di vertice O. Basta ora far tendere la sfera, su cui si considerano i valori u, alla sfera G immagine dell'assoluto, per avere il nostro risultato. Di più si vede che la usata inversione per raggi vettori reciproci corrisponde, nello spazio iperbolico, a considerare l'assoluto come limite delle sfere che hanno per centro l'immagine di P anzichè di quelle che hanno per centro il punto O_1 immagine di O. Ecco la intima ragione su cui riposa il successo del nostro metodo, e di quello del prof. Bianchi, che, com'è ora ben chiaro, si riduce nella sua intima essenza al precedente. E di più se ne ricava un altro mezzo per risolvere il nostro problema anche senza uscire dallo spazio iperbolico.

Fisica. — *Sulla produzione dei raggi di forza elettrica a polarizzazione circolare od ellittica*. Nota di ALESSANDRO ARTOM, presentata dal Corrispondente GUIDO GRASSI.

1. I metodi attualmente conosciuti per produrre raggi di forza elettrica a polarizzazione rotatoria si basano sulle analoghe esperienze di ottica, cioè sui fenomeni di riflessione metallica, di riflessione totale, di rifrazione doppia.

Il prof. Righi [1] ottenne per primo nel 1893 raggi a polarizzazione ellittica mediante riflessione da lastre metalliche di raggi di forza elettrica

[1] A. Righi, *L'ottica delle oscillazioni elettriche.*