ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCC.

1903

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1903

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 5 aprile 1903.

P. Blaserna, Vicepresidente.

Matematica. — *Sulle quadriche coniugate in deformazione.* Nota del Socio Luigi Bianchi.

1. In una Nota inserita l'anno scorso in questi Rendiconti (Volume XI, 1° semestre, 6 aprile 1902) mi sono occupato del seguente problema, relativo alla teoria della deformazione delle superficie flessibili ed inestendibili:

Trovare tutte le coppie di superficie S, S' *(non omotetiche), rappresentabili punto per punto l'una sull'altra, in guisa che si corrispondano le loro linee assintotiche attuali, ed inoltre a qualsiasi sistema di assintotiche virtuali dell'una corrisponda un sistema della stessa specie sull'altra.*

Col nome di assintotiche *virtuali* di una superficie S si indica un qualunque sistema di linee suscettibile di diventare linee assintotiche dopo una conveniente deformazione di S; si ricordi inoltre che la nuova configurazione di S è perfettamente determinata dal sistema delle assintotiche virtuali.

Due superficie S, S' nella relazione sopra descritta si diranno *coniugate in deformazione*, volendo significare che ad ogni deformazione dell'una corrisponde una determinata deformazione dell'altra, per modo che i due problemi di trovare le superficie applicabili sopra S, o quelle applicabili sopra S', si equivalgono perfettamente.

Nella Nota citata ho stabilito la proposizione fondamentale: *Affinchè due superficie* S, S' *siano coniugate in deformazione è necessario e suffi-*

ciente che si corrispondano punto per punto, con conservazione dei sistemi coniugati e delle linee geodetiche.

Ho poi dato la soluzione del problema nell' ipotesi che S, S′ siano applicabili sopra superficie di rotazione, rilevando il caso particolare più notevole di quadriche reali di rotazione, una delle quali è un ellissoide allungato, l'altra un iperboloide a due falde. Le deformazioni coniugate di queste due quadriche si collegano coi teoremi di Guichard e colla trasformazione di Hazzidakis delle superficie a curvatura costante positiva o, ciò che è lo stesso, delle superficie a curvatura media costante.

Nella presente Nota riprendo la questione indicata per applicarla alle quadriche generali, esponendo alcuni teoremi che, sebbene discendano molto facilmente da notissime proprietà, non sembra siano stati osservati fino ad ora.

Comincio dunque dal dimostrare il teorema:

A) *Ogni quadrica a centro si può trasformare, per mezzo di una projettività, distinta da una similitudine, in un'altra quadrica in guisa che alle geodetiche dell'una corrispondano le geodetiche dell'altra; le due quadriche si possono inserire in un medesimo sistema confocale.*

Poichè le trasformazioni projettive conservano altresì i sistemi coniugati, segue che ad ogni quadrica generale è coniugata in deformazione un'altra quadrica, distinta in generale di forma dalla primitiva, e più precisamente:

B) *Ad ogni ellissoide ad assi ineguali è coniugata in deformazione un iperboloide a due falde dello stesso sistema confocale, ad un iperboloide ad una falda un altro iperboloide ad una falda nella medesima famiglia. Solo quando l'iperboloide ad una falda è ortogonale, è identico al proprio coniugato; le superficie applicabili su questa quadrica si presentano quindi a coppie di superficie distinte, come per la sfera nella trasformazione di Hazzidakis.*

Così il problema di cercare tutte le superficie applicabili sull'ellissoide equivale all'analogo per l'iperboloide coniugato a due falde; così pure gli iperboloidi a due falde si distribuiscono in coppie corrispondenti al medesimo problema d'applicabilità.

Se si ricordano le recenti ricerche di Darboux (Comptes Rendus 1899) che hanno stabilito una relazione fra le deformate delle quadriche e certe classi di superficie a linee di curvatura isoterme, è facile indurne che alle deformazioni coniugate di due quadriche generali deve corrispondere per quelle superficie isoterme, una trasformazione generalizzata della trasformazione di Hazzidakis per le superficie a curvatura media costante, che deve a questa ridursi quando le quadriche diventano di rotazione.

2. Dimostrerò dapprima geometricamente i teoremi sopra enunciati, deducendoli dalla nota proposizione di Chasles: *Le tangenti comuni a due quadriche confocali* Q, Q′ *formano una congruenza normale.* Ne segue

che le linee inviluppate sopra Q (o sopra Q′) da quelle tangenti sono geodetiche; e se, tenendo fissa Q, si fa variare Q′, nel sistema confocale, si hanno così tutte le geodetiche di Q.

Ora se eseguiamo una trasformazione projettiva che cangi il sistema di quadriche confocali (Q) in un altro sistema confocale (Q_1), su due quadriche corrispondenti Q, Q_1 si corrisponderanno ad un tempo i sistemi coniugati e le linee geodetiche (pel teorema di Chasles); le due quadriche saranno quindi coniugate in deformazione. Per ottenere una delle volute projettività basta ricordare che un sistema confocale (Q) di quadriche non è altro che una schiera inscritta in una sviluppabile del 4° ordine isotropa (circoscritta cioè al circolo immaginario all'infinito); la projettività deve dunque trasformare quella sviluppabile isotropa in un'altra isotropa, per la qual cosa basta che cangi una delle tre coniche focali nel circolo all'infinito (1).

Inversamente è noto che in qualunque generale projettività T vi è uno, ed in generale un solo sistema confocale di quadriche, che si muta in un altro tale sistema. Invero se per la trasformazione inversa T^{-1} il circolo all'infinito C si cangia nella conica Γ, la sviluppabile Σ del 4° ordine circoscritta a C e a Γ si cangia per la T in un'altra sviluppabile isotropa Σ_1, e quindi il sistema confocale inscritto in Σ nell'altro inscritto in Σ_1.

Così adunque: *In qualunque projettività dello spazio si ha un sistema di superficie (quadriche confocali) per ciascuna delle quali le geodetiche si cangiano in geodetiche sulla superficie trasformata.*

È naturale ora di domandare se possono esistere altre coppie di superficie S, S′ projettive, sulle quali si corrispondano le geodetiche. La risposta negativa si desume subito dalle considerazioni seguenti. Ogni geodetica g di S dovendo cangiarsi in una geodetica g' di S′, il piano osculatore di g si muterà in quello di g' (nel punto corrispondente). Dunque se P, P′ sono due punti corrispondenti di S, S′, e π, π' i rispettivi piani tangenti, ad ogni piano normale in P a π dovrà corrispondere un piano normale in P′ a π', indi alla normale S in P la normale alla S′ in P′. Queste due normali sono dunque *direzioni principali* in P, P′ della corrispondenza, cioè tali che ad ogni direzione normale all'una in P corrisponde una direzione normale all'altra in P′. Nel caso attuale di una projettività la terna (ortogonale) delle direzioni principali in ogni punto è quella delle normali alle tre quadriche del sistema confocale che vi passano; e per ciò S, S′ coincidono necessariamente con due quadriche corrispondenti. Queste ultime considerazioni dimostrano del resto direttamente (senza far uso della proposizione di Chasles) la proprietà della conservazione delle geodetiche.

(1) Escludiamo quelle che lasciano fisso il circolo all'infinito, perchè non sono altro che movimenti ed omotetie.

3. Passiamo ora a dare una conferma analitica ai risultati precedenti, ciò che servirà anche a determinare di ogni quadrica a centro la coniugata in deformazione.

Prendiamo l'equazione di un sistema confocale di quadriche a centro sotto la solita forma

$$\frac{x^2}{a^2+\varrho}+\frac{y^2}{b^2+\varrho}+\frac{z^2}{c^2+\varrho}=1, \tag{1}$$

indicando ϱ il parametro variabile da quadrica a quadrica, e supposto, come di consueto

$$a^2 > b^2 > c^2.$$

Le quattro quadriche singolari nella schiera (come inviluppi di 2ª classe) sono il circolo immaginario all'infinito, e le tre coniche focali

$$\frac{x^2}{a^2-c^2}+\frac{y^2}{b^2-c^2}=1, \text{ ellisse reale nel piano } z=0$$

$$\frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{z^2}{b^2-c^2}=1, \text{ iperbola nel piano } y=0$$

$$\frac{y^2}{a^2-b^2}+\frac{z^2}{a^3-c^2}+1=0, \text{ ellisse immaginaria nel piano } x=0.$$

Vogliamo ora eseguire una tale trasformazione projettiva T, che non sia nè un movimento nè un'omotetia, e cangi il sistema confocale in un altro confocale, onde la T dovrà cangiare una delle coniche focali nel circolo all'infinito. Noi vogliamo una projettività T *reale*, e perciò la terza conica focale immaginaria dovrà cangiarsi in questo circolo; quindi il piano $x=0$ nel piano all'infinito. Dopo ciò, se indichiamo x_1, y_1, z_1 le coordinate del punto in cui la T trasporta il punto (x, y, z), le formole cercate avranno la forma

$$x_1=\frac{U}{x},\ y_1=\frac{V}{x},\ z_1=\frac{W}{x},$$

dove inoltre U, V, W dovranno essere tali polinomii lineari in x, y, z che l'equazione

$$x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2=0$$

del circolo all'infinito equivalga a quella

$$(a^2-c^2)\,y^2+(a^2-b^2)\,z^2+(a^2-b^2)(a^2-c^2)=0$$

della terza conica focale. Trascurando un fattore costante d'omotetia, dovremo dunque avere

$$U^2+V^2+W^2=(a^2-c^2)\,y^2+(a^2-b^2)\,z^2+(a^2-b^2)(a^2-c^2)=0.$$

Ne segue che U, V, W non contengono x ed applicando ad U, V, W una sostituzione ortogonale, si potrà assumere senz' altro, a meno di un movimento:

$$U=\sqrt{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}\ ,\quad V=\sqrt{a^2-b^2}\,.\,z\ ,\quad W=\sqrt{a^2-c^2}\,.\,y\,.$$

Dunque abbiamo:

Le trasformazioni projettive reali che cangiano il sistema di quadriche confocali (1) *in un secondo sistema di quadriche confocali sono date, a meno di un movimento e di un' omotetia, dalle formole*:

$$x_1=\frac{\sqrt{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}}{x}\ ,\quad y_1=\sqrt{a^2-b^2}\,.\,\frac{z}{x}\ ,\quad z_1=\sqrt{a^2-c^2}\,.\,\frac{y}{x}\,. \tag{2}$$

Queste rappresentano un' omografia biassiale armonica avente per assi le due rette

$$x=\pm\sqrt[4]{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}\ ,\quad y\sqrt[4]{a^2-c^2}\mp z\sqrt[4]{a^2-b^2}=0\,.$$

L' omografia biassiale (2) cangia effettivamente il sistema confocale (1) nell' altro

$$\frac{x_1^{\,2}}{\dfrac{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}{a^2+\varrho}}+\frac{y_1^{\,2}}{\dfrac{(a^2-b^2)(c^2+\varrho)}{a^2+\varrho}}+\frac{z_1^{\,2}}{\dfrac{(a^2-c^2)(b^2+\varrho)}{a^2+\varrho}}=1\,, \tag{3}$$

che è pure un sistema confocale, anzi coincide col sistema stesso, come si vede osservando che, posto

$$\varrho_1=\frac{b^2c^2-a^2(b^2+c^2+\varrho)}{a^2+\varrho}\,, \tag{4}$$

la (3) si scrive

$$\frac{x_1^{\,2}}{a^2+\varrho_1}+\frac{y_1^{\,2}}{b^2+\varrho_1}+\frac{z_1^{\,2}}{c^2+\varrho_1}=1\,. \tag{3*}$$

Ai valori singolari di ϱ:

$$\varrho=-a^2\ ,\ -b^2\ ,\ -c^2,\ \infty$$

corrispondono ordinatamente i valori

$$\varrho_1=\infty\,,\ -c^2\,,\ -b^2\,,\ -a^2\,;$$

l' omografia (2) scambia quindi fra loro le due coniche focali reali e l' immaginaria col circolo all' infinito [1].

[1] Un sistema confocale di quadriche ammette del resto (come un fascio) un gruppo di 32 collineazioni in sè; ma quelle reali, utili al nostro scopo, si riducono essenzialmente alla (2).

Su due quadriche corrispondentisi per la (2) nel sistema confocale si corrisponderanno i sistemi coniugati e le linee geodetiche (n. 2); esse saranno cioè quadriche coniugate in deformazione. Dalle formole effettive (3) o (3*) deduciamo poi:

All' ellissoide a tre assi ineguali

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

è coniugato in deformazione l' iperboloide confocale a due falde

$$\frac{x_1^{\,2}}{\dfrac{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}{a^2}}-\frac{y_1^{\,2}}{\dfrac{(a^2-b^2)\,c^2}{a^2}}-\frac{z_1^{\,2}}{\dfrac{(a^2-c^2)\,b^2}{a^2}}=1\,;$$

all' iperboloide ad una falda

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}-\frac{z^2}{C^2}=1 \quad (A^2>B^2)$$

è coniugato l' iperboloide della stessa famiglia

$$\frac{x_1^{\,2}}{\dfrac{(A^2-B^2)(A^2+C^2)}{A^2}}+\frac{y_1^{\,2}}{\dfrac{(A^2-B^2)\,C^2}{A^2}}-\frac{z_1^{\,2}}{\dfrac{(A^2+C^2)\,B^2}{A^2}}=1.$$

Si osserverà di più che, se l' ellissoide diventa di rotazione attorno all' asse maggiore diventando $b=c$, anche l' iperboloide coniugato diventa di rotazione e se, sostituendo a questo un iperboloide omotetico, si rendono eguali i due assi primarî delle due quadriche, quelli secondarî $2b$, $2b_1$ risultano legati dall' identità:

$$\frac{1}{b^2}+\frac{1}{b_1^{\,2}}=\frac{1}{a^2}.$$

Questa, come già rilevai nella Nota sopra citata, è appunto la relazione che intercede fra le due quadriche di rotazione coniugate, nello sviluppo dei teoremi di Guichard.

Notevole è ancora il caso in cui l' iperboloide ad una falda è *ortogonale* (1), il che ha luogo quando

$$\frac{1}{A^2}+\frac{1}{C^2}=\frac{1}{B^2}.$$

Allora soltanto l' iperboloide coniugato in deformazione coincide con esso e l' omografia biassiale (2), o

$$x_1=\frac{\sqrt{(A^2-B^2)(A^2+C^2)}}{x}\,,\quad y_1=\sqrt{A^2-B^2}\,\frac{z}{x}\,,\quad z_1=\sqrt{A^2+C^2}\,\frac{y}{x}\,,$$

(1) Per la definizione e le proprietà delle quadriche ortogonali. Cf. D'Ovidio, *Geometria analitica* (pag. 458 della terza edizione).

trasforma l'iperboloide in sè, conservandone le linee geodetiche. Ne segue: *Ogni deformazione dell'iperboloide ortogonale ad una falda ne individua una seconda, sicchè le superficie applicabili su questa quadrica si presentano a coppie di superficie coniugate (distinte di forma).*

4. I teoremi enunciati al n. 1 sono così dimostrati appoggiandosi, per quanto riguarda la conservazione delle linee geodetiche, alle osservazioni geometriche del n. 2. Vediamo ora come anche questa proposizione possa facilmente confermarsi per via analitica, ricorrendo alle condizioni caratteristiche trovate dal Dini per la rappresentazione geodetica di una superficie sopra un' altra (1).

Basta per questo scrivere l'elemento lineare dello spazio in coordinate ellittiche ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, riferite al sistema confocale (1), designando ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 rispettivamente i valori del parametro ϱ per l'ellissoide, iperboloide ad una o a due falde del sistema (1) che passano pel punto (x, y, z).

Si ha allora:

$$x^2=\frac{(a^2+\varrho_1)(a^2+\varrho_2)(a^2+\varrho_3)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}\,,\quad y^2=\frac{(b^2+\varrho_1)(b^2+\varrho_2)(b^2+\varrho_3)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}\,,$$

$$z^2=\frac{(c^2+\varrho_1)(c^2+\varrho_2)(c^2+\varrho_3)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}\,,$$

e corrispondentemente pel

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2\,,$$

$$(5)\quad ds^2=\frac{1}{4}\left\{\frac{(\varrho_1-\varrho_2)(\varrho_1-\varrho_3)}{(a^2+\varrho_1)(b^2+\varrho_1)(c^2+\varrho_1)}d\varrho_1{}^2+\frac{(\varrho_2-\varrho_3)(\varrho_2-\varrho_1)}{(a^2+\varrho_2)(b^2+\varrho_2)(c^2+\varrho_2)}d\varrho_2{}^2+\right.$$
$$\left.+\frac{(\varrho_3-\varrho\;)(\varrho_3-\varrho_2)}{(a^2+\varrho_3)(b^2+\varrho_3)(c^2+\varrho_3)}d\varrho_3{}^2\right\},$$

che scriviamo anche

$$(5^*)\qquad ds^2=\mathrm{H}_1{}^2\,d\varrho_1{}^2+\mathrm{H}_2{}^2\,d\varrho_2{}^2+\mathrm{H}_3{}^2\,d\varrho_3{}^2\,.$$

L'omologia biassiale (2) applicata al sistema confocale (1) dà

$$x_1{}^2=\frac{(a^2-b^2)^2(a^2-c^2)^2}{(a^2+\varrho_1(a^2+\varrho_2)(a^2+\varrho_3)}\,,\quad y_1{}^2=\frac{(a^2-b^2)^2}{b^2-c^2}\frac{(c^2+\varrho_1)(c^2+\varrho_2)(c^2+\varrho_3)}{(a^2+\varrho_1)(a^2+\varrho_2)(a^2+\varrho_3)}\,,$$

$$z_1{}^2=-\frac{(a^2-c^2)^2}{b^2-c^2}\frac{(b^2+\varrho_1)(b^2+\varrho_2)(b^2+\varrho_3)}{(a^2+\varrho_1)(a^2+\varrho_2)(a^2+\varrho_3)}\,.$$

Calcolando di qui il $ds_1{}^2=dx_1{}^2+dy_1{}^2+dz_1{}^2$, si trova

$$(6)\quad ds_1{}^2=\frac{(a^2-b^2)^2(a^2-c^2)^2}{(a^2+\varrho_1)(a^2+\varrho_2)(a^2+\varrho_3)}\left\{\frac{\mathrm{H}_1{}^2d\varrho_1{}^2}{a^2+\varrho_1}+\frac{\mathrm{H}_2{}^2d\varrho_2{}^2}{a^2+\varrho_2}+\frac{\mathrm{H}_3{}^2d\varrho_3{}^2}{a^2+\varrho_3}\right\}.$$

(1) *Sopra un problema della teoria generale delle rappresentazioni geografiche* (Annali di Matematica, tomo III, 1869). Cf. anche Darboux, *Leçons* etc. tomo III, pag. 47.

Confrontando gli elementi lineari (5), (6) per due quadriche corrispondenti, si vede subito che essi stanno fra loro nella relazione caratteristica che assicurano, secondo il Dini (l. c.), la corrispondenza delle linee geodetiche.

5. Dimostriamo ora che i risultati precedenti si estendono subito allo spazio ad n dimensioni S_n (euclideo) (1), fornendo così un semplice esempio di spazî ad $n-1$ dimensioni (quadriche), immersi nell' S_n, che vengono a rappresentarsi geodeticamente (e projettivamente) gli uni sugli altri.

Consideriamo nello spazio S_n il sistema di quadriche confocali

$$(7)\qquad \frac{x_1^2}{a_1+\varrho}+\frac{x_2^2}{a_2+\varrho}+\cdots+\frac{x_n^2}{a_n+\varrho}=1\,,$$

e diciamo $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$ le corrispondenti coordinate ellittiche; abbiamo le formole

$$(8)\qquad x_i^2=\frac{(a_i+\varrho_1)(a_i+\varrho_2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(a_i+\varrho_n)}{(a_i-a_1)(a_i-a_2)\ldots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\ldots(a_i-a_n)}$$

$$(8^*)\qquad \frac{\partial x_i}{\partial \varrho_k}=\frac{1}{2}\,\frac{x_i}{a_i+\varrho_k}\,,$$

e quindi pel $ds^2=dx_1^2+dx_2^2+\cdots+dx_n^2$ la forma ortogonale

$$(9)\qquad ds^2=H_1^2\,d\varrho_1^2+H_2^2\,d\varrho_2^2+\cdots H_n^2\,d\varrho_n^2\,,$$

con

$$(9^*)\qquad H_i^2=\frac{1}{4}\,\frac{(\varrho_i-\varrho_1)(\varrho_i-\varrho_2)\ldots(\varrho_i-\varrho_{i-1})(\varrho_i-\varrho_{i+1})\ldots(\varrho_i-\varrho_n)}{(a_1+\varrho_i)(a_2+\varrho_i)\ldots\ldots\ldots\ldots(a_n+\varrho_i)}$$

Eseguiamo ora la trasformazione projettiva data dalle formole

$$(10)\qquad \overline{x}_1=\frac{1}{x_1}\,,\quad \overline{x}_i=\frac{1}{\sqrt{a_1-a_i}}\,\frac{x_i}{x_1}\qquad (i=2\,,3\ldots n)$$

dove le $\overline{x}$ sono le coordinate del punto trasformato.

Questa cangia il sistema di quadriche confocali (7) nell' altro pure confocale:

$$(10^*)\qquad \frac{\overline{x}_1^{\,2}}{\dfrac{1}{a_1+\varrho}}+\sum_i^{2\ldots n}\frac{\overline{x}_i^{\,2}}{\dfrac{a_i+\varrho}{(a_1-a_i)(a_1+\varrho)}}=1\,.$$

Ora sussiste nell' S_n la proposizione generalizzata di Chasles: Le tangenti comuni ad $n-1$ quadriche del sistema confocale formano le normali di un' ipersuperficie, e quindi inviluppano su ciascuna quadrica un sistema di

(1) I medesimi teoremi valgano del resto, più in generale, per gli spazî di curvatura costante.

linee geodetiche. Tenendo fissa una Q delle $n-1$ quadriche e facendo variare le altre $n-2$ si ottengono così tutte le geodetiche di Q. Di qui deduciamo: *Sopra due quadriche corrispondenti dei sistemi confocali projettivi* (7), (10*) *si corrispondono le linee geodetiche.* La medesima cosa segue anche da considerazioni geometriche analoghe a quelle svolte alla fine del n. 2. La conferma analitica risulta nuovamente dal calcolo dell' elemento lineare

$$\overline{ds}^2 = \sum_i d\bar{x}_i^2 = \sum_i^{1\dots n} a_{kl}\, d\varrho_k\, d\varrho_k$$

dello spazio trasformato.

Dallo (10) abbiamo

$$\frac{\partial \bar{x}_1}{\partial \varrho_k} = -\frac{1}{x_1^2}\frac{\partial x_1}{\partial \varrho_k}\,, \quad \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial \varrho_k} = \frac{1}{x_1\sqrt{a_1-a_i}}\left\{\frac{\partial x_i}{\partial \varrho_k} - \frac{x_i}{x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \varrho_k}\right\},$$

e quindi, avendo riguardo alle (8*):

$$a_{kl} = \sum_i^{1\dots n}\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial \varrho_k}\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial \varrho_l} = \frac{1}{4x_1^2}\left\{\frac{1}{(a_1+\varrho_k)(a_1+\varrho_l)} + \sum_i^{2\dots n}\frac{(a_1-a_i)\,x_i^2}{(a_1+\varrho_k)(a_1+\varrho_l)(a_i+\varrho_k)(a_i+\varrho_l)}\right\}.$$

Naturalmente quando $k \neq l$ deve risultare $a_{kl}=0$, perchè il sistema confocale (10*) è un sistema n^{plo} ortogonale, la qual cosa del resto è facile verificare, sussistendo l' identità

$$\sum_i^{2\dots n}\frac{(a_i-a_1)\,x_i^2}{(a_i+\varrho_k)\,(a_i+\varrho_k)} = 1\,, \text{ per } k \neq l\,.$$

Per $l=k$ abbiamo poi

$$a_{kk} = \mathrm{H}_k^2 = \frac{1}{4x_1^2\,(a_1+\varrho_k)^2}\left\{1 + \sum_i^{2\dots n}\frac{(a_1-a_i)\,x_i^2}{(a_i+\varrho_k)^2}\right\},$$

ossia per la (8)

$$(11)\ \mathrm{H}_k^2 = \frac{1}{4x_1^2(a_1+\varrho_k)^2}\left\{1 - \sum_i^{2\dots n}\frac{(a_i+\varrho_1)(a_i+\varrho_2)\dots(a_i+\varrho_n)}{(a_i-a_2)\dots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\dots(a_i-a_n)}\frac{1}{(a_i+\varrho_h)^2}\right\}$$

Ora la quantità fra parentesi $\{\ \}$ nel secondo membro eguaglia la frazione

$$\frac{(\varrho_k-\varrho_1)\,(\varrho_k-\varrho_2)\dots(\varrho_k-\varrho_{k-1})\,(\varrho_k-\varrho_{k+1})\dots(\varrho_k-\varrho_n)}{(a_2+\varrho_k)(a_3+\varrho_h)\,\dots\,(a_n+\varrho_h)},$$

come si vede decomponendo quest' ultima in frazioni semplici rispetto a ϱ_k. Sostituendo poi nella (11) per x_1^2 il suo valore dato dalla (8) per $i=1$, ne viene

$$\mathrm{H}_k^2 = \frac{(a_1-a_2)\,(a_1-a_3)\dots(a_1-a_n)}{(a_1+\varrho_1)\,(a_1+\varrho_2)\dots(a_1+\varrho_n)}\cdot\frac{\mathrm{H}_k^2}{a_1+\varrho_k}\,.$$

Pel quadrato dell' elemento lineare

$$\overline{ds}^2 = \sum_i \overline{dx}_i^2$$

abbiamo in fine

$$\overline{ds}^2 = \frac{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)\ldots(a_1 - a_n)}{(a_1 + \varrho_1)(a_1 + \varrho_2)\ldots(a_1 + \varrho_n)} \left\{ \frac{H_1^2\, d\varrho_1^2}{a_1 + \varrho_1} + \frac{H_2^2\, d\varrho_2^2}{a_1 + \varrho_2} + \cdots + \frac{H_n^2\, d\varrho_n^2}{a_1 + \varrho_n} \right\}.$$

Da questa formola, che per $n = 3$ si riduce alla (6), si trae la conferma che su due quadriche corrispondenti nei sistemi confocali (7), (10*) si corrispondono le linee geodetiche.

Matematica. — *Sulla nozione di gruppo complementare e di gruppo derivato nella teoria dei gruppi continui di trasformazioni.* Nota del Socio LUIGI BIANCHI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sulle relazioni algebriche fra le funzioni ϑ di una variabile e sul teorema di addizione.* Nota II del Corrispondente ALFREDO CAPELLI.

Nel primo § di questa Nota, prosecuzione immediata della Nota precedente di cui si sono conservate tutte le notazioni, viene ulteriormente discussa e semplificata, nel supposto delle caratteristiche intere, una formola generale già in quella stabilita per caratteristiche reali o complesse quali si vogliano. Il secondo § è dedicato alla determinazione di tutte quelle espressioni, di tipo analogo a quello che si presenta nella formola fondamentale di Jacobi, che godono delle proprietà di essere *invarianti* rispetto alla sostituzione ortogonale jacobiana. Dimostro come esse sieno tutte racchiuse nell' unica espressione generale:

$$[\gamma, g] + (-1)^{\varepsilon(g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g) + \eta\gamma_1} [\gamma + \varepsilon, g + \eta].$$

Queste ricerche si applicano poi, nel terzo §, all' ulteriore semplificazione della formola generale di addizione delle funzioni ϑ con caratteristiche intere. Questa formola generale, che presentava finora l' inconveniente di essere di forma *quadrinomia*, viene ridotta a forma *binomia*, pur mantenendo la completa generalità delle caratteristiche.