ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCC.

1903

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1903

Matematica. — *Moti di un punto libero a caratteristiche indipendenti.* Nota di A. F. Dall'Acqua, presentata dal Corrispondente G. Ricci.

La questione che mi propongo di trattare in questa Nota, riguarda il moto di un punto libero, quando le equazioni differenziali del movimento si possano scindere in due gruppi di cui uno si integri indipendentemente dall'altro.

Secondo il Volterra, questi moti si diranno « a caratteristiche indipendenti ». Io suppongo di più che le « caratteristiche » del Volterra coincidano con le componenti della velocità secondo un triedro trirettangolo.

Devono allora le componenti della velocità (caratteristiche) e quelle della forza (date) esser funzioni soltanto del tempo, e il triedro deve inviluppare una terna ortogonale a invarianti costanti.

Così le equazioni vengono appunto divise in due gruppi. Uno contiene le caratteristiche, le loro derivate rispetto al tempo, e le componenti della forza; l'altro contiene le variabili, le loro derivate e le caratteristiche.

In tal caso è agevole e comodo riferire il movimento ad una terna ortogonale rettilinea (*terna del Cattaneo*). Le caratteristiche rispetto a questa si hanno allora per quadrature dal primo gruppo delle equazioni ricordate. Le caratteristiche rispetto alla terna primitiva sono legate a queste da relazioni lineari.

Le equazioni del secondo gruppo, in coordinate cartesiane ortogonali danno poi per quadrature le equazioni del moto in termini finiti.

Quanto alle linee di forza si riconosce facilmente che esse costituiscono una congruenza appartenente ad una terna ortogonale a invarianti costanti. Una tal congruenza si può sempre considerare generata da un'elica circolare di forma invariabile che si muova con moto di traslazione, ortogonalmente al proprio asse, in tutte le direzioni possibili.

È agevole inoltre dimostrare che le tangenti di una tal congruenza non possono appartenere a un complesso lineare. Se ne trae che il nostro caso in cui l'integrazione delle equazioni del moto si ottiene per quadrature, non ha attinenza con quello in cui la forza appartiene ad un complesso lineare, benchè sembri aver con esso talune analogie.

1. Suppongo noti gli elementi del calcolo differenziale assoluto, o almeno le poche formole fondamentali riportate nel § 1 della mia Nota *Sulle terne ortogonali di congruenze a invarianti costanti* [1].

Immaginiamo che le coordinate x_1, x_2, x_3 siano variabili col tempo, e

[1] Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, Seduta del 1° marzo 1903.

si abbia

$$x_r = x_r(t) \qquad (r = 1, 2, 3)$$

e poniamo

$$(1) \qquad \frac{dx_r}{dt} = x'_r = \sum_1^3{}_h \lambda_h^{(r)} p_h .$$

Le p_h costituiscono, secondo il Volterra [1], delle *caratteristiche* di un moto libero.

L'equazione dei lavori virtuali, che in coordinate cartesiane ortogonali si scrive

$$\sum_1^3{}_r (X_r - m x''_r)\, \delta x_r = 0$$

(X_1, X_2, X_3 componenti della forza, m massa del punto), in coordinate generali si scriverà

$$\sum_1^3{}_{rs} [X^{(r)} - m(x''_r + \sum{}_{pq} \left\{ {p\ q \atop r} \right\} x'_p x'_q)]\, a_{rs}\, \delta x_s = 0 .$$

Sostituendo in questa a x'_r i valori dati dalla (1) e ad x''_r quelli che se ne ricavano per derivazione rispetto a t, avremo l'equazione dei lavori virtuali sotto la forma

$$(2) \qquad \Sigma_h [P_h - m(p'_h - \Sigma_{kl}\, \gamma_{hkl}\, p_k p_l)]\, \delta\omega_h = 0$$

dove

$$P_h = \Sigma_r X^{(r)} \lambda_{h/r}$$

e

$$\delta\omega_h = \Sigma_r\, \delta x_r\, \lambda_{h/r}$$

rappresentano rispettivamente le componenti della forza e degli spostamenti virtuali, secondo le tangenti in ogni punto alle linee delle congruenze $[\lambda_h]$.

Le equazioni di un moto libero sono allora le (1) e quelle che si ricavano dalla (2) suppostevi le $\delta\omega_h$ completamente arbitrarie.

Esse saranno adunque [2]

$$(\mathrm{I}) \qquad x'_r = \Sigma_h \lambda_h^{(r)} p_h$$

$$(\mathrm{II}) \qquad P_h = m(p'_h - \Sigma_{kl}\, \gamma_{hkl}\, p_k p_l) .$$

2. Nel nostro caso le equazioni differenziali si devono dividere in due gruppi integrabili successivamente, e precisamente le equazioni (II) si de-

[1] V. Volterra, *Sopra una classe di equazioni dinamiche*. Atti della R. Accademia delle Scienze, Torino, vol. 33, 1898.

[2] Cfr. Volterra, Memoria citata.

vono integrare indipendentemente dalle (I): esse non devono quindi contenere le x_r.

Perciò è necessario e sufficiente che le p_h, le P_h e i coefficienti delle $p_k p_l$ (cioè $\gamma_{hkl} + \gamma_{hlk}$) siano indipendenti dalle x_r. Questi ultimi poi, quando immaginiamo (come facciamo in realtà) le $[\lambda]$ indipendenti dal tempo, risulteranno costanti.

Il problema adunque dei moti di un punto libero a caratteristiche indipendenti, ci conduce alla ricerca delle congruenze i cui invarianti sodisfanno alle condizioni

$$\gamma_{hkl} + \gamma_{hlk} = \text{cost}. \tag{3}$$

Si trae intanto da queste che i γ con due indici uguali sono tutti costanti. Inoltre fra i γ passano, come è noto, le relazioni

$$\gamma_{hk} \equiv \frac{\partial \gamma_{h+1\,h+2\,k+1}}{\partial s_{k+2}} - \frac{\partial \gamma_{h+1\,h+2\,k+2}}{\partial s_{k+1}} - \Sigma_l\, \gamma_{h+1\,h+2\,l}(\gamma_{lk+1\,k+2} - \gamma_{k+2\,k+1}) -$$

$$- \gamma_{hh+1\,k+1}\, \gamma_{hh+2\,k+2} + \gamma_{hh+1\,k+2}\, \gamma_{hh+2\,k+1} = 0\,.$$

Tenendo conto delle (3) le $\gamma_{hh} = 0$ mostrano che tutti i γ_{hkl} sono costanti [1]. Dunque le $[\lambda]$ costituiscono una terna a invarianti costanti.

3. Se poniamo

$$\mu_{h|r} = \Sigma_k\, \alpha_{hk}\, \lambda_{k|r}$$

($\alpha_{hk} = \cos \mu_h \lambda_k = \text{cost.}$) e

$$q_h = \Sigma_k\, \alpha_{hk} p_k$$
$$Q_h = \Sigma_k\, \alpha_{hk} P_k$$

potremo sostituire alle (I) (II) le

$$x'_r = \Sigma_h\, \mu_h^{(r)}\, q_h \tag{I$_1$}$$

$$Q_h = m(q'_h - \Sigma_{kl}\, g_{hkl}\, q_k\, q_l) \tag{II$_1$}$$

dove vale ancora una relazione del tipo

$$Q_h = \Sigma_r\, X^{(r)}\, \mu_{h|r}\,. \tag{4}$$

[1] Cfr. la mia Nota citata: *Sulle terne ortogonali* ecc. Con le notazioni ivi usate, le (3) si scrivono

$$H_h = \text{cost.}\,, \quad V_h = \text{cost.}\,, \quad \tau_h - \tau_k = \text{cost.}$$

Le $\gamma_{hh} = 0$, annullandosi in esse la parte differenziale, equivalgono allora alle (2) della Nota stessa, e danno

$$\tau_{h+1}\, \tau_{h+2} = \text{cost.} \qquad (h = 1, 2, 3)$$

da cui

$$\tau_h(\tau_{h+1} - \tau_{h+2}) = \text{cost.}$$

ossia anche

$$\tau_h = \text{cost.} \qquad \text{c. d. d.}$$

Come ho fatto osservare nella Nota già ricordata, la $[\mu]$ è ancora una terna a invarianti costanti, e se supponiamo che essa coincida con la terna del Cattaneo ($g_{123} = -g_{213} = g$, $g_{hkl} = 0$ in ogni altro caso), le (II_1) assumono la forma

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{m}\,Q_1 = q'_1 - g q_2 q_3\,, \\ \dfrac{1}{m}\,Q_2 = q'_2 + g q_1 q_3\,, \\ \dfrac{1}{m}\,Q_3 = q'_3\,. \end{cases}$$

La terza dà intanto

$$(6)\qquad q_3 = \frac{1}{m}\left[\int Q_3\,dt + c_3\right]$$

e, posto

$$(7)\qquad \lambda' = \frac{d\lambda}{dt} = g q_3\,,$$

dove per la (6) λ' è nota, le due prime si scrivono

$$q'_1 - \lambda' q_2 = \frac{1}{m}\,Q_1\,, \qquad q'_2 + \lambda' q_1 = \frac{1}{m}\,Q_2\,.$$

Integriamo le equazioni che si ottengono da queste uguagliando a zero i secondi membri, e applichiamo poi il metodo di Lagrange, della variazione delle costanti arbitrarie.

Le equazioni senza secondi membri sono

$$q'_1 - \lambda' q_2 = 0\,, \qquad q'_2 + \lambda' q_1 = 0\,.$$

Il loro sistema integrale generale, come è noto, è

$$q_1 = a\cos\lambda + b\,\mathrm{sen}\,\lambda\,, \qquad q_2 = b\cos\lambda - a\,\mathrm{sen}\,\lambda$$

dove a, b designano per ora due costanti arbitrarie, e λ è integrale della (7) [1].

Il metodo di Lagrange dà

$$q'_1 - \lambda' q_2 = \left\{\frac{\partial q_1}{\partial t} - \lambda' q_2\right\} + \frac{\partial q_1}{\partial a}\,a' + \frac{\partial q_1}{\partial b}\,b' = \frac{1}{m}\,Q_1$$

$$q'_2 + \lambda' q_1 = \left\{\frac{\partial q_2}{\partial t} + \lambda' q_1\right\} + \frac{\partial q_2}{\partial a}\,a' + \frac{\partial q_2}{\partial b}\,b' = \frac{1}{m}\,Q$$

[1] È opportuno notare che nelle formole seguenti λ introduce in realtà una sola costante (la c_3 di q_3): la costante additiva potrà ritenersi inclusa in a, b.

cioè (essendo nulle le quantità chiuse tra le parentesi)

$$a' = \frac{1}{m}(Q_1 \cos\lambda - Q_2 \operatorname{sen}\lambda)$$
$$b' = \frac{1}{m}(Q_2 \cos\lambda + Q_1 \operatorname{sen}\lambda).$$

Gli integrali generali delle (II_1) sono allora, tenuto conto della (7),

$$q_1 = \frac{1}{m}\left[\cos\lambda\left\{\int(Q_1 \cos\lambda - Q_2 \operatorname{sen}\lambda)\,dt + c_1\right\} + \right.$$
$$\left. + \operatorname{sen}\lambda\left\{\int(Q_2 \cos\lambda + Q_1 \operatorname{sen}\lambda)\,dt + c_2\right\}\right]$$
$$q_2 = \frac{1}{m}\left[\cos\lambda\left\{\int(Q_2 \cos\lambda + Q_1 \operatorname{sen}\lambda)\,dt + c_2\right\} - \right.$$
$$\left. - \operatorname{sen}\lambda\left\{\int(Q_1 \cos\lambda - Q_2 \operatorname{sen}\lambda)\,dt + c_1\right\}\right]$$
$$q_3 = \frac{1}{m}\left[\int Q_3\,dt + c_3\right]$$

4. Per integrare ora le (I_1) converrà sostituire in esse alle $\mu_h^{(r)}$ e q_h i valori trovati nella Nota citata e nel paragrafo precedente. In coordinate cartesiane ortogonali avremo

$$x' = a \cos(\lambda - gz - c) + b \operatorname{sen}(\lambda - gz - c)$$
$$y' = b \cos(\lambda - gz - c) - a \operatorname{sen}(\lambda - gz - c)$$
$$z' = q_3 = \frac{\lambda'}{g}.$$

La terza ci mostra che gz e λ differiscono per una costante. Indicando ancora con x, y, z un nuovo sistema di coordinate cartesiane, ottenuto dal precedente facendo ruotare gli assi x, y intorno all'asse z dell'angolo costante $\lambda - gz - c$ avremo $x' = a$, $y' = b$, ed

$$x = \int a\,dt + C_1$$
$$y = \int b\,dt + C_2$$
$$z = \frac{\lambda}{g} + C_3$$

che dipendono dalle 6 costanti c_1, c_2, c_3; C_1, C_2, C_3.

Queste equazioni ci inducono facilmente a ritenere (ma ciò non era evidente a priori) che si possa dare alle equazioni differenziali del moto una forma ben semplice e immediatamente integrabile, quando le si riconducano ai differenziali secondi.

Infatti basterebbe derivarle due volte rispetto a t, per ridurle alla nota forma

$$(8) \qquad \begin{cases} X = mx'' \\ Y = my'' \\ Z = mz'' \end{cases}$$

e dedurne l'integrabilità per quadrature.

Mostriamo però come anche si possano ricavare direttamente i primi membri di tali equazioni.

Tenendo conto della 3ª equazioni dei due gruppi (I_1) (II_1), si ha il valore di z, da cui si ricava quello di $gz + c$. Indicandolo brevemente con θ, le (4) danno, in coordinate cartesiane ortogonali

$$\begin{aligned} X = X_1 &= Q_1 \cos\theta - Q_2 \operatorname{sen}\theta \\ Y = X_2 &= Q_2 \cos\theta + Q_1 \operatorname{sen}\theta \\ Z = X_3 &= Q_3 \end{aligned}$$

Essendo X, Y, Z funzioni soltanto di t, nelle (8) restano separate le variabili, e l'integrazione si fa senz'altro per quadrature.

5. Restano ora da determinare le linee di forza.

Dalle (4) abbiamo

$$X_r = \Sigma_h Q_h \mu_{h|r}$$

e indicando con $[\nu]$ la congruenza delle linee di forza, ne ricaviamo

$$\nu_r = \frac{X_r}{\sqrt{\Sigma_s X_s X^{(s)}}} = \frac{\Sigma_h Q_h \mu_{h|r}}{\sqrt{\Sigma_k Q^2{}_k}}$$

ossia, posto

$$Q_h = \cos\alpha_h \sqrt{\Sigma_k Q^2{}_k}$$

dove le a_h risultano costanti,

$$\nu_r = \Sigma_h \cos\alpha_h \mu_{h|r}$$

cioè la $[\nu]$ forma angoli costanti (rispetto alle coordinate) con le $[\mu]$: essa appartiene dunque ad una terna ortogonale a invarianti costanti.

Per ciò che ho dimostrato nella mia Nota più volte citata, le linee di forza sono allora eliche circolari congruenti, con gli assi paralleli all'asse z, e le cui normali principali nei punti di un medesimo piano $z =$ cost. sono tutte parallele: il che equivale perfettamente a ciò che con linguaggio cinematico abbiamo detto nell'Introduzione.

È importante infine notare che il nostro caso in cui l'integrazione delle equazioni del moto si ottiene con quadrature, non si può in alcun modo ricondurre a quello in cui la forza che sollecita il punto appartenga a complessi lineari (nel qual caso le equazioni del moto ammettono, come ben si sa, integrali primi).

Possiamo infatti dimostrare che le tangenti ad una generica congruenza ad invarianti costanti non possono appartenere ad un complesso lineare. Perchè ciò fosse i loro coseni direttori

$$X = \lambda_1 = \alpha_1 \cos(gz + c) - \alpha_2 \operatorname{sen}(gz + c)$$
$$Y = \lambda_2 = \alpha_2 \cos(gz + c) + \alpha_1 \operatorname{sen}(gz + c)$$
$$Z = \lambda_3 = \alpha_3$$

(α_1, α_2, α_3 cost.) dovrebbero soddisfare in ogni punto ad una equazione del tipo

$$aX + bY + cZ + p(yZ - zY) + q(zX - xZ) + r(xY - yX) = 0$$

(a, b, c, p, q, r, cost.): ossia

$$x(rY - qZ) + y(pZ - rX) + z(qX - pY) + aX + bY + cZ = 0$$

Perchè questa sia verificata per ogni valore di x, y, z, dovranno esser nulli i coefficienti di x, y per ogni valore di z, da cui (essendo $Z =$ cost., X, Y variabili), $r = 0$, e conseguentemente $p = q = 0$.

L'equazione si riduce allora ad

$$aX + bY + cZ = 0$$

che non ammette soluzioni, essendo le X, Y linearmente indipendenti.

Meccanica. — *Traiettorie dinamiche di un punto libero, sollecitato da forze conservative.* Nota di A. F. Dall'Acqua, presentata dal Corrispondente G. Ricci.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sull'equilibrio d'un ellissoide planetario di rivoluzione elastico isotropo.* Nota I di A. Viterbi, presentata dal Corrispondente G. Ricci.

È ben nota l'importanza che ha l'ellissoide di rivoluzione come figura d'equilibrio d'una massa fluida uniformemente ruotante, le cui particelle si attraggono secondo la legge di Newton; un tale ellissoide è infatti forma possibile d'un corpo planetario allo stato di nebulosa. Mi parve interessante lo studio dell'equilibrio nel caso in cui il pianeta perduto ormai il carattere di massa fluida debba riguardarsi come un solido ruotante, in equilibrio elastico, quando le forze di massa, a cui è soggetto, sono la forza centrifuga e l'attrazione.