ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCC.

1903

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1903

Possiamo infatti dimostrare che le tangenti ad una generica congruenza ad invarianti costanti non possono appartenere ad un complesso lineare. Perchè ciò fosse i loro coseni direttori

$$\begin{aligned} X &= \lambda_1 = \alpha_1 \cos(gz + c) - \alpha_2 \operatorname{sen}(gz + c) \\ Y &= \lambda_2 = \alpha_2 \cos(gz + c) + \alpha_1 \operatorname{sen}(gz + c) \\ Z &= \lambda_3 = \alpha_3 \end{aligned}$$

(α_1, α_2, α_3 cost.) dovrebbero soddisfare in ogni punto ad una equazione del tipo

$$aX + bY + cZ + p(yZ - zY) + q(zX - xZ) + r(xY - yX) = 0$$

(a, b, c, p, q, r, cost.): ossia

$$x(rY - qZ) + y(pZ - rX) + z(qX - pY) + aX + bY + cZ = 0$$

Perchè questa sia verificata per ogni valore di x, y, z, dovranno esser nulli i coefficienti di x, y per ogni valore di z, da cui (essendo $Z =$ cost., X, Y variabili), $r = 0$, e conseguentemente $p = q = 0$.

L'equazione si riduce allora ad

$$aX + bY + cZ = 0$$

che non ammette soluzioni, essendo le X, Y linearmente indipendenti.

Meccanica. — *Traiettorie dinamiche di un punto libero, sollecitato da forze conservative.* Nota di A. F. Dall'Acqua, presentata dal Corrispondente G. Ricci.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sull' equilibrio d'un ellissoide planetario di rivoluzione elastico isotropo.* Nota I di A. Viterbi, presentata dal Corrispondente G. Ricci.

È ben nota l'importanza che ha l'ellissoide di rivoluzione come figura d'equilibrio d'una massa fluida uniformemente ruotante, le cui particelle si attraggono secondo la legge di Newton; un tale ellissoide è infatti forma possibile d'un corpo planetario allo stato di nebulosa. Mi parve interessante lo studio dell'equilibrio nel caso in cui il pianeta perduto ormai il carattere di massa fluida debba riguardarsi come un solido ruotante, in equilibrio elastico, quando le forze di massa, a cui è soggetto, sono la forza centrifuga e l'attrazione.

L'analogo problema fu, come è ben noto, risolto completamente per la sfera del Lamé [1]. Il Lecornu [2] trattò il problema dell'equilibrio elastico d'un ellissoide di rivoluzione supponendo però che la sola forza di massa agente fosse la forza centrifuga.

Trattandosi di un solido di rivoluzione ruotante intorno al proprio asse, l'equilibrio dovrà verificarsi in ciascun piano meridiano, avvenendo lo spostamento d'ogni singolo elemento sotto l'azione della gravità e della forza centrifuga in un dato piano meridiano, indipendentemente dall'orientamento di questo. Così la componente dello spostamento secondo la normale ai varî piani meridiani sarà identicamente nulla. Si tratta dunque di un problema a due coordinate. Come coordinate in ciascun piano meridiano si assumerà il sistema di coordinate rettilinee ortogonali x, y offerto dalle parallele rispettivamente ai raggi dei paralleli ed all'asse del solido in discorso. Tale sistema non è che quello delle coordinate cilindriche: infatti quest'ultimo si ottiene assumendo come terza coordinata necessaria e sufficiente ad individuare insieme con x, y i punti dello spazio l'angolo che ogni singolo piano meridiano forma con un piano meridiano fisso.

Nel problema studiato si hanno tre componenti normali della forza elastica, ed una componente tangenziale. Noi supporremo che la componente tangenziale sia nulla: il caso che allora si presenta offre particolare interesse. Invero il significato fisico di tale ipotesi è evidente in base ai fondamenti della teoria dell'elasticità: esso consiste in ciò che nella materia costituente l'ellissoide considerato non avvengono scorrimenti nelle direzioni x, y. In altri termini l'ipotesi posta esprime che nè un elemento d'area d'alcun piano meridiano può subire uno scorrimento nella direzione del raggio dei paralleli, situato nel piano stesso, nè un elemento d'area d'alcun parallelo può subire uno scorrimento nel senso dell'asse del solido. Allora poi il sistema triplo ortogonale di superficie costituito dai piani dei paralleli, dai piani meridiani e dalle superficie cilindriche coassiali aventi per generatrici le parallele all'asse y è *isostatico* [3]: vale a dire mercè esso si può suddividere l'ellissoide in discorso in prismi elementari sulle cui faccie non agiscono che tensioni (o pressioni) normali. Le formole che in tale ipotesi s'ottengono sono oltremodo semplici: in vero le componenti della forza elastica e le componenti dello spostamento, la cui determinazione costituisce il nocciolo della presente ricerca sono, le prime, funzioni di secondo grado, le seconde funzioni di terzo grado delle coordinate. Tale l'argomento della presente Nota. Le formole cui qui pervengo dànno luogo ad alcune osservazioni

(1) v. Lamé, *Leçons sur l'Elasticité*, pag. 214 e seg. e *Leçons sur le Coordonnées curvilignes*.

(2) v. Lecornu, *Sur l'Equilibre d'Elasticité d'un corps tournant*. Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences, 1896, pagg. 96-99.

(3) Lamè, *Leçons sur les Coordonnées curvilignes*, pag. 351 e seg.

che mi permetterò di svolgere in una prossima Nota. Eccone brevemente il contenuto.

La circostanza che, trattandosi d'un ellissoide, le componenti della forza di massa sono funzioni lineari delle coordinate fa sì che s'ottenga immediatamente una speciale relazione fra l'eccentricità, la velocità angolare, la costante dell'attrazione ed il rapporto delle costanti d'isotropia. Questa relazione, oltre a rappresentare, per sè stessa, una condizione necessaria e sufficiente a che il corpo sia in equilibrio elastico permette di più d'assegnare per la velocità angolare un limite superiore, funzione soltanto dell'eccentricità e della costante dell'attrazione, che essa non può mai raggiungere se deve esistere l'equilibrio. Tale fatto trova perfetto riscontro in ciò che, come è ben noto, si verifica nello studio della figura d'equilibrio d'una massa fluida ruotante uniformemente [1]. E appunto la presente ricerca si chiude con un'applicazione di detta relazione alla determinazione del rapporto fra le costanti d'isotropia dell'ellissoide terrestre. Come si vedrà, tale ellissoide sodisfa pienamente alla condizione necessaria per trovarsi, nell'ipotesi posta, in equilibrio elastico: di più il limite superiore della velocità angolare, qualora l'ellissoide terrestre sia in equilibrio elastico è molto superiore all'analogo limite che si ottiene, considerando la terra allo stato di massa fluida. Si presenta spontanea un'interpretazione fisica di tale fatto nel senso che la terra, come ogni altro corpo, si trovi allo stato di solido elastico in condizioni molto più favorevoli a mantenersi in equilibrio di quel che non sia allo stato di massa fluida.

1. Sia un solido di rivoluzione E di forma ellissoidica; e sia esso animato di moto rotatorio uniforme attorno al suo asse. In ciascun piano meridiano si assuma, giusta quanto si disse, come sistema di coordinate, quello costituito rispettivamente dalle parallele y all'asse di rotazione e dai raggi x dei paralleli dell'ellissoide considerato. Di più si prenda come origine delle coordinate il centro di E. Detto allora a il semiasse equatoriale, b quello polare del solido in discorso, l'equazione della superficie che lo limita sarà:

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ [2]}.$$

Si supponga, come s'è detto, che E si trovi nelle condizioni d'un solido planetario: vale a dire che le forze di massa a cui è soggetto siano l'attrazione e la forza centrifuga. Dovendo l'equilibrio elastico verificarsi in ciascun piano meridiano sarà, come si è osservato, nulla la componente dello sposta-

[1] V. per es. la recentissima opera del Poincarè, *Figures d'équilibre d'une masse fluide*. Paris, 1902.

[2] In coordinate cartesiane evidentemente l'equazione della superficie in discorso sarebbe posto nel piano di ciascun parallelo, $x_1 = x\cos\alpha$, $x_2 = x \operatorname{sen}\alpha$: $\dfrac{x_1^2+x_2^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

mento de' suoi punti, normale ai piani meridiani. Dette pertanto u, v le componenti dello spostamento rispettivamente nelle direzioni x, y: detto ϑ il coefficiente di dilatazione cubica; dette N_1, N_2, N_3 le componenti della forza elastica normale agenti rispettivamente nella direzione x, perpendicolarmente ai singoli piani meridiani e nella direzione y e dette finalmente $\lambda + 2\mu$, μ le costanti d'isotropia di E sarà [1]:

$$\vartheta = \frac{u}{x} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \tag{2}$$

$$\text{(A)} \quad \left\{ \begin{aligned} N_1 &= \lambda\vartheta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ N_2 &= \lambda\vartheta + 2\mu \frac{u}{x} \\ N_3 &= \lambda\vartheta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \right.$$

Una sola delle componenti tangenziali della forza elastica non sarebbe identicamente nulla; e questa è:

$$T = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Se non che, per l'ipotesi posta nell'introduzione, essa pure s'annulla: dovranno perciò u, v sodisfare all'equazione:

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{B}$$

Sia ora ϱ la densità (supposta costante) della materia costituente E, ω la velocità angolare con cui esso ruota. Allora la forza centrifuga è data da $\dfrac{\omega^2 \varrho x^2}{2}$.

Dette $A'_1 x$, $A_2 y$ le componenti dell'attrazione unitaria di E su un punto interno, rispettivamente nelle direzioni x, y, pongasi brevemente:

$$(A'_1 + \omega^2)\varrho = A_1.$$

Come è noto, detta f la costante dell'attrazione di E, sarà rispettivamente [2]:

[1] Lamè, *Leçons sur l'Élasticité*, pag. 184. Le relazioni fondamentali della presente ricerca s'ottengono infatti dalle formole fondamentali dell'elasticità in coordinate cilindriche date dal Lamè, quando si supponga nulla la componente dello spostamento normale a ciascun piano meridiano e tutto indipendente dall'orientamento di questo.

[2] v. Tisserand, *Traité de Mécanique celeste*, tome II, pagg. 62-64.

$$(3)\quad \begin{cases} A'_1 = -2\pi f\varrho \dfrac{1+l^2}{l^3}\left(\operatorname{arctg} l - \dfrac{l}{1+l^2}\right) \\ A_2 = -4\pi f\varrho \dfrac{1+l^2}{l^3}(l - \operatorname{arctg} l), \end{cases}$$

ove $l = \sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{b}}$, oppure:

$$(3')\quad \begin{cases} A'_1 = -2\pi f\varrho \dfrac{1-h^2}{h^3}\left(\dfrac{h}{1-h^2} - \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+h}{1-h}\right) \\ A_2 = -4\pi f\varrho \dfrac{1-h^2}{h^3}\left(\dfrac{1}{4}\log\dfrac{1+h}{1-h} - h\right), \end{cases}$$

$$\text{ove } h = \sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2}}$$

a seconda che $a > b$ oppure $b < a$, cioè a seconda che l'ellissoide E è schiacciato od allungato. Allora poi le equazioni d'equilibrio elastico saranno date [1] da

$$(C)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial N_1}{\partial x} + \dfrac{N_1 - N_2}{x} + A_1 x = 0 \\ \dfrac{\partial N_3}{\partial y} + A_2 y = 0. \end{cases}$$

È ovvio poi che le forze elastiche agenti su un elemento superficiale normale ad un dato piano meridiano, le quali sono date da [2]:

$$N'_1 = \cos^2\alpha\, N_1 + \operatorname{sen}^2\alpha\, N_3, \quad T' = \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha\,(N_1 - N_3)$$

ove α designi l'angolo della normale all'ellissoide coll'asse delle x, devono essere nulle sulla superficie libera di E, cioè sulla superficie (1). Dovranno cioè N_1, N_3 avere la forma:

$$(4)\quad \begin{cases} N_1 = \left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1\right) f(x, y) \\ N_3 = \left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1\right) \varphi(x, y), \end{cases}$$

designando $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ due funzioni di x, y che restano finite sulla superficie (1).

Dalle (A), (B), (C), unite alle (4), si ricavano immediatamente N_1, N_2, N_3 e successivamente u, v.

[1] Lamè, *Leçons sur l'Élasticité*, pag. 182.
[2] Lamè, *Leçons sur l'Élasticité*, pag. 48.

2. Per determinare in primo luogo le componenti della forza elastica si osserverà anzitutto che dalla seconda delle (C):

$$N_3 \equiv -\frac{A_2}{2} y^2 + \psi(x)$$

designando $\psi(x)$ una funzione arbitraria della sola x; perciò in base alla seconda delle (4) dovrà essere evidentemente:

$$N_3 = \frac{1}{2}\left(A_2 b^2 - A_2 x^2 \frac{b^2}{a^2} - A_2 y^2\right). \tag{5}$$

In virtù delle prime due fra le equazioni (A) la prima delle (C) può porsi sotto la forma:

$$\frac{\partial(N_1 + N_2 - \lambda\vartheta)}{\partial x} + A_1 x = 0 \tag{6}$$

e poichè in base alla (2) ed alle (A):

$$\vartheta = \frac{N_1 + N_2 + N_3}{3\lambda + 2\mu} \tag{7}$$

seguono dalle (5), (6) necessariamente le

$$\frac{\partial^3(N_1 + N_2)}{\partial x^3} = 0 \quad \frac{\partial^2(N_1 + N_2)}{\partial x\, \partial y} = 0\,. \tag{8}$$

Ciò perchè, come è ben noto dai fondamenti della teoria dell' elasticità non può mai essere $\lambda + \mu = 0$. Ciò posto in base alla (B) si potrà porre, detta K un' indeterminata:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = K, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -K. \tag{9}$$

Dal confronto delle (9) rispettivamente colla prima e la terza delle (A) si ha in virtù della condizione differenziale a cui devono sodisfare le derivate parziali di u, v:

$$\left\{\begin{aligned} 2\mu \frac{\partial K}{\partial x} &= \frac{\partial N_1}{\partial y} - \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \\ 2\mu \frac{\partial K}{\partial y} &= \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{aligned}\right. \tag{9'}$$

E da queste evidentemente:

$$\frac{\partial^2 N_1}{\partial y^2} - \lambda\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial^2 N_3}{\partial x^2} = 0\,. \tag{10}$$

In pari tempo dalle prime due delle equazioni (A):

$$N_2 - N_1 + x\frac{\partial(N_2 - \lambda\vartheta)}{\partial x} = 0. \tag{11}$$

Dalla (10), derivata rispetto a x, si ricava in virtù delle (5), (7), (8):

$$\frac{\partial^3 N_1}{\partial y^2\, \partial x} = \frac{\partial^3 N_2}{\partial y^2\, \partial x} = 0. \tag{12}$$

Dalla (11) derivata due volte rispetto a y e dalla (10), derivata rispetto a y, si ricava, in virtù della (12):

$$\frac{\partial^2 (N_2 - N_1)}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^3 N_1}{\partial y^3} = \frac{\partial^3 N_2}{\partial y^3} = 0. \tag{12'}$$

Le (12), (12′) associate alla prima delle (4) mostrano subito che deve la funzione $f(x\,,y)$ ridursi ad una costante C, e però che deve essere

$$N_1 = C\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)$$

mentre tenendo conto altresì delle (8) e della prima delle (C) si vede che N_2 alla sua volta deve avere la forma:

$$N_2 = C_1 x^2 + C\frac{y^2}{b^2} - C.$$

La completa determinazione poi di N_1, N_2 si fa immediatamente mercè le (6), (10), (11). Infatti da queste equazioni si ricava facilmente:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{C}{a^2} &= -\frac{\{A_2\,\lambda\varepsilon + A_1(7\lambda + 6\mu)\}}{16(\lambda + \mu)} \\ \frac{C}{b^2} &= -\frac{[\lambda\{\lambda A_2\varepsilon + A_1(3\lambda + 2\mu)\} - 4(\lambda+\mu)^2 A_2\varepsilon + 2\lambda(\lambda+\mu)A_2]}{4(\lambda + 2\mu)(\lambda + \mu)} \end{aligned}\right. \tag{13}$$

posto brevemente $\frac{b^2}{a^2} = \varepsilon$.

Se non che dalla (13) scaturisce immediatamente la relazione seguente:

$$\frac{(\lambda + 2\mu)\{A_2\lambda\varepsilon + A_1(7\lambda + 6\mu)\}}{\lambda\{\lambda A_2\varepsilon + A_1(3\lambda + 2\mu)\} - 4(\lambda + \mu)^2 A_2 + 2\lambda(\lambda + \mu)A_2} = 4\varepsilon. \tag{13'}$$

Pongasi brevemente $\frac{\lambda}{\mu} = I$ e sostituiscasi a ε la sua espressione:

$$\varepsilon = 1 - e^2$$

ove $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$, rappresentando il quadrato dell' eccentricità di E qualora sia $a > b$. Tale sostituzione si fa in vista dell' applicazione che di queste formole si farà allo studio dell' equilibrio elastico della terra. Allora la (13′) diverrà:

$$\begin{aligned}(14)\qquad & \mathrm{I}^2 \{ A_2(17e^2 - 5 - 12e^4) + A_1(5 - 12e^2) \} - \\ & - \mathrm{I} \{ A_2(26 - 58e^2 + 32e^4) + A_1(12 + 8e^2) \} - 16A_2(1 - e^2)^2 - 12A_1 = 0.\end{aligned}$$

Ci riserviamo di studiare più innanzi la (14) e di metterne in rilievo la portata: per intanto osservando pure che dalle (6):

$$C_1 = -\frac{A_1(5\lambda + 2\mu) + 3A_2\lambda(1 - e^2)}{16(\lambda + 2\mu)}$$

e che, in base alle (3), (3′) essendo $t^2 = \frac{e^2}{1 - e^2}$, $h^2 = \frac{-e^2}{1 - e^2}$ (¹), A_2 e $A_1 - \omega^2\varrho$ si possono far dipendere da e anzichè rispettivamente da l o da h possiamo riassumere i risultati testè ottenuti affermando che:

Nel problema in discorso d' equilibrio elastico, le componenti normali della forza elastica (le sole non nulle), risultano funzioni di secondo grado delle coordinate date rispettivamente da:

$$(15)\quad \begin{cases} N_1 = a^2 \dfrac{A_2\lambda(1 - e^2) + A_1(7\lambda + 6\mu)}{16(\lambda + \mu)} \left(1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}\right) \\[2ex] N_2 = a^2 \dfrac{A_2\lambda(1 - e^2) + A_1(7\lambda + 6\mu)}{16(\lambda + \mu)} - \dfrac{A_1(5\lambda + 2\mu) + 3A_2\lambda(1 - e^2)}{16(\lambda + \mu)} x^2 - \\[2ex] \qquad\qquad - \dfrac{A_2\lambda(1 - e^2) + A_1(7\lambda + 6\mu)}{16(\lambda + \mu)(1 - e^2)} y^2 \\[2ex] N_3 = \dfrac{A_2}{2} \{ a^2(1 - e^2) - x^2(1 - e^2) - y^2 \} \end{cases}$$

mentre fra il rapporto delle costanti d' isotropia (*che non è se non* $\mathrm{I} + 2$), *la velocità angolare, la costante dell' attrazione ed il rapporto* e *deve sussistere la relazione* (14) *come condizione necessaria e sufficiente a che il solido* E *sia in equilibrio elastico* (la densità non figura nella (14) essendo fattore comune).

3. Mercè le (15) si calcolano subito le componenti dello spostamento:

(¹) È quasi superfluo accennare che se si trattasse di un ellissoide allungato in guisa che la sua eccentricità fosse data da $\bar{e}^2 = \frac{b^2 - a^2}{b^2}$ essendo $\bar{e}^2 = \frac{-e^2}{1 - e^2}$ tanto nella (14) come nella (15) e nelle espressioni di A_1, A_2 si potrebbe opportunamente sostituire al rapporto e il rapporto $\bar{e}$, ricordando pure che $h^2 = \frac{\bar{e}^2}{1 - \bar{e}^2}$.

infatti in virtù di queste la (7) diviene, posto brevemente $A_2(1-e^2)=\bar{A}_2$:

$$\vartheta=\frac{a^2\{\bar{A}_2(5\lambda+4\mu)+A_1(7\lambda+6\mu)\}-x^2(6\lambda+4\mu)(A_1+\bar{A}_2)-\frac{y^2}{1-e^2}\{\bar{A}_2(5\lambda+4\mu)+A_1(7\lambda+6\mu)\}}{8(\lambda+\mu)(3\lambda+2\mu)} \tag{7'}$$

Allora, poichè sotto la condizione posta che sia sodisfatta la (14), sono pure identicamente sodisfatte le condizioni differenziali che si ricavano dal confronto delle (A), (B), tenuto conto della (15) e della (7′), dalla seconda e dalla terza delle (B) si ricava subito rispettivamente:

$$\left\{\begin{aligned} u&=a_1x-\frac{a_1}{a^2(1-e^2)}xy^2+b_1x^2\\ v&=a_2y+b_2x^2y-\frac{a_2}{a^2(1-e^2)}\end{aligned}\right. \tag{16}$$

dove si è posto brevemente:

$$\left\{\begin{aligned} a_1&=\frac{a^2\{A_1(\lambda+2\mu)-\bar{A}_2\lambda\}(7\lambda+6\mu)}{32\mu(\lambda+\mu)(3\lambda+2\mu)}\\ b_1&=\frac{(3\lambda+2\mu)\{\bar{A}_2\lambda-A_1(\lambda+2\mu)\}}{32\mu(\lambda+\mu)(3\lambda+2\mu)}\\ a_2&=\frac{a^2[\{4(\lambda+\mu)(3\lambda+2\mu)-\lambda(5\lambda+4\mu)\}\bar{A}_2-A_1\lambda(7\lambda+6\mu)]}{16\mu(3\lambda+2\mu)(\lambda+\mu)}\\ b_2&=\frac{\lambda A_1-(\lambda+2\mu)\bar{A}_2}{8\mu(\lambda+\mu)}\end{aligned}\right.$$

mentre evidentemente in virtù della (14):

$$\frac{a_1}{a^2(1-e^2)}+b_2=0\,.$$

Mercè la (16) è dunque completamente risolto il problema dell' equilibrio elastico di E.

Fisica. — *Relazione su di una Memoria contenuta in un piego suggellato presentato nel 1882 dal prof. Adolfo Bartoli*, dei Soci A. Ròiti (relatore) e V. Volterra.

Fisica. — *Trasformazione in correnti elettriche delle radiazioni incidenti sopra una superficie riflettente in movimento*. Memoria del prof. Adolfo Bartoli.

Relazione e Memoria saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.