ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCC.

1903

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1903

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 aprile 1903.

Presidenza del Socio anziano L. Luzzatti.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla nozione di gruppo complementare e di gruppo derivato nella teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni.* Nota del Socio Luigi Bianchi.

1. La nozione di *gruppo complementare* di un gruppo G rispetto ad un suo sottogruppo Γ, quale si presenta nell'ordinaria teoria dei gruppi di sostituzioni, può facilmente trasportarsi nel campo dei gruppi continui (finiti) di trasformazioni. Non essendo a mia notizia che l'indicata estensione sia stata effettuata da altri, mi propongo di stabilirla nella presente Nota. Ne apparirà subito, in un primo esempio, l'utilità, poichè verranno posti così sotto nuova forma, semplice ed intuitiva, gli importanti risultati conseguiti da Lie e da Schur nel problema della determinazione di tutti i gruppi transitivi ad r parametri di assegnata composizione (c_{iks}).

Sia G_r un gruppo di Lie ad r parametri, e Γ_m un suo sottogruppo ad $m < r$ parametri. Diciamo due trasformazioni g, g' di G *equivalenti* (a sinistra) rispetto a Γ quando si abbia

$$g' = \gamma g \quad (\text{o } g = \gamma^{-1} g'),$$

la trasformazione γ appartenendo al sottogruppo Γ. Per significare l'equivalenza scriveremo anche $g' \equiv g$. Poichè da $g' \equiv g$, $g'' \equiv g$ segue $g'' \equiv g'$,

potremo distribuire le trasformazioni di G in classi rispetto a Γ, attribuendo ad una medesima classe tutte e sole quelle che sono equivalenti ad una medesima, e quindi fra loro. Le classi in G formeranno una serie ∞^{r-m} ed ogni g si potrà decomporre (almeno in un conveniente intorno dell'identità) secondo la formola

$$g = \gamma T; \tag{1}$$

percorrendo γ le ∞^m trasformazioni di Γ e la moltiplicatrice T una serie ∞^{r-m} di trasformazioni di G, ciascuna delle quali rappresenta per sè una classe.

Nel modo più chiaro si riconosce la detta decomponibilità, ricorrendo alla nota decomposizione di ogni trasformazione di G nel prodotto di r trasformazioni, prese ciascuna da uno degli r gruppi ad un parametro, che vengono generati da r trasformazioni infinitesime indipendenti di G_r, siano

$$X_1 f, X_2 f, \dots X_r f.$$

Se $G_1^{(i)}$ indica il gruppo ad un parametro t_i generato da $X_i f$ ed $S t_i$ una sua trasformazione generica, si ha [1]

$$g = S_{t_1} S_{t_2} \dots S_{t_r}$$

Ora, supposto p. e. che siano

$$X_1 f, X_2 f, \dots X_m f$$

le trasformazioni infinitesime di Γ_m, basterà porre

$$\gamma = S_{t_1} S_{t_2} \dots S_{t_m}, \quad T = S_{t_{m+1}} \dots S_{t_r}$$

per ottenere la decomposizione (1), e saranno allora

$$t_{m+1}, \dots t_r$$

gli $r - m$ parametri contenuti nella moltiplicatrice T, ossia i parametri delle classi. Ciò posto, si moltiplichino *tutte* le trasformazioni g di G *a destra* per una medesima fissa $\overline{g}$ in G: le g si permuteranno fra loro secondo quella trasformazione del *primo gruppo parametrico* Π_r che corrisponde a $\overline{g}$. Ma, poichè da $g' \equiv g$ segue $g'\overline{g} \equiv g\overline{g}$, ed inversamente dalla seconda equivalenza la prima, vediamo che tutte le trasformazioni appartenenti ad una medesima classe vengono trasportate ad un tempo in tutte quelle di un'altra classe, cioè: *Il gruppo parametrico Π_r agisce in modo imprimitivo sulle ∞^{r-m} classi scambiandole fra loro.*

Facendo ora variare $\overline{g}$ entro G_r, ne verrà indotto un gruppo H di trasformazioni sulle classi; questo diciamo *il gruppo complementare* (a destra)

[1] Cfr. Lie-Engel, III, pag. 802 (Nota) e Scheffers-Lie, pag. 192.

di G rispetto a Γ e scriviamo, col simbolo di quoziente

$$H = \frac{G}{\Gamma}.$$

Nelle notazioni superiori, esso sarà un gruppo di trasformazioni sulle $r - m$ variabili $t_{m+1} \dots t_r$.

2. Osserviamo ora alcune proprietà del gruppo complementare $H = \frac{G}{\Gamma}$, che discendono facilmente dal modo stesso di sua generazione.

1°. *Il gruppo complementare* H *è transitivo sulle* ∞^{r-m} *classi, cioè sui parametri che le individuano.*

Infatti la classe costituita dal sottogruppo Γ (rappresentata dall'identità) si muta in qualunque altra classe, prendendo convenientemente la moltiplicatrice $\bar{g}$.

Il gruppo H è chiaramente in relazione d'isomorfismo con G. Ma, per riconoscere se questo isomorfismo è oloedrico o meriedrico, convien vedere se all'identità in H corrisponde in G la sola identità, ovvero un sottogruppo Σ, che sarà invariante in G. Se σ è una qualunque trasformazione di Σ, dovremo avere per una g *arbitraria*

$$g\sigma \equiv g \ , \ g\sigma = \gamma g,$$

ossia

$$\sigma = g^{-1}\gamma g,$$

e per ciò σ dovrà trovarsi ad un tempo in *tutti* i sottogruppi trasformati di Γ per mezzo delle g; viceversa se ciò accade, avremo per qualunque g

$$g\sigma \equiv g,$$

cioè la σ lascierà fisse tutte le classi e corrisponderà all'identità in H. Se supponiamo che il sottogruppo Σ abbia k parametri, sarà k il grado di meriedria nell'isomorfismo di H con G, ed H avrà $r - k$ parametri. Dunque:

2°. *Il gruppo complementare* $H = \frac{G_r}{\Gamma_m}$ *ha precisamente* $r - k$ *parametri, se il massimo sottogruppo* Σ *di* Γ *invariante in* G *ha* k *parametri.*

In particolare abbiamo:

3°. *Il gruppo complementare* $H = \frac{G}{\Gamma}$ *ha* r *parametri, ed è oloedricamente isomorfo con* G, *quando il sottogruppo* Γ *non è invariante in* G *nè contiene (l'identità esclusa) alcun sottogruppo invariante in* G.

Osserviamo ora che alle trasformazioni di Γ corrispondono in H tutte e sole quelle trasformazioni che lasciano invariata la prima classe (la classe 1). Nello spazio S_{r-m} ad $r - m$ dimensioni, generato dai parametri delle classi,

al sottogruppo Γ corrisponde in H il *sottogruppo di stabilità* relativo al punto rappresentativo della prima classe, cioè l'insieme di tutte e sole le trasformazioni di H che lasciano fisso questo punto. Similmente ai sottogruppi di G affini a Γ (trasformati di Γ per mezzo delle g) corrispondono in H i sottogruppi di stabilità relativi ai punti di S_{r-m}.

Dopo ciò, possiamo anche riconoscere facilmente se il gruppo H è sistatico, ovvero asistatico. Il primo caso si presenterà quando esista in S_{r-m} una varietà continua di punti aventi a comune il sottogruppo di stabilità, cioè una serie continua di trasformazioni moltiplicatrici di $\overline{g}$, non equivalenti, che trasformino Γ in sè stesso. Quelle trasformazioni di G che trasformano Γ in sè stesso formano in G un sottogruppo, contenente Γ come sottogruppo invariante. Abbiamo quindi:

4°. *Il sottogruppo complementare* $H = \frac{G}{\Gamma}$ *è sistatico ovvero asistatico, secondo che il massimo sottogruppo di* G, *contenente* Γ *come sottogruppo invariante, è più ampio di* Γ, *ovvero coincide con* Γ.

3. Consideriamo ora particolarmente il caso che il sottogruppo Γ_m di G_r nè sia invariante in G nè contenga sottogruppi invarianti di G. Allora, come si è visto, il gruppo complementare H_r è oloedricamente isomorfo a G_r; inoltre esso è transitivo sopra $r - m$ variabili. Inversamente dimostriamo:

5°. *Ogni gruppo* H_r *transitivo sopra* $r - m$ *varibili, oloedricamente isomorfo con un dato gruppo* G_r, *può ottenersi come gruppo complementare di* G_r *rispetto ad un suo sottogruppo* Γ_m.

Se H_r è un gruppo transitivo sulle $r - m$ variabili

$$u_1\, u_2 \dots u_{r-m},$$

consideriamo un punto *generico* $P_0 \equiv (u_r^{(0)} \dots u_{m-r}^{(0)})$ dello spazio S_{r-m} delle variabili u ed il sottogruppo di stabilità per H_r relativo a P_0; questo sottogruppo ha $r - (r - m) = m$ parametri, e si indicherà con K_m. Vediamo subito che K_m non è invariante in H_r, nè contiene sottogruppi invarianti di H_r, poichè ogni trasformazione σ di un tale sottogruppo dovrebbe trovarsi ad un tempo in tutti i sottogruppi di stabilità dei punti equivalenti a P, cioè di tutti i punti dello spazio, a causa della transitività di H_r; dunque $\sigma = 1$.

Ne segue che il gruppo complementare $\frac{H_r}{K_m}$ ha r parametri come H_r ed agisce transitivamente sopra $r - m$ variabili. Ma di più è facile vedere che per queste $r - m$ variabili possono prendersi le u stesse, ed il gruppo complementare $\frac{H_r}{K_m}$ coincide allora con H_r. E invero due trasformazioni di H_r sono equivalenti rispetto a K_m quando trasportano P_0 nel medesimo punto P, onde per parametri delle ∞^{r-m} classi di H, rispetto a K, possiamo prendere le coordinate stesse $u_1, u_2 \dots u_{r-m}$ di P. D'altronde, moltiplicando a

destra due trasformazioni equivalenti di H per una stessa h, che trasporti $P \equiv (u_i)$ in $P' \equiv (u'_i)$, si ottengono due trasformazioni equivalenti, che trasportano P_0 in P'; il gruppo indotto sulle u è dunque il gruppo H_r stesso c. d. d.

Così abbiamo: *Ogni gruppo transitivo è il proprio gruppo complementare rispetto al sottogruppo di stabilità di un suo punto generico.*

Ne risulta ora subito la verità della proposizione sopra enunciata; poichè, se H_r è oloedricamente isomorfo con G_r, e Γ_m è il sottogruppo di G_r che corrisponde a K_m in H_r, per la definizione stessa di gruppo complementare si ha

$$\frac{G_r}{\Gamma_m} = \frac{H_r}{K_m}.$$

Possiamo riepilogare i risultati ottenuti nel teorema:

Dato un gruppo G_r *a* r *parametri sopra un numero qualunque di variabili, per costruire tutti i gruppi transitivi sopra* $r - m$ *variabili, oloedricamente isomorfi con* G_r, *basta determinare quei sottogruppi* Γ_m *di* G_r *che non sono invarianti in* G_r *nè contengono sottogruppi invarianti di* G_r. *I gruppi complementari* $H_r = \frac{G_r}{\Gamma_m}$ *danno i gruppi richiesti.*

Rimane in fine da decidere la questione se due tali gruppi transitivi sopra $r - m$ variabili, ottenuti come gruppi complementari

$$H_r = \frac{G_r}{\Gamma_m}, \quad H'_r = \frac{G_r}{\Gamma'_m}$$

rispetto a due diversi sottogruppi Γ_m, Γ'_m, siano o no simili. Si osservi per ciò che, supposti H_r, H'_r simili, ne segue una corrispondenza d'isomorfismo oloedrico di G_r con sè stesso (automorfismo) tale che a Γ_m corrisponda Γ'_m. Viceversa, se G_r ammette un automorfismo che faccia corrispondere a Γ_m il sottogruppo Γ'_m, ne verrà fissata una corrispondenza fra le classi di G rispetto a Γ e quelle di G rispetto a Γ', rappresentata analiticamente dalle formole di trasformazione

$$u'_i = \varphi_i(u_1\, u_2 \dots u_{r-m}), \quad i = 1, 2 \dots r - m;$$

e questa trasformazione sulle u cangerà appunto H_r in H'_r. Dunque:

Due gruppi complementari $\frac{G_r}{\Gamma_m}, \frac{G_r}{\Gamma'_m}$ *sono simili quando esiste un automorfismo di* G_r *che faccia corrispondere* Γ'_m a Γ_m.

4. Proponiamoci ora di calcolare le trasformazioni infinitesime generatrici del gruppo complementare

$$H = \frac{G_r}{\Gamma_m}$$

da quelle note di G e Γ. Con ciò verremo a dimostrare che il metodo dato

da Lie per la costruzione dei gruppi transitivi a r parametri con data composizione (c_{iks}) non è altro appunto che il processo di costruzione dei gruppi complementari.

Ma poniamoci senz'altro dal punto di vista adottato da Lie, nel Kap. 27 T. III, e supponiamo soltanto che siano assegnate le costanti di composizione (c_{iks}) dei gruppi a r parametri da costruirsi. Appena date queste costanti si può, come Lie e Schur dimostrano, assegnare *con sole operazioni algebriche* le r trasformazioni infinitesime

$$(2) \qquad A_1 f, A_2 f, \dots A_r f$$

generatrici di un gruppo Π_r semplicemente transitivo sopra r variabili

$$a_1, a_2 \dots a_r$$

colla data composizione (c_{iks}). Possiamo allora assumere Π_r come (primo) gruppo parametrico per tutti i gruppi G_r, sopra quante si vogliano variabili, di composizione (c_{iks}). Insieme alle (2) possiamo ancora determinare, con operazioni algebriche, le r trasformazioni infinitesime

$$(2^*) \qquad B_1 f, B_2 f, \dots B_r f$$

del gruppo Π'_r reciproco di Π_r, che si potrà assumere come *secondo* gruppo parametrico [1]. Essendo G_r, Π'_r oloedricamente isomorfi, i gruppi complementari dell'uno coincidono con quelli dell'altro, e la questione proposta equivale quindi alla seguente:

Per ogni sottogruppo Π'_m di Π'_r, determinare le trasformazioni infinitesime del gruppo complementare $H = \dfrac{\Pi'_r}{\Pi'_m}$.

Indicando con g_a una qualunque trasformazione di G_r, corrispondente ai valori a dei parametri, l'equivalenza

$$g_{a'} \equiv g_a$$

rispetto ad un sottogruppo Γ_m, cui corrisponda Π'_m in Π'_r, significa che nello spazio $S_r \equiv (a_1\, a_2 \dots a_r)$ si passa dal punto (a) al punto (a') con una trasformazione di Π'_m. Dunque punti equivalenti di S_r rispetto a Π'_m rappresentano la medesima classe di trasformazioni di G rispetto a Γ; queste classi sono perciò rappresentate dalle ∞^{r-m} varietà minime invarianti di dimensione m in S_r rispetto a Π'_m. Ora il moltiplicare le g a destra per una fissa equivale ad eseguire in S_r una trasformazione del primo gruppo parametrico Π_r; se ne conclude che il gruppo complementare H non è altro che

[1] Conviene ricordare che i due gruppi parametrici Π_r, Π'_r di un gruppo G_r assegnano il modo come si permutano fra loro le trasformazioni di G_r, moltiplicate rispettivamente *a destra*, ovvero *a sinistra*, per una medesima trasformazione di G_r stesso.

il gruppo indotto sulle ∞^{r-m} varietà invarianti V_m di Π'_m dal gruppo Π_r che le scambia imprimitivamente fra loro.

Se supponiamo che fra le (2*) siano

$$B_1 f, B_2 f, \dots B_m f$$

le trasformazioni di Π'_m, la divisione dello spazio S_r nelle ∞^{r-m} varietà V_m è data da

$$u_1 = c_1, u_2 = c_2 \dots u_{r-m} = c_{r-m},$$

le c essendo costanti arbitrarie, e le funzioni u di $a_1 a_2 \dots a_r$ le $r-m$ soluzioni del sistema completo

$$B_1 f = 0, B_2 f = 0 \dots B_{r-m} f = 0. \tag{3}$$

Le trasformazioni infinitesime generatrici del gruppo complementare $H = \frac{G_r}{\Gamma_m} = \frac{\Pi'_r}{\Pi'_m}$ si calcoleranno adunque come le trasformazioni infinitesime indotte sulle u dalle

$$A_1 f, A_2 f \dots A_r f.$$

Questo è appunto il processo tenuto da Lie (t. I Kap. 22); esso dà per le r trasformazioni infinitesime $U_1 f, U_2 f \dots U_r f$ del gruppo H (non necessariamente indipendenti) le formole

$$U_k f = \sum_{i=1}^{i=r-m} A_k(u_i) \frac{\partial F}{\partial u_i},$$

dove è da osservarsi che le $A_k(u_i)$, a causa delle identità $(A_k, B_l) = 0$, sono soluzioni del sistema (3), e quindi funzioni delle u stesse. Come poi si possano eseguire tutte le richieste operazioni *senza alcun calcolo di integrazione*, è stato dimostrato da Lie, utilizzando i risultati di Schur, nel Kap. 29, Bd. III (cf. in particolare pag. 798 ss.). Noi qui ci contenteremo di riassumerne i risultati nel teorema: *Date le costanti di composizione di un gruppo G_r, si possono trovare, senza calcoli d'integrazione, le trasformazioni infinitesime generatrici dei suoi gruppi complementari.*

5. Consideriamo ora il caso particolare importante in cui il sottogruppo Γ_m di G_r, rispetto al quale si costruisce il gruppo complementare $H = \frac{G_r}{\Gamma_m}$, sia invariante in G_r. Allora H ha $r-m$ parametri, corrispondendo all'identità in H il sottogruppo Γ_m in G_r; in generale a trasformazioni di G_r equivalenti rispetto a Γ_m [1] corrisponde la medesima trasformazione in H e

[1] Si noti anche che nel caso attuale, essendo Γ_m invariante in G_r, non vi è più luogo a distinguere l'equivalenza a sinistra da quella a destra, giacchè se $g' = \gamma g$, si può anche scrivere $g' = g\gamma'$, essendo γ' un'altra trasformazione di G.

viceversa. Supponiamo ora che, essendo

$$X_1 f\,,\, X_2 f\,,\, \ldots\, X_r f$$

le trasformazioni infinitesime generatrici di G_r, quelle del sottogruppo invariante Γ_m siano le ultime m

$$X_{r-m+1} f\,,\, \ldots\, X_r f\,.$$

Ciò porta che debbono essere nulle tutte quelle costanti di composizione

$$c_{ik1}\,,\, c_{ik2}\, \ldots\, c_{ik,r-m}$$

nelle quali uno degli indici i o k supera $r-m$. Ora, se indichiamo con

$$U_1 F\,,\, U_2 F\, \ldots\, U_r F$$

le trasformazioni infinitesime corrispondenti del gruppo complementare H (n. 4), saranno nulle identicamente

$$U_{r-m+1} F\,,\, \ldots\, U_{r-m} F\,,$$

perchè a Γ_m corrisponde in H l'identità, mentre le prime $r-m$

$$U_1 F\,,\, U_2 F\, \ldots\, U_{r-m} F\,,$$

corrispondenti a $X_1 f\,,\, X_2 f \ldots X_{r-m} f$, saranno indipendenti. Vediamo ora come si calcolano le costanti di composizione γ_{iks} del gruppo complementare

$$H_{r-m} \equiv (U_1 F\,,\, U_2 F\, \ldots\, U_{r-m} F)\,.$$

Siccome ad

$$(U_i\, U_k) = \sum_s^{1 \ldots r-m} \gamma_{iks}\, U_s F \quad (i\,,\, k = 1\,,\, 2 \ldots r-m)$$

deve corrispondere la

$$(X_i\, X_k) = \sum_s^{1 \ldots r} c_{iks}\, X_s f\,,$$

mentre al secondo membro corrisponde

$$\sum_s^{1 \ldots r} c_{iks}\, U_s F = \sum_s^{1 \ldots r-m} c_{iks}\, U_s F\,,$$

ne deduciamo

$$\gamma_{iks} = c_{iks} \quad (i\,,\, k\,,\, s = 1\,,\, 2 \ldots r-m)\,.$$

Dunque: *Se Γ_m è invariante in G_r, le costanti di composizione del gruppo complementare*

$$H_{r-m} = \frac{G_r}{\Gamma_m}$$

coincidono colle $(r-m)^3$ costanti di composizione c_{iks} del gruppo primitivo G_r, per le quali gli indici non superano $r-m$.

Dopo ciò è facile rispondere alla domanda: *Quando accadrà che il gruppo complementare $H_{r-m} = \frac{G_r}{\Gamma_m}$ risulta Abeliano (cioè di trasformazioni due a due permutabili)?* Per ciò è necessario e sufficiente che tutte le γ_{iks} siano nulle, cioè tali siano le c_{iks} per i valori da 1 a $r-m$ degli indici. Dunque qualunque trasformazione alternata

$$(X_\lambda X_\mu) = \sum_s^{1\ldots r} c_{\lambda\mu s} X_s f$$

si compone unicamente colle

$$X_{r-m+1} f, \ldots X_r f.$$

cioè il *gruppo derivato* (¹) di G_r è contenuto in G_m. Viceversa se Γ_m è un sottogruppo di G_r contenente il primo gruppo derivato, esso è invariante in G_r e il gruppo complementare $H_{r-m} = \frac{G_r}{\Gamma_m}$ è Abeliano. Possiamo dunque definire il gruppo derivato nel modo seguente: *Il gruppo derivato di un gruppo G_r è quel suo più piccolo sottogruppo invariante Σ, pel quale il gruppo complementare $\frac{G_r}{\Sigma}$ risulta Abeliano.*

6. Le considerazioni precedenti bastano già a dimostrare che pei gruppi continui il concetto di gruppo derivato coincide con quello di *sottogruppo commutatore*, quale fu introdotto dalle ricerche di Dedekind, Frobenius, Miller ecc. nella teoria dei gruppi ordinari.

Essendo S, T due trasformazioni qualunque di G, chiamiamo trasformazioni commutatrici o *commutatori* di G tutte quelle sue trasformazioni C che hanno la forma

$$C = STS^{-1}T^{-1},$$

appunto perchè avendosi

$$ST = CTS,$$

la C serve da commutatore per S, T. I commutatori di un gruppo continuo G

(¹) È ben noto che le alternate $(X_\lambda X_\mu)$ sono le generatrici di un sottogruppo invariante di G_r, che si dice il suo (primo) gruppo derivato.

(non Abeliano) formeranno una serie continua e, combinandoli fra loro per moltiplicazione, genereranno un sottogruppo Γ, che dicesi il *sottogruppo commutatore* di G. Siccome trasformando un commutatore con una qualunque trasformazione g di G si ottiene un nuovo commutatore, poichè

$$g^{-1}(STS^{-1}T^{-1})\,g = (g^{-1}Sg)\,(g^{-1}Tg)\,(g^{-1}S^{-1}g)\,(g^{-1}T^{-1}g) = S_1\,T_1\,S_1^{-1}\,T_1^{-1},$$

vediamo che in ogni caso *il sottogruppo commutatore* Γ *di* G *è invariante in* G.

Di più diciamo che *il gruppo complementare* $H = \frac{G}{\Gamma}$ *è Abeliano*. E infatti se g, g' sono due qualunque trasformazioni di G, si ha

$$g'g = cgg',$$

il commutatore c appartenendo a Γ; dunque $g'g$, gg' sono equivalenti rispetto a Γ, e corrispondono quindi alla medesima trasformazione di G. Se adunque poniamo che siano h, h' le trasformazioni corrispondenti in H a g, g', sarà $h'h = hh'$; H è per ciò Abeliano.

Viceversa, se Σ è invariante in G, ed il gruppo complementare $\frac{G}{\Sigma}$ è Abeliano, il sottogruppo commutatore Γ sarà contenuto in Σ. E infatti, essendo ancora g, g' due qualunque trasformazioni di G, si ha, per l'ipotesi fatta:

$$g'g = \sigma gg',$$

essendo σ una trasformazione di Σ. D'altra parte

$$g'g = cgg',$$

dove c si può far coincidere con qualunque commutatore. Ne segue che ogni commutatore trovasi in Σ, e Γ stesso vi è quindi contenuto. Vediamo adunque che il sottogruppo commutatore Γ di un gruppo G è il minimo sottogruppo invariante di G pel quale il gruppo complementare $\frac{G}{\Gamma}$ è Abeliano. Ma questa è la proprietà caratteristica del gruppo derivato, onde concludiamo:

Per un gruppo continuo G_r *il sottogruppo commutatore coincide col primo gruppo derivato.*

Ne risulta in particolare dimostrata la proposizione di Killing, enunciata da Lie a pag. 770, Bd. III: *Se* S, T *sono due trasformazioni finite qualunque di* G_r, *la trasformazione* $STS^{-1}T^{-1}$ *appartiene al primo gruppo derivato.*