ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCC.

1903

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1903

Matematica. — *Sulla trasformazione delle equazioni differenziali di Hamilton.* Nota III del Corrispondente G. MORERA.

9. Dalle considerazioni svolte precedentemente (cfr. le due Note sotto lo stesso titolo apparse nei Rendiconti, pag. 113-122 e pag. 149-152 del volume in corso) segue facilmente il *teorema:*

La trasformazione di variabili che le equazioni integrali di un sistema Hamiltoniano definiscono tra i valori iniziali (indeterminati) ed i valori finali delle variabili dipendenti è una trasformazione di contatto quando la variabile indipendente t si considari come un parametro costante. Questa proprietà è caratteristica dei sistemi Hamiltoniani.

La prima parte del teorema enunciato risulta senz'altro da note proposizioni (cfr. la 19ª delle *Vorlesungen über Dynamik* di Jacobi, o meglio: Mayer-Math. Ann. B. III, p. 444): la seconda invece si ha subito osservando che se esiste una trasformazione di contatto che riduce un sistema di $2n$ equazioni differenziali alla forma risoluta:

$$[\mathrm{I}] \qquad \frac{dp_i^\star}{dt} = -\frac{\partial H^\star}{\partial q_i^\star} \equiv 0 \ , \quad \frac{dq_i^\star}{dt} = \frac{\partial H^\star}{\partial p_i^\star} \equiv 0 \qquad (H^\star \equiv H^\star(t)) \, ,$$

la trasformazione inversa, che è ancora di contatto, non toglie (§ 4) la forma canonica alle equazioni differenziali [I] e per conseguenza il primitivo sistema è necessariamente Hamiltoniano.

Inoltre, poichè con una trasformazione di contatto un sistema Hamiltoniano qualsiasi è riducibile alla forma risoluta (cfr. § 4, teor. finale), concludiamo di qui la proposizione seguente:

Non solo ogni trasformazione di contatto, dipendente da t, sulle sole p, q, trasforma un qualunque sistema Hamiltoniano in un altro, ma ogni sistema Hamiltoniano può essere convertito in un altro qualunque collo stesso numero di variabili mercè una simile trasformazione.

Questa proposizione risponde direttamente al quesito proposto dal sig. E. O. Lovett come conclusione alla sua ricordata monografia (1).

Tutte le equazioni Hamiltoniane contenenti lo stesso numero di variabili sono trasformate le une nelle altre dalle trasformazioni di contatto dipendenti dal parametro t: queste trasformazioni costituiscono un *gruppo transitivo* nel senso della teoria dei gruppi di operazioni.

(1) The problem of determining the form of the general transformation that shall transform every canonical system into every other canonical system, in the same way that a transitive group of points transformation trasforms the points of space, is yet to be solved. (Quarterly Journal of math. Vol. XXX, pag. 149).

Però, come già rilevai al § 7, vi sono anche delle trasformazioni non appartenenti al tipo considerato che trasformano un sistema Hamiltoniano in un altro. Ridotto un sistema Hamiltoniano alla forma risoluta [I] mercè una trasformazione di contatto, si introduca in luogo delle variabili p^*, q^* un qualunque sistema di $2n$ funzioni fra loro indipendenti delle medesime: comunque queste sieno ripartite in coppie di variabili coniugate è manifesto che con tale trasformazione le equazioni differenziali rimangono del tipo [I] *quantunque la trasformazione impiegata non sia di contatto.*

10. Pongo termine a queste mie ricerche sulla trasformazione dei sistemi Hamiltoniani, enunciando un altro teorema che apparentemente è più generale di quello enunciato in principio del § 9.

Le equazioni differenziali di Hamilton hanno come caratteristica la proprietà di ammettere sistemi di integrali che definiscono trasformazioni di contatto, quando la variabile indipendente t si riguardi come un parametro costante.

Premettiamo una osservazione. Qualunque trasformazione di contatto tra le variabili:

$$(p_i\,, q_i)\ ;\ (p_i^*\,, q_i^*) \qquad (i = 1\,, 2 \ldots n)\,,$$

ossia che rende identica l'equazione:

$$\sum_i q_i\, dp_i - \sum_i q_i^*\, dp_i^* = d\Omega \qquad (dt = 0)\,,$$

si può porre sotto la forma:

$$\chi_{\alpha_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial \pi_{\alpha_1}}\,,\ \chi_{\alpha_2} = \frac{\partial \Phi}{\partial \pi_{\alpha_2}}\,, \ldots\ \chi_{\alpha_\nu} = \frac{\partial \Phi}{\partial \pi_{\alpha_\nu}}\ ;$$

$$-\,\pi_{\alpha_{\nu+1}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \chi_{\alpha_{\nu+1}}}\,,\ -\,\pi_{\alpha_{\nu+2}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \chi_{\alpha_{\nu+2}}}\,, \ldots\ -\,\pi_{\alpha_{2n}} \frac{\partial \Phi}{\partial \chi_{\alpha_{2n}}}\,,$$

ove: $\alpha_1\,, \alpha_2\,, \ldots \alpha_\nu\,, \alpha_{\nu+1} \ldots \alpha_{2n}$ indica una qualunque permutazione degli indici $1\,, 2 \ldots 2n$; Φ denota una funzione di $\pi_{\alpha_1} \ldots \pi_{\alpha_\nu}\,, \chi_{\alpha_{\nu+1}} \ldots \chi_{2n}$; e si è posto:

$$\pi_i = p_i\ ,\ \chi_i = q_i\ ,$$

quando i sia uno dei numeri $1\,, 2\,, 3 \ldots n$;

$$\pi_l = -\,p^*_{l-n}\ ,\ \chi_l = q^*_{l-n}\ ,$$

quando l sia uno dei $n+1\,, n+2\,, n+3\,, \ldots 2n$.

Infatti l'equazione:

$$\sum_{k=1}^{m} y_k\, dx_k = d\Omega$$

si rende identica nel modo più generale ponendo:

$$x_1 = -\frac{\partial \Phi}{\partial y_1}, \quad x_2 = -\frac{\partial \Phi}{\partial y_2}, \ldots \; x_k = -\frac{\partial \Phi}{\partial y_k}$$

$$y_{k+1} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_{k+1}}, \quad y_{k+2} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_{k+2}}, \ldots \; y_m = \frac{\partial \Phi}{\partial x_m},$$

ove Φ indica una funzione di $y_1, y_2 \ldots y_k, x_{k+1} \ldots x_m$.

Questa proposizione segue ovviamente da un'altra dimostrata da Lie a pag. 252 del IX volume dei Math. Annalen. Essa è stata pure dimostrata direttamente dal prof. Siacci (Mem. della R. Accademia dei Lincei, serie 2ª, vol. XII, pag. 436) e da me (1).

In altri termini, previa sostituzione di alcune coppie:

$(p_i, q_i), (p_k^\star, q_k^\star)$ rispettivamente con: $(q_i, -p_i), (q_k^\star, -p_k^\star)$, *sostituzione che equivale ad operare una certa trasformazione di contatto*, qualunque trasformazione di contatto può ridursi al tipo:

$$[\mathrm{II}] \qquad q_i = \frac{\partial \Omega}{\partial p_i}, \quad -q_i^\star = \frac{\partial \Omega}{\partial p_i^\star},$$

ove Ω indica una funzione qualunque delle $t; p_1 \ldots p_n; p_1^\star \ldots p_n^\star$, soggetta però alla limitazione che non sia identicamente nullo il determinante funzionale:

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial \Omega}{\partial p_1}, \ldots \frac{\partial \Omega}{\partial p_n} \right)}{\partial \left(p_1^\star \ldots p_n^\star \right)} = \frac{\partial \left(\frac{\partial \Omega}{\partial p_1^\star}, \ldots \frac{\partial \Omega}{\partial p_n^\star} \right)}{\partial \left(p_1 \ldots p_n \right)}$$

Ciò premesso, dato un sistema Hamiltoniano:

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

nel quale si sieno preventivamente operate, o no, a piacere su coppie di variabili coniugate le indicate sostituzioni, una trasformazione di contatto che che lo riduce alla forma [I] si ha (secondo il teorema enunciato in fine del § 4) determinando Ω come soluzione completa dell'equazione a derivate parziali:

$$[\mathrm{III}] \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial t} = \mathrm{U}\left(t\,;\; p_1 \ldots p_n\,;\; \frac{\partial \Omega}{\partial p_1} \ldots \frac{\partial \Omega}{\partial p_n} \right) - \mathrm{H}^\star(t).$$

(1) Cfr. il § 2, della mia Nota: *Il teorema fondamentale nella teoria delle equazioni canoniche del moto del prof. Siacci*, inserita nei Rend. dell'Istituto Lombardo, serie 2ª, vol. XV, pag. 643.

Reciprocamente se un sistema di $2n$ equazioni differenziali con una trasformazione [II] si riduce alla forma risoluta [I], esso è necessariamente Hamiltoniano.

Adunque il celebre teorema di Hamilton sulla esistenza della *principal function*, la quale per derivazione somministra tutte le equazioni integrali nel moto (London, Philosph. Transactions, MDCCCXXXV, pag. 99), è esclusivo alla forma canonica da lui data alle equazioni dinamiche.

Col procedimento di Hamilton perfezionato da Jacobi, ossia per derivazione [II] delle soluzioni complete dell'equazione a derivate parziali [III] (1), si ottengono manifestamente quei sistemi di integrali che si possono dedurre l'uno dall'altro con trasformazioni di contatto non dipendenti da t.

Meccanica. — *Sull' equilibrio d' un ellissoide planetario di rivoluzione elastico isotropo.* Nota II (2) di A. Viterbi, presentata dal Corrispondente G. Ricci.

4. Ora si riprenda in esame la (14): in primo luogo essa permette evidentemente d'enunciare il risultato seguente:

Dato un ellissoide planetario di rivoluzione, isotropo, di densità costante del quale siano note l'eccentricità e la costante d'attrazione si possono risolvere, mediante la (14), *le seguenti questioni*:

I. *Noto il rapporto delle costanti d'isotropia determinare la velocità angolare colla quale l'ellissoide deve ruotare in modo uniforme intorno al suo asse a che esso sia, sotto le condizioni poste in equilibrio elastico.*

II. *Nota invece la velocità angolare con cui esso ruota in modo uniforme intorno al proprio asse, determinare il valore che deve avere il rapporto delle costanti d'isotropia* (*rapporto che è dato da* $\mathrm{I}+2$) *a che esso si trovi nelle condizioni poste in equilibrio elastico.*

Di più la (14) è la relazione che, come si disse, permette d'assegnare il limite superiore, espresso in funzione dell'eccentricità e della costante dell'attrazione, che non deve mai essere raggiunto dalla velocità angolare, affinchè l'ellissoide considerato possa essere in equilibrio elastico.

Invero risolvendo la (14) rispetto a I, le sue radici sono date da:

$$\mathrm{I}=\frac{A_2(26+32e^4-58e^2)+A_1(12+8e^2)}{2\{A_2(17e^2-12e^4-5)+A_1(5-12e^2)\}}\pm \tag{17}$$

$$\pm\sqrt{\left[\frac{A_2(26+32e^4-58e^2)+A_1(12+8e^2)}{2\{A_2(17e^2-12e^4-5)+A_1(5-12e^2)\}}\right]^4+\frac{16A_2(1-e^2)^2+12A_1}{A_2(17e^2-12e^4-5)+A_1(5-12e^2)}}$$

(1) Nell'equazione a derivate parziali [III] convien porre $H^*=0$, con che non si altera il sistema di equazioni integrali somministrato dalle [II].

(2) V. pag. 249.