ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCC.

1903

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1903

Reciprocamente se un sistema di $2n$ equazioni differenziali con una trasformazione [II] si riduce alla forma risoluta [I], esso è necessariamente Hamiltoniano.

Adunque il celebre teorema di Hamilton sulla esistenza della *principal function*, la quale per derivazione somministra tutte le equazioni integrali nel moto (London, Philosph. Transactions, MDCCCXXXV, pag. 99), è esclusivo alla forma canonica da lui data alle equazioni dinamiche.

Col procedimento di Hamilton perfezionato da Jacobi, ossia per derivazione [II] delle soluzioni complete dell'equazione a derivate parziali [III] (1), si ottengono manifestamente quei sistemi di integrali che si possono dedurre l'uno dall'altro con trasformazioni di contatto non dipendenti da t.

Meccanica. — *Sull' equilibrio d' un ellissoide planetario di rivoluzione elastico isotropo.* Nota II (2) di A. Viterbi, presentata dal Corrispondente G. Ricci.

4. Ora si riprenda in esame la (14): in primo luogo essa permette evidentemente d'enunciare il risultato seguente:

Dato un ellissoide planetario di rivoluzione, isotropo, di densità costante del quale siano note l'eccentricità e la costante d'attrazione si possono risolvere, mediante la (14), *le seguenti questioni*:

I. *Noto il rapporto delle costanti d'isotropia determinare la velocità angolare colla quale l'ellissoide deve ruotare in modo uniforme intorno al suo asse a che esso sia, sotto le condizioni poste in equilibrio elastico.*

II. *Nota invece la velocità angolare con cui esso ruota in modo uniforme intorno al proprio asse, determinare il valore che deve avere il rapporto delle costanti d'isotropia* (*rapporto che è dato da* I + 2) *a che esso si trovi nelle condizioni poste in equilibrio elastico.*

Di più la (14) è la relazione che, come si disse, permette d'assegnare il limite superiore, espresso in funzione dell'eccentricità e della costante dell'attrazione, che non deve mai essere raggiunto dalla velocità angolare, affinchè l'ellissoide considerato possa essere in equilibrio elastico.

Invero risolvendo la (14) rispetto a I, le sue radici sono date da:

$$(17)\qquad \mathrm{I}=\frac{\mathrm{A}_2(26+32e^4-58e^2)+\mathrm{A}_1(12+8e^2)}{2\,\}\mathrm{A}_2(17e^2-12e^4-5)+\mathrm{A}_1(5-12e^2)\{}\pm$$

$$\pm\sqrt{\left[\frac{\mathrm{A}_2(26+32e^4-58e^2)+\mathrm{A}_1(12+8e^2)}{2\,\}\mathrm{A}_2(17e^2-12e^4-5)+\mathrm{A}_1(5-12e^2)\{}\right]^4+\frac{16\,\mathrm{A}_2(1-e^2)^2+12\,\mathrm{A}_1}{\mathrm{A}_2(17e^2-12e^4-5)+\mathrm{A}_1(5-12e^2)}}$$

(1) Nell'equazione a derivate parziali [III] convien porre $H^*=0$, con che non si altera il sistema di equazioni integrali somministrato dalle [II].

(2) V. pag. 249.

Se non che deve essere [1]:

$$1 + 4 > \frac{4}{3}$$

Dalla (17) in causa di questa disuguaglianza si ricava facilmente, ponendo per semplicità:

$$\frac{A_1}{\varrho} = \omega^2 - M_1 \qquad \frac{A_2}{\varrho} = -M_2$$

che deve essere:

$$\omega^2 < M_1 + \frac{M_2(1-e^2)}{2}$$

Questa disuguaglianza, ricordando le (3), (3') permette d'affermare che: « *Affinchè un ellissoide di rivoluzione isotropo, omogeneo ruotante uniformemente possa essere sotto le condizioni poste in equilibrio elastico, deve, dette* η, ω, f *rispettivamente la sua eccentricità, la sua velocità angolare e la costante dell'attrazione essere*:

$$(18) \qquad \omega^2 < 2\pi f \left\{ \frac{1+l^2}{l^3} \left(\operatorname{arctg} l - \frac{1}{1+l^2} \right) + \frac{1}{l^3} \left(\operatorname{arctg} l - \frac{1}{1+l^2} \right) \right\}$$

$\left(\text{dove } l^2 = \frac{\eta^2}{1-\eta^2}\right)$ *se l'ellissoide è schiacciato*: *deve essere:*

$$(18') \qquad \omega^2 < 2\pi f \left\{ \frac{1-h^2}{h^3} \left(\frac{h}{1-h^2} - \frac{1}{2} \log \frac{1+h}{1-h} \right) + \frac{1}{h^3} \left(\frac{1}{2} \log \frac{1+h}{1-h} - h \right) \right\}$$

(dove $h = \eta$) *se l'ellissoide è allungato* » (nel qual caso cioè, come è ben noto, essendo l'asse polare $2b >$ dell'asse equatoriale $2a$, l'eccentricità η è $= \frac{b^2 - a^2}{b^2}$ anzichè essere $= \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ come nell'ellissoide schiacciato).

5. Della (17) verrà fatta, come si disse, un'applicazione alla determinazione del rapporto fra le costanti d'isotropia dell'ellissoide terrestre. I semiassi equatoriale e polare di detto ellissoide sono dati rispettivamente da [2]:

$$a = m\, 6{,}378191{,}2 \qquad b = m\; 6{,}356457{,}6\,.$$

Allora l'eccentricità è:

$$\eta = 0{,}0848$$

[1] Cesaro, *Introduzione alla teoria matematica dell'elasticità*, pag. 34.
[2] Pucci, *Fondamenti di geodesia*, vol. I, pag. 4.

e risulta:

$$l = \frac{\eta^2}{1-\eta^2} = 0{,}0825$$

Di più per la terra è [1]:

$$(19) \qquad \frac{\omega^2}{2\pi f} = 0{,}0023$$

D'altro lato dalla (18), in base ai dati numerici testè indicati, mercè un semplice calcolo risulta:

$$(20) \qquad \frac{\omega^2}{2\pi f} < 1{,}0095$$

talchè;

« *L'ellissoide terrestre sodisfa pienamente alla condizione necessaria per l'equilibrio elastico* »

Ora il limite al quale $\frac{\omega^2}{2\pi f}$ deve sempre rimanere inferiore onde sia in equilibrio l'ellissoide terrestre allo stato di massa fluida è 0,22467 [2], quantità molto inferiore al limite assegnato dalla disuguaglianza (20). Pertanto come fu già accennato (v. Nota precedente, introduzione).

« *L'ellissoide terrestre, allo stato di solido elastico, nelle condizioni poste, potrebbe mantenersi in equilibrio elastico anche quando la sua velocità angolare* (*pur soddisfacendo sempre alla* (20)) *oltrepassasse il limite, al di là del quale le sue particelle, supposte fluide incomincerebbero a disgregnarsi* ».

Ciò posto, dalla (17) si ha che le radici della (14) sono per l'ellissoide terrestre:

$$I_1 = 54{,}18 \qquad I_2 = -0{,}74$$

Ma la prima soltanto di queste radici dà per il rapporto delle costanti d'isotropia un valore possibile poichè evidentemente:

$$I_2 + 2 < \frac{4}{3}$$

Dunque nelle ipotesi poste:

« *Il rapporto fra le costanti d'isotropia dell'ellissoide terrestre può assumere l'unico valore:*

$$(21) \qquad \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} = I_1 + 2 = 56{,}18\,.$$

[1] Tisserand, loc. cit., pag. 91.

[2] Tisserand, ibid.

È poi evidente che, determinato così il valore del rapporto fra le costanti d'isotropia, tenuto conto della (19) e ricordando pure che come è ben noto nel caso in discorso:

$$\omega = \frac{6,28}{24\,.\,3600}\,,$$

un semplice computo numerico permette di determinare le componenti della forza elastica che si manifesta nell'ellissoide terrestre e che, qualora fosse noto il valore della costante d'isotropia μ (oppure λ) le (16) in un colla (21) determinerebbero pienamente le componenti dello spostamento.

Matematica. — *Sulle corrispondenze algebriche fra due curve.* Nota di Michele de Franchis, presentata dal Corrispondente G. Castelnuovo.

In questa Nota, ripigliando un risultato di una mia recente ricerca [1], ne faccio un'applicazione alla teoria delle corrispondenze algebriche fra due curve. E, per mostrare la fecondità del risultato, ridimostro dei noti teoremi, alcuni dei quali avevano finora ricevuto dimostrazioni con metodo esclusivamente trascendente; tra questi, il noto teorema dei signori Castelnuovo [2] ed Humbert [3] sulla linearità delle involuzioni più volte infinite giacenti su una curva algebrica. Porgo vive grazie al prof. Castelnuovo per le utili semplificazioni suggeritemi.

1. Siano C , Γ due curve dei generi p , π ($p \geq \pi > 0$). La superficie F i cui punti sono, senza eccezione, in corrispondenza birazionale colle coppie di punti delle curve C , Γ, possiede, come sappiamo [4], due fasci di curve unisecantisi (c) , (γ) le cui curve sono birazionalmente identiche a C , Γ e le curve dei quali (come elementi delle serie ∞^1 *fasci*) corrispondono biunivocamente ai punti delle curve Γ , C, rispettivamente. Incidentalmente notiamo che il possedere due fasci di curve unisecanti è condizione necessaria ed anche sufficiente, perchè una superficie sia in corrispondenza birazionale colle coppie di punti di 2 curve algebriche.

2. Se $|L|$ è un sistema lineare qualsiasi (irreducibile o no, od anche una curva unica) sulla superficie F, e sono φ, N il suo genere ed il suo grado *virtuali*, m , μ i numeri dei punti d'intersezione della curva gene-

[1] *Sulle varietà ∞^2 delle coppie di punti di 2 curve o di una curva algebrica* (Rend. del Circ. Mat. di Palermo, t. XVII, 1903).

[2] Atti della R. Acc. di Torino, t. XXVIII, 1893.

[3] Journal de Mathématiques (4° série), t. X, 1894.

[4] Veggasi la mia Nota citata.