ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCC.

1903

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1903

È poi evidente che, determinato così il valore del rapporto fra le costanti d'isotropia, tenuto conto della (19) e ricordando pure che come è ben noto nel caso in discorso:

$$\omega = \frac{6{,}28}{24 \, . \, 3600},$$

un semplice computo numerico permette di determinare le componenti della forza elastica che si manifesta nell'ellissoide terrestre e che, qualora fosse noto il valore della costante d'isotropia μ (oppure λ) le (16) in un colla (21) determinerebbero pienamente le componenti dello spostamento.

Matematica. — *Sulle corrispondenze algebriche fra due curve.* Nota di Michele de Franchis, presentata dal Corrispondente G. Castelnuovo.

In questa Nota, ripigliando un risultato di una mia recente ricerca (1), ne faccio un'applicazione alla teoria delle corrispondenze algebriche fra due curve. E, per mostrare la fecondità del risultato, ridimostro dei noti teoremi, alcuni dei quali avevano finora ricevuto dimostrazioni con metodo esclusivamente trascendente; tra questi, il noto teorema dei signori Castelnuovo (2) ed Humbert (3) sulla linearità delle involuzioni più volte infinite giacenti su una curva algebrica. Porgo vive grazie al prof. Castelnuovo per le utili semplificazioni suggeritemi.

1. Siano C , Γ due curve dei generi p , π ($p \geq \pi > 0$). La superficie F i cui punti sono, senza eccezione, in corrispondenza birazionale colle coppie di punti delle curve C , Γ, possiede, come sappiamo (4), due fasci di curve unisecantisi (c) , (γ) le cui curve sono birazionalmente identiche a C , Γ e le curve dei quali (come elementi delle serie ∞^1 *fasci*) corrispondono biunivocamente ai punti delle curve Γ , C, rispettivamente. Incidentalmente notiamo che il possedere due fasci di curve unisecanti è condizione necessaria ed anche sufficiente, perchè una superficie sia in corrispondenza birazionale colle coppie di punti di 2 curve algebriche.

2. Se $|L|$ è un sistema lineare qualsiasi (irreducibile o no, od anche una curva unica) sulla superficie F, e sono φ, N il suo genere ed il suo grado *virtuali*, m , μ i numeri dei punti d'intersezione della curva gene-

(1) *Sulle varietà* ∞^2 *delle coppie di punti di 2 curve o di una curva algebrica* (Rend. del Circ. Mat. di Palermo, t. XVII, 1903).

(2) Atti della R. Acc. di Torino, t. XXVIII, 1893.

(3) Journal de Mathématiques (4° série), t. X, 1894.

(4) Veggasi la mia Nota citata.

rica L, rispettivamente con curve dei fasci (c), (γ), ha luogo la relazione:

$$(1) \qquad 2(\varphi - 1) - \mathrm{N} = 2m(\pi - 1) + 2\mu(p - 1) \text{ [1]}.$$

3. Sia ora L una curva irreducibile, su F, e priva, ivi, di punti multipli; δ, δ' siano i numeri dei punti di contatto di L con curve dei fasci (c), (γ) o, per meglio dire, le somme degli ordini di tali contatti. Poichè il genere virtuale φ di L è, in tal caso, anche effettivo ed i fasci (c), (γ) secano su L due involuzioni dei generi π, p e dei gradi m, μ, si ha:

$$2(\varphi - 1) = \delta + 2m(\pi - 1) = \delta' + 2\mu(p - 1).$$

Laonde il grado virtuale N di L sarà, per la relazione (1) del n. 2:

$$(2) \qquad \mathrm{N} = \delta - 2\mu(p - 1) = \delta' - 2m(\pi - 1).$$

4. Sia invece L una curva qualsiasi su F, H una curva irreducibile priva su F di punti multipli e tale (il che si può sempre ottenere) che il sistema completo $|\mathrm{L} + \mathrm{H}|$ sia irreducibile e privo, su F, di punti base multipli.

Denotando, con δ_1, δ'_1 le somme degli ordini dei contatti di H colle c e le γ, con δ_2, δ'_2 gli analoghi numeri relativi alla curva generica di $|\mathrm{L} + \mathrm{H}|$, con i il numero d'intersezioni di L con H, porremo:

$$\delta = \delta_2 - \delta_1 - 2i \;,\; \delta' = \delta'_2 - \delta'_1 - 2i.$$

Denotando con φ, φ_1, φ_2 i generi virtuali di L, H, $|\mathrm{H} + \mathrm{L}|$; con m, μ; m_1, μ_1; m_2, μ_2 i numeri d'intersezioni di una c o di una γ rispettivamente con L, H e la curva generica di $|\mathrm{L} + \mathrm{H}|$; con N, N_1, N_2 i gradi virtuali di tali curve, sappiamo che:

$$m_2 = m + m_1 \;,\; \mu_2 = \mu + \mu_1 \;,$$
$$\mathrm{N}_2 = \mathrm{N} + \mathrm{N}_1 + 2i \;,\; \delta_2 = \delta + \delta_1 + 2i,$$

e, poichè H e la curva generica di $|\mathrm{H} + \mathrm{L}|$ sono irreducibili e prive di punti multipli, e quindi $\mathrm{N}_1 = \delta_1 - 2\mu_1(p - 1) = \delta'_1 - 2m_1(\pi - 1)$ ed $\mathrm{N}_2 = \delta_2 - 2\mu_2(p - 1) = \delta'_2 - 2m_2(\pi - 1)$, ricavasi subito

$$\mathrm{N} = \delta - 2\mu(p - 1) = \delta' - 2m(\pi - 1),$$

ossia la (2) è vera sempre ed i numeri δ e δ' hanno un significato indipendente dalla scelta di H. A tali numeri daremo nome di *numeri virtuali* dei contatti di L colle c e colle γ, ed essi coincidono cogli effettivi quando L

[1] Vedi la mia Nota citata, n. 8. A proposito delle definizioni di genere e grado virtuale di una curva su una superficie F veggasi la Memoria di Castelnuovo ed Enriques: *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche* (Ann. di Mat., t. VI_3, 1901), ove tali definizioni trovansi date in modo succinto.

è priva di punti multipli. Per la (1) si ha poi sempre

$$2(\varphi-1)=\delta+2m(\pi-1)=\delta'+2\mu(p-1).$$

5. Per ricavare dalla (2) alcune importanti conseguenze, richiamiamo anzitutto il seguente lemma [1]:

Sopra una superficie algebrica qualsiasi, S, *il grado virtuale di una curva appartenente totalmente ad un sistema continuo* ∞^r $(r\geq 1)$, *privo di componenti fisse, di curve algebriche è positivo o nullo e può essere nullo solo nel caso che le curve del sistema si compongano di (una o più) curve d'uno stesso fascio privo di punti base (in particolare, irrazionale).*

Partiamo dal fatto evidente che ogni sistema continuo di curve algebriche sopra una superficie algebrica, è totalmente contenuto in un sistema algebrico (di cui le curve del sistema dato sono curve totali). Perciò, data una curva L_0 del sistema continuo, almeno ∞^1, possiamo sempre considerare una serie algebrica ∞^1 (L) di curve, contenente totalmente L_0. Nell'ente algebrico ∞^1 (L) costruiamo una serie lineare g^1_m, senza elementi fissi, un cui gruppo sia la curva L_0, contata m volte; ciò, come è noto, può sempre ottenersi, prendendo m abbastanza alto. Allora le curve composte mL_0, $L_1+L_2+\cdots+L_m$, ... corrispondenti ai varî gruppi della g^1_m formano una serie ∞^1 razionale la quale è, quindi, contenuta *totalmente* in un sistema lineare [2]. Il grado virtuale di questo può ottenersi in due modi: 1° considerando le intersezioni (fisse e variabili) di due curve del sistema: allora, se i è il numero d'intersezioni di due curve L, risulta tale grado eguale ad $m^2 i$; 2° considerando il grado virtuale della curva multipla mL_0; calcolando tale grado in funzione del grado virtuale N di L_0, trovasi subito eguale ad m^2N. Adunque $m^2 i=m^2 N$, e quindi $i=N$, e, poichè $i\geq 0$ (perchè il sistema razionale non ha certo componenti fisse) e non è $i=0$ se non nel caso che le componenti delle L appartengano ad uno stesso fascio, privo di punti base, così in ogni altro caso $i>0$. Segue che $N\geq 0$ e che N può essere 0 solo nel caso che le componenti delle L siano curve di uno stesso fascio, privo di punti base.

6. Interpretando tale risultato sulla superficie F di cui trattiamo, si ha che:

Sulla superficie F *i cui punti rappresentano le coppie di punti di due curve algebriche* C, Γ, *dei generi* p, π $(p\geq\pi>0)$, *se una curva algebrica* L *è contenuta totalmente in un sistema continuo di curve alge-*

[1] La dimostrazione che ne do mi fu gentilmente comunicata dal prof. Castelnuovo, avendone io trovata un'altra meno semplice.

[2] Enriques, *Una osservazione sulla rappresentazione parametrica delle curve algebriche* (Rend. del Circ. Mat. di Palermo, t. X, 1896).

briche, privo di componenti fisse, denotando con φ *il genere virtuale di* L, *con* δ, δ' *i numeri virtuali dei contatti di* L *colle curve* c *e* γ *e con* m, μ *i numeri dei punti d'intersezione di* L *con tali curve, allora è certo*:

$$\varphi - 1 \geq m(\pi - 1) + \mu(p - 1);$$
$$\delta \geq 2\mu(p-1) \;;\; \delta' \geq 2m(\pi - 1);$$

i segni d'eguaglianza potendo solo sussistere nel caso che il sistema in discorso sia un fascio privo di punti base o che le sue curve si spezzino in curve di un cotal fascio.

7. Data su F la curva L coi caratteri precedentemente definiti, facendo corrispondere un punto di C ed un punto di Γ rappresentati da un medesimo punto di L, questa definisce una corrispondenza algebrica (m, μ) fra C e Γ: ad un punto di C vengono a corrispondere μ punti di Γ, ad uno di questi m punti di C. Viceversa, data una corrispondenza algebrica (m, μ) fra C e Γ, il luogo delle immagini, su F, delle coppie di punti omologhi è una curva L incontrante in m punti le c ed in μ punti le γ. Se la corrispondenza (m, μ) è irreducibile ed a punti di coincidenza di C non corrispondono punti di coincidenza di Γ, la L è irreducibile e priva di punti multipli, e viceversa. I caratteri δ e δ' di L sono allora eguali ai numeri di coincidenze della corrispondenza (m, μ). In questo ed in qualunque altro caso poi, δ e δ' rappresentano invarianti della corrispondenza (m, μ) dipendenti dalle coincidenze della corrispondenza (m, μ) e potremo chiamarli *numeri virtuali delle coincidenze su* C *e su* Γ (rispettivamente). Per il loro calcolo effettivo basta seguire sempre il procedimento del n. 4 [1].

Dietro ciò, il risultato del numero precedente assume questo aspetto:

Se fra due curve C, Γ *dei generi* p, π $(p \geq \pi > 0)$ *intercede una corrispondenza algebrica* (m, μ) *contenuta in un sistema continuo di corrispondenze algebriche* (m, μ), *delle quali non faccia sempre parte una corrispondenza fissa, denotandone con* δ, δ' *i numeri virtuali di coincidenze, su* C, Γ *rispettivamente, è sempre*

$$\delta \geq 2\mu(p-1) \;;\; \delta' \geq 2m(\pi - 1).$$

Le eguaglianze possono solo sussistere quando il sistema di corrispondenze sia cosiffatto che due corrispondenze qualunque del sistema non ab-

[1] Nel caso che la L sia irreducibile e priva di punti multipli, δ e δ' coincidono coi numeri di coincidenze d e d' che figurano nella formola di Zeuthen, mentre, nel caso che, pur essendo L (ossia la corrispondenza) irreducibile, vi siano punti multipli di L (ossia coincidenze corrispondentisi), i numeri δ e δ' differiscono da d e d' per uno stesso numero intero, avendosi $\delta - \delta' = d - d' = 2\mu(p-1) - 2m(\pi - 1)$. Sarebbe poi facile vedere che in tal caso $\delta - d = \delta' - d' = 2E$, essendo E l'abbassamento sul genere effettivo prodotto dai punti singolari di L.

biano coppie di punti corrispondenti comuni o che le corrispondenze del sistema si spezzino tutte in corrispondenze parziali formanti un sistema siffatto.

8. Dal risultato del n. 6 si può ricavare immediatamente un noto ed importante teorema di Schwarz.

Se C e Γ sono due curve birazionalmente identiche e di genere $p > 0$, fissiamo una corrispondenza birazionale fra C e Γ. Ad essa corrisponde sulla superficie F, i cui punti rappresentano le coppie di punti di C e Γ, una curva algebrica L unisecante le c e le γ e perciò irreducibile e di genere effettivo e virtuale eguale a p. Se esistesse un sistema continuo di trasformazioni birazionali di C in sè stessa, e quindi anche di C in Γ, queste ultime darebbero luogo, su F, ad un sistema continuo di curve algebriche (di genere p), unisecanti le c e le γ, e di genere (virtuale ed effettivo p). Quindi dovrebbe essere (n. 6)

$$p - 1 \geq 2(p - 1).$$

donde $p \leq 1$. Si ricava così il teorema summenzionato:

Nessuna curva di genere maggiore di 1 *può ammettere un gruppo continuo di trasformazioni birazionali in sè.*

Ed inoltre, se $p = 1$, occorre, avendosi l'eguaglianza $p - 1 = 2(p - 1)$, che il sistema sia proprio un fascio (n. 6). Si ricava così la nota proposizione che *le schiere continue di trasformazioni birazionali di una curva ellittica in sè dipendono algebricamente da un parametro e sono tali che, data una coppia di punti corrispondenti* (*in ordine fissato*), *viene determinata una corrispondenza della schiera.* Si potrebbero così ricavare le proprietà di tali schiere ed il loro numero, ma preferiamo tacerne trattandosi di cose notissime.

Dando altro aspetto alla stessa questione, ritrovasi che:

Se una superficie possiede più di due fasci di curve algebriche unisecantisi, essa è razionale ovvero rappresenta le coppie di punti di due curve ellittiche birazionalmente identiche; quindi le coordinate dei punti della superficie dipendono birazionalmente o da due parametri o dalle funzioni ellittiche (*cogli stessi periodi*) pu, $p'u$, pv, $p'v$ *di due parametri* u, v [1].

9. Ed ora ricaveremo dallo stesso risultato (come è espresso nel n. 7) il teorema di Castelnuovo ed Humbert al quale accennammo nella prefazione.

Sia C una curva di genere $p > 0$, Γ una curva birazionalmente identica ad essa [per la quale sia ben fissata la corrispondenza (1, 1) con C]. Sia poi I_m un'involuzione irrazionale, di grado m e di genere $\varphi > 0$, su C.

[1] U. Amaldi, *Determinazione delle superficie algebriche su cui esistono più di due fasci di curve algebriche unisecantisi* (Questi Rendiconti, 1902).

Ad ogni punto di Γ facendo corrispondere su C il gruppo degli $m-1$ punti che, coll'omologo, su C, del punto dato su Γ, formino un gruppo della I_m, si viene a stabilire una corrispondenza algebrica $(m-1, m-1)$ fra C e Γ.

Se i $\varDelta = 2(p-1) - 2m(\varphi - 1)$ punti doppi di I_m sono distinti ed appartengono a gruppi distinti della I_m, la corrispondenza $(m-1, m-1)$ fra C e Γ non possiede punti di coincidenza corrispondentisi su C e Γ, donde i numeri virtuali ed effettivi di tali coincidenze sono evidentemente

$$\delta = \delta' = (m-2)\varDelta .$$

Se la I_m non soddisfa alle condizioni predette, per toglier campo a qualsiasi obbiezione, operiamo così: Pensiamo alla superficie F i cui punti rappresentano le coppie di punti di C, Γ, e siano ivi C_1, L le curve luogo delle immagini delle coppie di punti corrispondenti di C, Γ rispettivamente nelle corrispondenze $(1, 1)$, $(m-1, m-1)$ predette. Consideriamo poi, a parte, la curva Σ, di genere φ, i cui punti rappresentano i gruppi della I_m e la superficie R i cui punti rappresentano le coppie di punti di C e Σ. La R è in corrispondenza $(1, m)$ colla F ed alla curva T di R, il cui punto generico rappresenta un punto di C ed il punto di Σ corrispondente al gruppo della I_m contenente quel punto, corrisponde su F la curva spezzata in C_1 ed in L. Sulla superficie R la curva T incontra in *un* punto ogni curva σ corrispondente ad un punto di C associato con tutti quelli di Σ. Il suo genere effettivo e virtuale è quindi p, perchè il fascio delle σ ha il genere p.

La T incontra poi in m punti le curve c' corrispondenti ai varî punti di Σ associati con tutti quelli di C, il cui fascio è di genere φ. Il grado virtuale ν di T ricavasi allora dalla relazione (1) del n. 2, cioè:

$$2(p-1) - \nu = 2(p-1) + 2m(\varphi - 1),$$

laonde

$$\nu = -2m(\varphi - 1),$$

ossia

$$\nu = \varDelta - 2(p-1).$$

Il grado virtuale, su F, della curva corrispondente $C_1 + L$ è poi $N_1 = m\nu$ e quindi $N_1 = m\varDelta - 2m(p-1)$. Intanto, denotando con N il grado virtuale di L, osservando che le intersezioni di C_1 ed L sono, evidentemente, $\varDelta$, e che il grado virtuale di C_1 è $-2(p-1)$ [1], si ha:

$$N_1 = N - 2(p-1) + 2\varDelta .$$

Da questa e dalla precedente relazione ricavasi $N = (m-2)\varDelta - 2(m-1)(p-1)$

[1] Ciò segue dalla relazione del n. 2. Cfr. del resto la mia Nota citata, n. 14.

e, poichè dev' essere $N = \delta - 2(m-1)(p-1)$, ricavasi $\delta = (m-2)\Delta$. Cioè:

Data su una curva C, *di genere* p, *un'involuzione irrazionale* (¹) *di genere* φ, *la corrispondenza* $(m-1, m-1)$, *da essa definita, fra* C *ed una curva* Γ *equivalente a* C, *ha come numero virtuale* δ *di coincidenze (su* C *o su* Γ*) il numero* $(m-2)\Delta$, *ove* Δ *è il numero di punti doppi della* I_m *o, più precisamente,* $\Delta = 2(p-1) - 2m(\varphi-1)$.

10. Stabilito questo fatto, la dimostrazione del teorema sulla inesistenza su una curva algebrica di una serie continua d'involuzioni irrazionali si fa subito.

Se il genere p di C è 0, la cosa dipende dal fatto che C non possiede involuzioni irrazionali. Se $p = 1$, la cosa si dimostra pure, com' è noto, geometricamente ed in modo elementare (²).

Sia dunque $p > 1$ e sia Γ una curva equivalente a C. Ogni involuzione I_m, di grado m e genere $\varphi > 0$, appartenente ad una serie continua di tali involuzioni, determina fra C e Γ una corrispondenza $(m-1, m-1)$ totalmente contenuta in un sistema continuo di cosiffatte corrispondenze. *Supposto anzitutto che le* I_m *non siano tutte composte con una stessa involuzione* (certo irrazionale) I_r (r divisore di m), tale sistema continuo di corrispondenze è certo privo di componenti fisse. Denotando con δ il numero virtuale delle coincidenze, su C o su Γ, di tale corrispondenza, dev' essere $\delta = (m-2)\Delta$, ove $0 \leq \Delta = 2(p-1) - 2m(\varphi-1)$. E, poichè la corrispondenza è contenuta totalmente in un sistema continuo, privo di componenti fisse, dev' essere (n. 7) $\delta \geq 2(m-1)(p-1)$, ossia $(m-2)\Delta \geq 2(m-1)(p-1)$. Essendo $p > 1$, dev' essere dunque $\Delta > 2(p-1)$, il che porta la conseguenza $\varphi < 1$, ossia $\varphi = 0$, contro l' ipotesi. Il fatto non può dunque presentarsi.

Abbiamo fatto l' ipotesi che le I_m della serie non siano composte colla stessa I_r (r divisore di m). Togliendo tale restrizione, sia r il massimo divisore di m tale che le I_m siano composte con una stessa I_r. Nell' ente I_r ogni I_m definisce un' involuzione irrazionale, di grado $\frac{m}{r}$; dunque I_r è sostegno di una serie continua d' involuzioni irrazionali, certo non composte con una involuzione fissata. Perciò siamo ricondotti al caso precedente, e neppure tale caso può quindi presentarsi. Cioè:

(¹) Si vede però facilmente che la stessa cosa vale se la I_m è una serie lineare.

(²) Castelnuovo, *Geometria sulle curve ellittiche* (Atti della R. Acc. di Torino, t. XXIV, 1888). Del resto si vedrà che la dimostrazione seguente può generalizzarsi anche alle curve ellittiche [prendendo ivi corrispondenze (m, m) invece che $(m-1, m-1)$], profittando del fatto che una tal curva possiede infinite trasformazioni birazionali in sè e che quindi ∞^1 involuzioni I_m dànno luogo ad ∞^2 corrispondenze (m, m) fra C e Γ.

Sopra una curva algebrica C *non può esistere una serie continua d'involuzioni irrazionali.*

E da qui, com'è noto, ricavasi subito che

Su una curva algebrica C *ogni serie algebrica* ∞^r, *di gruppi di punti tale che* r *punti generici di* C *facciano parte di un solo gruppo è necessariamente lineare, se* $r > 1$, *oppure è l'insieme di tutti i possibili gruppi di* r *punti della curva* C.

Fisica. — *Intorno alla determinazione della densità e della massa di quantità minime di un solido.* Nota di G. Guglielmo, presentata dal Socio P. Blaserna.

In due Note precedenti (Rendic. dell'Accad. dei Lincei, 1° sem. 1900 e 1901) indicai come, sia coll'areometro ad inclinazione variabile, sia con una bilancia con giogo e piatti di vetro, totalmente immersa nell'acqua, si possa determinare il peso apparente nell'acqua, e quindi la densità, di piccole quantità d'un solido, con una esattezza molto maggiore di quella che si potrebbe ottenere colle solite bilancie di precisione. In entrambe le Note lo spazio concesso alle medesime non mi permise di riferire nè i risultati delle determinazioni che avevo eseguito come prova del metodo e degli apparecchi, nè altri particolari relativi all'uso ed alla costruzione dei medesimi, che adesso riferisco nella presente Nota, insieme ad alcune modificazioni suggerite dall'esperienza.

Bilancia molto sensibile per determinare il peso del solido nell'aria. — Nelle prime determinazioni della densità di piccole quantità di un solido coll'areometro ad inclinazione variabile, m'era spesso avvenuto che la poca esattezza nella determinazione del peso nell'aria colla bilancia di precisione rendeva in gran parte inutile la grande esattezza nella determinazione del peso nell'acqua. Per evitare questo inconveniente proposi di dedurre la densità cercata determinando il peso del corpo in due liquidi di densità molto diversa coll'areometro ad inclinazione; però non potei applicare questo metodo per mancanza di un sufficiente volume del liquido più denso, inoltre in molti casi si raddoppierebbero così le difficoltà della determinazione.

In seguito, nello studio della bilancia totalmente immersa, osservai che questa, se è convenientemente costruita, in modo che non risenta quasi affatto le variazioni della densità dell'acqua, deve avere la stessa posizione d'equilibrio tanto nell'acqua che nell'aria, e nelle prove relative ebbi ad osservare che essa anche nell'aria si comportava come una bilancia molto più sensibile (almeno per piccoli pesi) di quella di precisione. Questa grande sensibilità deriva evidentemente da ciò: 1° che per effetto del piccolo peso del giogo è reso