ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCC.

1903

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1903

Sopra una curva algebrica C *non può esistere una serie continua d'involuzioni irrazionali.*

E da qui, com'è noto, ricavasi subito che

Su una curva algebrica C *ogni serie algebrica* ∞^r, *di gruppi di punti tale che* r *punti generici di* C *facciano parte di un solo gruppo è necessariamente lineare, se* $r > 1$, *oppure è l'insieme di tutti i possibili gruppi di* r *punti della curva* C.

Fisica. — *Intorno alla determinazione della densità e della massa di quantità minime di un solido.* Nota di G. Guglielmo, presentata dal Socio P. Blaserna.

In due Note precedenti (Rendic. dell'Accad. dei Lincei, 1° sem. 1900 e 1901) indicai come, sia coll'areometro ad inclinazione variabile, sia con una bilancia con giogo e piatti di vetro, totalmente immersa nell'acqua, si possa determinare il peso apparente nell'acqua, e quindi la densità, di piccole quantità d'un solido, con una esattezza molto maggiore di quella che si potrebbe ottenere colle solite bilancie di precisione. In entrambe le Note lo spazio concesso alle medesime non mi permise di riferire nè i risultati delle determinazioni che avevo eseguito come prova del metodo e degli apparecchi, nè altri particolari relativi all'uso ed alla costruzione dei medesimi, che adesso riferisco nella presente Nota, insieme ad alcune modificazioni suggerite dall'esperienza.

Bilancia molto sensibile per determinare il peso del solido nell'aria. — Nelle prime determinazioni della densità di piccole quantità di un solido coll'areometro ad inclinazione variabile, m'era spesso avvenuto che la poca esattezza nella determinazione del peso nell'aria colla bilancia di precisione rendeva in gran parte inutile la grande esattezza nella determinazione del peso nell'acqua. Per evitare questo inconveniente proposi di dedurre la densità cercata determinando il peso del corpo in due liquidi di densità molto diversa coll'areometro ad inclinazione; però non potei applicare questo metodo per mancanza di un sufficiente volume del liquido più denso, inoltre in molti casi si raddoppierebbero così le difficoltà della determinazione.

In seguito, nello studio della bilancia totalmente immersa, osservai che questa, se è convenientemente costruita, in modo che non risenta quasi affatto le variazioni della densità dell'acqua, deve avere la stessa posizione d'equilibrio tanto nell'acqua che nell'aria, e nelle prove relative ebbi ad osservare che essa anche nell'aria si comportava come una bilancia molto più sensibile (almeno per piccoli pesi) di quella di precisione. Questa grande sensibilità deriva evidentemente da ciò: 1° che per effetto del piccolo peso del giogo è reso

minimo l'attrito che costituisce il principale ostacolo al buon funzionamento d'una bilancia, ed è inoltre aumentata la sensibilità, come risulta dalla nota formula; 2° che coll'uso di due punte d'appoggio invece del coltello mediano e d'una sola punta d'appoggio per ciascuno dei piatti, sono eliminati gl'inconvenienti che possono derivare da una imperfetta costruzione o collocazione dei coltelli.

Sebbene quindi sia possibile servirsi d'uno stesso giogo per le pesate nell'aria e nell'acqua, è tuttavia utile e comodo di usare due gioghi diversi adattati ciascuno allo scopo cui deve servire, e così si evita anche di dovere ad ogni determinazione togliere il giogo dell'acqua ed asciugarlo.

Le forme di giogo da me usate sono parecchie che però non differiscono ezzenzialmente dalla forma solita, solamente nelle bilancie a riflessione le due punte d'appoggio che sostituiscono il coltello mediano erano collocate fra il giogo e lo specchietto e l'estremità di quello erano ripiegate orizzontalmente ad angolo retto, in modo che entrambe le punte d'appoggio estreme fossero equidistanti da entrambe le punte mediane suddette.

Inoltre nelle prime esperienze il giogo era formato da un tubo di vetro di 3 mm. di diametro, ma in seguito per diminuire la flessibilità ed aumentarne la leggerezza esso era formato da una molla da orologio da tasca, ritemperata dopo averla collocata e stretta fra due liste piane di ferro, cosicchè essa si raddrizzasse e divenisse più rigida. Si possono così ottenere gioghi pesanti una frazione di grammo e pur tuttavia molto rigidi nel piano della molla che deve coincidere col piano d'oscillazione.

Credo anzi che simili gioghi fatti con molle più forti, p. es. molle da sveglie, possano servire utilmente anche per pesi superiori ai 100 grammi; si può impedire la flessione laterale o la torsione di queste molle, disponendone due parallellamente alla stessa altezza riunite solidamente nel mezzo e alle estremità da tre telaietti che portano i coltelli o le punte d'appoggio, oppure preferibilmente riunendo e fissando solidamente le estremità delle molle ma tenendole separate nel mezzo dal telaietto mediano.

Nelle prime determinazioni il giogo era lungo 30 cm., affinchè il braccio di leva su cui agiva il momento del piccolo peso ignoto fosse grande quanto era possibile e comodo, ed inoltre fosse possibile di ottenere collo spostamento sul giogo di un solo pesetto scorrevole e noto (cavaliere) piccole frazioni (millesimi) del momento massimo esercitato da esso cavaliere collocato sul piatto. In seguito usai gioghi lunghi 12 cm. meno flessibili e più rapidi; con un cavaliere di 5 mgr. spostato da un estremo all'altro del giogo potevo avere lo stesso effetto come aggiungendo o togliendo 1 cgr. da un piatto, collo spostamento di una divisione ($^1/_{50}$ del braccio della bilancia) ottenevo l'effetto di $^1/_{10}$ di milligrammo sul piatto e tenendo conto della inclinazione del giogo prodotta da questo peso e misurata per riflessione e di quella prodotta dal peso ignoto, potevo dedurre le frazioni di peso inferiori ad $^1/_{10}$ di milli-

grammo. Rinunziai a far scorrere sul giogo pesi maggiori di 5 mgr. poichè nè la divisione era perfetta, nè i pesi s'adattavano bene sui tratti, ed uno spostamento invisibile di questi pesi avrebbe potuto causare un errore apprezzabile.

Come punte d'appoggio sia mediane che estreme usavo punte d'ago che aguzzavo accuratamente ad angolo non troppo acuto su una pietra a grana fina, perchè spesso queste punte terminavano con una piccola superficie piana (visibile col microscopio) sufficiente per impedire il buon funzionamento della bilancia. I piattelli erano formati molto semplicemente da una lamina sottile di alluminio ritagliata in forma di due dischi disuguali riuniti da una listarella, lunga circa 1 cm., e ripiegati ad angolo retto dalla stessa parte di questa lista; il disco maggiore serviva da piatto ed il disco minore, reso concavo inferiormente, da cappelletto riposante in bilico sulla punta d'ago all'estremità del giogo. Risultò inutile l'uso di cappelletti di agata, o di vetro, però questi ultimi si possono fare con facilità leggerissimi soffiando una bollicina di vetro all'estremità d'un tubo molto sottile e poscia scaldando una metà della bollicina ed aspirando leggermente nella medesima finchè il vetro fuso incurvandosi colla convessità verso l'interno, giunge molto vicino ma non a contatto della parete opposta.

A questi piattelli conviene fissare, p. es. con ceralacca, sotto al disco maggiore, un pezzetto d'ago magnetizzato, convenientemente orientato; esso è sufficiente perchè il piattello conservi stabilmente la voluta orientazione e non vada presto o tardi, come farebbe un piatto non magnetico, ad appoggiarsi colla listarella contro il giogo perdendo così la mobilità e rendendo incerto il loro punto d'applicazione sul giogo.

Conviene dire che questi piattelli così leggeri, saltano giù dal giogo con grande facilità; occorre perciò limitare la corsa del giogo in modo che questo per un eccesso di peso non acquisti troppa velocità, occorre sovratutto che i piattelli non tocchino il piano della bilancia; tale inconveniente sarebbe certamente diminuito da una costruzione regolare col meccanismo per sollevare e abbassare il giogo ed usando cappelletti più profondi.

Quando si vogliono determinare solamente le densità di quantità molto piccole d'un solido, p. es. di peso inferiore al centigrammo, si può far uso di piattelli minuscoli fissati stabilmente al giogo; usai a tale scopo dischetti di alluminio di 6 a 7 mm. di diametro, leggermente concavi, fissati mediante mastice, colla concavità in alto, alle estremità di un giogo lungo 30 cm.; su questi piattelli era tracciata una linea nera perpendicolare al giogo che indicava dove doveva cadere il centro di gravità dei pesi. L'errore che poteva derivare da un inesatto apprezzamento della posizione del centro di gravità del minuscolo corpo, era inferiore a quello che poteva derivare da un inesatto apprezzamento della posizione del cavaliere lungo il giogo; mi persuasi coll'esperienza che togliendo ripetutamente il corpicciuolo dal piattello e ricol-

locandolo in modo che fosse bisecato dalla linea nera suddetta s'otteneva sempre per il peso incognito lo stesso valore. Meno soddisfacente trovai l'uso di piattelli formati da una lamina piana piegata ad angolo ottuso, collo spigolo perpendicolare al giogo, perchè molti corpi, p. es. le laminette, vi prendono posizioni evidentemente erronee dalle quali è difficile o impossibile spostarli, mentre nei piattelli leggermente concavi è facilissimo spostare il corpicciuolo spingendolo coll'estremità d'un'astina in modo che esso vada nella posizione che si ritiene più opportuna.

La teoria della bilancia lascia prevedere che la sensibilità che si può ottenere con bilancie così leggere è grandissima; così se una bilancia il cui giogo pesi 250 gr. devia di 1:200 per un eccesso di peso di 1 mgr. su uno dei piatti, una bilancia col giogo di ugual lunghezza ma pesante solo 2,5 gr. devierà ugualmente per un eccesso di peso di 0,01 mgr., oppure si potrà ottenere nei due casi la stessa sensibilità allontanando nel secondo caso il centro di gravità dal centro di sospensione, ciò che torna utile se si deducono gli eccessi di peso dalle inclinazioni del giogo.

Difatti così ottenni facilmente uno spostamento, dell'imagine della scala osservata per riflessione, che corrispondeva ad 1 cm. per millesimo di milligramma; ed inoltre la posizione d'equilibrio era notevolmente costante; come di solito esse dovevano esser accuratamente difese dalle correnti d'aria non solo mediante una vetrina non ampia, ma altresì colla costanza ed uniformità della temperatura.

Altri particolari relativi alle determinazioni del peso del solido nell'acqua. — Nelle ultime determinazioni mi son servito d'un giogo lungo 12 cm. simile a quello usato per le pesate nell'aria; esso aveva sui gioghi lunghi il vantaggio di assumere molto più rapidamente la posizione d'equilibrio. Le punte d'appoggio non potendo essere d'acciaio, che si sarebbe ossidato, erano di vetro, aguzzate all'estremità il più possibile (mi servii a tale scopo talvolta anche d'una pietra molare a grana finissima) e poi fuse cercando di conservare l'acutezza della punta. In un'altra Nota dimostrai che quando il raggio di curvatura dello spigolo d'un coltello da bilancia è maggiore della distanza fra il centro di curvatura ed il centro di gravità, il giogo s'inclina fortemente per effetto d'una piccola inclinazione del sostegno.

Come piattelli usai prima quelli rappresentati nella Nota precedente; solo che nella forma più semplice le astine che servivano di zavorra erano riunite formando un'ansa ed avevano fissato un frammento d'ago magnetico utile per mantenere immutata la loro orientazione. In seguito trovai che la forma rappresentata qui accanto (due bolle riunite da un'astina verticale centrata) riunisce la facilità di costruzione e la comodità nell'uso delle forme precedenti. È utile che la concavità superiore, ottenuta fondendo la bolla

alla parte superiore ed esercitando una leggera aspirazione sia così profonda, che i pesetti vi rimangano completamente immersi anche se la bolla viene a galla o si estrae dall'acqua; è utile altresì che essa bolla presenti due astine agli estremi di un diametro alle quali si possono appendere pesi in forma di cavaliere, e per le quali si può sollevare la bolla servendosi d'un uncino a due branche ricurve.

Anche questi piattelli molto facilmente saltano giù dalle punte d'appoggio, e talvolta la mobilità del giogo e quella dei due piattelli può recare qualche imbarazzo. Per evitare ciò, spesso una delle bolle era fissa al giogo, ossia questo da un lato terminava con una bolla zavorrata in modo che il suo peso apparente nell'acqua fosse nullo. Il volume del piattello mobile all'altra estremità dev'essere all'incirca uguale a quello della bolla fissa, in modo che le piccole variazioni nella densità dell'acqua non facciano variare l'inclinazione del giogo.

Nelle mie esperienze il giogo funzionava solamente come indicatore delle frazioni di centigramma; esso era regolato in modo che nell'acqua, senza piattello mobile, carico in sua vece di un peso di 5 mgr. collocato all'estremità del giogo, questo si disponeva orizzontalmente. Nello stesso recipiente o in un recipiente a parte più piccolo, caricavo il piattello di pesi finchè affondasse, ma venisse a galla togliendo 1 cgr.; portavo allora il piattello sul giogo e spostavo il peso di 5 mgr. (occorrendo fin sull'altro braccio) in modo da ottenere l'orizzontalità o una nota inclinazione del giogo; finalmente collocavo il peso ignoto sul piattello e toglievo pesi fino ad ottenere l'inclinazione precedente, e così per sostituzione ottenevo o calcolavo il valore del peso ignoto.

In tal modo è evitata la necessità di frazioni di pesi appositamente costruiti, che facilmente si perdono, o si scambiano, e sono quasi invisibili se molto minute; bastano i soliti pesi, coll'aggiunta di uno o più cavalieri di 5 mgr. di filo di platino.

Avvertenze per la determinazione del peso nell'acqua d'un solido polverulento. — Sebbene entrambe le suddette bilancie per le pesate nell'acqua e nell'aria possano dare esattamente sino al millesimo di milligramma o meno, il valore del peso che agisce su un piattello e diano per questo valore dei risultati concordantissimi anche se ottenuti con diversi apparecchi, tuttavia le cure necessarie per evitare le cause d'errore avventizie non possono essere lievi. Nelle determinazioni della densità d'un solido la difficoltà è aumentata dalla possibile variazione di peso della sostanza o dei recipienti che la contengono durante le manipolazioni occorrenti per le due pesate, e tale difficoltà che si riscontra anche nelle determinazioni solite, è maggiore se il corpo è polverulento, e ancora maggiore se la sua quantità inoltre è minima. Così p. es. se, avendo equilibrato sul piatto della bilancia nell'acqua un tubetto, lo toglievo, asciugavo, o se vi facevo bollire dell'acqua (operazioni

che occorrono nella determinazione della densità delle polveri) e poi lasciatolo raffreddare lo riportavo sulla bilancia osservavo una variazione di peso non trascurabile; questa però diventava quasi nulla se ripetevo queste operazioni parecchie volte.

Evitai completamente queste cause d'errore invertendo l'ordine solito delle operazioni necessarie per determinare la densità d'una polvere ed operando nel modo seguente:

Determinavo anzitutto il peso della polvere nell'aria, sebbene di questo peso iniziale non intendessi servirmi, poscia versata la polvere in un tubetto pieno d'acqua eseguivo su di esso tutte le operazioni necessarie a far bagnare ed affondar la polvere e a scacciar l'aria, cioè scosse ed ebollizione, o per mezzo del calore, o per mezzo della macchina pneumatica. Quindi dopo lasciato raffreddare introducevo il tubetto nell'acqua ove trovavasi la bilancia, in modo che esso si riempisse d'acqua e versavo la polvere, operando sempre sott'acqua, in una coppetta o tubetto collocato sul piatto della bilancia; questa operazione non presenta nessuna difficoltà, l'acqua distrugge quasi affatto l'adesione della polvere alle pareti ed anche i grani più minuscoli, occorrendo coll'aiuto di qualche scossa, obbediscono alla gravità tanto che potevo servirmi d'un imbuto, anch'esso sott'acqua, per evitare che essi cadessero fuori della coppetta o tubetto destinati a riceverli; i pesi che dovevo togliere dal giogo o dal piatto per ristabilire le condizioni primitive d'equilibrio mi davano il peso della polvere nell'acqua. Versavo quindi la polvere in una capsuletta immersa nell'acqua della bilancia e determinavo i pesi numerati occorrenti a ristabilire l'equilibrio, quindi versavo nuovamente la polvere sulla coppetta sul piatto della bilancia e toglievo i pesi per ristabilire l'equilibrio, ed ottenevo così di seguito una serie di valori di solito concordantissimi che davano per sostituzione un valore sicuro del peso apparente della polvere nell'acqua.

Finalmente, tolto il tubetto colla polvere dall'acqua lo portavo in una capsuletta piena d'acqua distillata, ve lo immergevo completamente e lo rovesciavo in modo da far cadere interamente la polvere al fondo della capsula, cambiavo una o due volte l'acqua distillata, decantavo l'acqua in eccesso, ne assorbivo ancora alcune goccie con carta bibula, lasciavo asciugare l'acqua e pesavo la polvere senza averne perduto la minima parte. Volendo ripetere le operazioni, converrà sempre paragonare il peso della polvere nell'acqua con quello della stessa polvere nell'aria determinato successivamente.

I pesi numerati di platino subiscono una spinta che calcolai supponendo che la densità del platino fosse 21 e che dedussi dal valore stampato sui pesi; le piccole differenze possibili nella densità suddetta sono certamente senza influenza nel maggior numero dei casi, tuttavia si potrebbe ottenere tale densità con tutta l'esattezza di cui è suscettibile la bilancia determinando nel modo solito la densità d'una gocciolina di mercurio che si può

avere facilmente puro e di densità ben nota, ed allora rimane come sola incognita la densità dei pesi di platino.

Alcune determinazioni coll'areometro ad inclinazione variabile e colla bilancia totalmente immersa. — Credo utile riferire alcune delle prime determinazioni eseguite coll'areometro ad inclinazione variabile, ed a riflessione. Essendo l'areometro scarico, la divisione dell' immagine della scala coincidente col reticolo del cannocchiale era inizialmente 72 mm., ed 80 mm. alla fine della determinazione per effetto del lento crescer della temperatnra. Nella seguente tabella, nelle colonne Pt ed Al sono indicate le posizioni dell' immagine della scala quando l'areometro era carico successivamente ed alternativamente di un filo sottilissimo di platino pesante 1,8 mgr. nell'aria e di un filo di alluminio pesante nell'aria 2,55 mgr. Nella colonna δ si trova la differenza fra le posizioni della scala corrispondenti ai due fili:

Al	355,0	—	356,2	—	357,2	—	359,3	—	360,7
Pt	—	361,0	—	361,7	—	363	—	365	—
δ	—	5,40	5.15	5,00	5,15	4,75	4,75	5,00	—

Quindi il peso di 1,8 mgr. (nell'acqua 1,71) produceva uno spostamento medio della scala di 287 divisioni, il filo d'alluminio produceva uno spostamento di 287 — 5 divisioni, ed il suo peso nell'acqua risulta $\frac{282}{287}$ 1,71 mgr. Nonostante la variazione progressiva della temperatura, la massima differenza del valore medio di δ è di 0,37 divisioni corrispondenti a poco più di 0,002 mgr. Il valore della densità (2,93) tuttavia risulta poco esatto per effetto dell' inesattezza dei pesi nell'aria del filo di platino e di quello di alluminio.

Determinazione della densità d'un filo d'alluminio pesante nell'aria gr. 0,3562. — Anche in questo caso la determinazione colla solita bilancia sarebbe riuscita poco esatta per effetto dell'azione perturbatrice prodotta dal filo di sospensione. Operai perciò con un areometro, non a riflessione, osservando con un cannocchiale gli spostamenti dell'estremità del giogo sopra una scala millimetrica; un peso apparente uguale ad 1 mgr. produceva nel giogo uno spostamento di 10,5 divisioni. Ecco i risultati di due determinazioni eseguite a parecchie ore d' intervallo:

Pt	36,7	—	35,7	—	35,0	—	34,7	—	33,6	—	—
Al	—	30,7	—	30,7	—	29,9	—	29,0	—	—	—
Pt	29,3	—	29 3	—	29.0	—	29,0	—	28,8	—	28,5
Al	—	24,0	—	24,0	—	24,0	—	24,0	—	23,2	—

La differenza media risultò di 5,1 divisioni corrispondenti a 0,49 mgr., quindi il peso del filo di alluminio risultò uguale a quello di platino (0,2357 gr. nell'aria. 0,2239 mgr. nell'acqua) aumentato di 0,49 mgr., cioè 0,22439 mgr. La densità cercata risulta 2,703.

Densità di due minerali polverulenti A, B non ancora analizzati. — Queste determinazioni furono eseguite con una bilancia totalmente immersa, a bracci disuguali, uno dei quali sopportante il piattello (della forma più complicata descritta nella Nota precedente) era lungo 35 cm. e diviso in 100 parti, mentre l'altro cortissimo terminava con una grossa bolla zavorrata; usai come pesi vari cavalieri di filo di platino, il peso dei minerali nell'aria fu determinato colla bilancia di precisione.

Il peso del minerale A nell'aria era inizialmente 34,3 mgr., dopo eseguita la determinazione 34,2 cioè in media 34,25. Il suo peso nell'acqua risultò 25,85 e 25,83 cioè in media 25,84 mgr. Densità = 4,073.

In un'altra determinazione il peso nell'aria iniziale e finale fu di 34,2 e 34,1 mgr. in media 34,15 mgr., e quello nell'acqua risultò di 25,72 e 25,64 mgr. in media 25,68. Densità = 4,070.

Quindi seguii il processo descritto nella presente Nota cioè alternativamente versai e tolsi la polvere dal piatto della bilancia senza toglierla dall'acqua, e dopo lavata la polvere con acqua distillata e lasciatala asciugare, determinai il suo peso nell'aria. Questo inizialmente era di 34,1 mgr., ma durante le operazioni persi alcuni cristallini ed il peso finale di cui solo dovevo tener conto fu di 32,4 mgr. Per il peso nell'acqua ottenni i seguenti valori: 24,4 mgr. più 5, 5, 7, 4, 7, 3, 6, 6 centesimi di milligrammo ossia in media 24,453 mgr. Densità = 4,076. Sebbene questo valore abbia maggiori guarentigie di esattezza, la differenza dalla media dei 3 valori (4,073) non apparirà grande se si considera che la differenza fra i pesi nell'aria e nell'acqua, ossia il denominatore della frazione che dà la densità, era di circa 8 mgr. e che l'errore suddetto di 3 su 4000 corrisponde a un errore di 0,006 mgr., mentre l'errore della pesata nell'aria era certamente assai più grande.

Col minerale B pesante nell'aria 124,4 mgr. e nell'acqua 68,04 mgr., l'accordo delle varie determinazioni fu completo entro i limiti della sensibilità della bilancia.

Chimica. — *Sopra i nitropirroli.* Nota di Angelo Angeli e Francesco Angelico presentata dal Socio Ciamician.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.