ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCC.

1903

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1903

Matematica. — *I problemi di riduzione di Pfaff e di Jacobi nel caso del second' ordine.* Nota del Corrispondente E. PASCAL.

Una delle quistioni importanti che, quando intrapresi i miei studî sulle equazioni ai differenziali di 2° ordine, io mi proponevo di trattare, era quella della estensione del problema di Pfaff [1], che, come è noto, ha, nella teoria delle ordinarie equazioni pfaffiane, un interesse fondamentale. Colla presente Nota io mi propongo appunto di risolvere questo problema per il caso del second'ordine, e di mostrare come, mediante le formole e i risultati ottenuti nelle mie precedenti Note, la soluzione del problema venga ad acquistare una grande semplicità.

Enuncierò il problema, nel nostro caso, sotto la seguente forma: *Trovare le condizioni perchè esistano trasformazioni di variabili per le quali una equazione ai differenziali totali di 2° ordine si riduca ad una dipendente da un numero minore di variabili, e trovare tutte le trasformazioni per le quali si effettui questa riduzione.*

Alla soluzione di questo problema giungerò per due vie, una diretta, e l'altra fondata sulla teoria della trasformazioni infinitesime e sui risultati all' uopo da me ottenuti in un'altra recente Nota presentata a questa stessa Accademia [2].

Considererò infine, accanto alla riduzione che può chiamarsi di Pfaff-Grassmann, perchè da questi autori studiata nel caso del primo ordine, altre due riduzioni, che si possono ambedue far corrispondere, in due diversi sensi, a quella che alcuni chiamano di Jacobi [3].

1. Si abbia la forma

$$U \equiv \sum_{i=1}^{n} X_i \, d^2 x_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} \, dx_i \, dx_j$$

e si voglia trovare una trasformazione

$$y_i = \varphi_i(x_1, \dots . x_n) \quad , \quad (i = 1, 2, \dots . n)$$

in modo che la forma trasformata U' sia eguale al prodotto di una forma

(1) V. p. es. la prefazione alla mia Memoria in *Annali di Matematica* (3), t. 7.

(2) *Trasformazioni infinitesime e forme ai differenziali di 2° ordine*, Rend. Acc. Lincei (5), t. XI, 1902, 2° sem., p. 167.

A proposito di questo lavoro è bene avvertire dell'evidente errore di stampa incorso alla pag. 172; alla riga 16ª invece di *deve* si ha da leggere *non deve*, e alla riga seguente invece di *è zero* deve leggersi *non è zero*.

(3) Vedi E. v. Weber, *Vorl. über das Pfaff'sche Problem*, etc., Leipzig 1900, p. 161.

in sole $n-1$ variabili, p. es. $y_1 \ldots . y_{n-1}$, e di un fattore finito contenente tutte le variabili.

Indicando con Y_h, Y_{hk} i coefficienti della forma trasformata, dovrà aversi

$$(1) \qquad Y_n = 0\,, \quad Y_{hn} = 0\,, \qquad (h = 1, 2, \ldots . n)$$

e inoltre

$$(2) \qquad \frac{1}{Y_k}\frac{\partial Y_k}{\partial y_n} = \frac{1}{Y_{hl}}\frac{\partial Y_{hl}}{\partial y_n} = \varrho\,, \qquad (h, k, l = 1, 2, \ldots n-1)$$

da cui, richiamando le espressioni delle Y per mezzo delle X, si hanno le:

$$(3) \qquad \frac{\partial Y_k}{\partial y_n} = \varrho \sum_1^n X_i \frac{\partial x_i}{\partial y_k}\,, \qquad (k = 1, 2, \ldots n-1)$$

$$(4) \qquad \frac{\partial Y_{hl}}{\partial y_n} = \varrho \left[\sum_1^n X_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_h\, \partial y_l} + \sum_1^n \sum_1^n X_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial y_h}\frac{\partial x_j}{\partial y_l}\right] (h, l = 1, 2, \ldots n-1).$$

Calcoliamo ora i simboli $(kn)'$, $\}h\,l\,n\{'$ relativi alla forma trasformata e osserviamo che, per effetto delle (1), essi non sono altro che i primi membri delle (3) e (4). Ma intanto ricordiamo che questi simboli si esprimono, mediante quelli espressi nelle X, colle formole (¹):

$$(k\,n)' = \sum_i \left[\sum_j (i\,j)\frac{\partial x_j}{\partial y_n}\right]\frac{\partial x_i}{\partial y_k}$$

$$\}h\,l\,n\{' = \sum_i \left[\sum_j \}i\,j\{ \frac{\partial x_j}{\partial x_n}\right]\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_h\,\partial y_l} + \sum_r \sum_s \left[\sum_j \}r\,s\,j\{ \frac{\partial x_i}{\partial y_n}\right]\frac{\partial x_r}{\partial y_h}\frac{\partial x_s}{\partial y_l}\,,$$

dunque, paragonando i secondi membri di queste con quelli di (3) e (4) e scrivendo la prima delle (1) espressa nelle X, si hanno le equazioni lineari:

$$(5) \qquad \left\{\begin{array}{ll} \sum_j X_j \dfrac{\partial x_j}{\partial y_n} = 0 & \\ \sum_j (i\,j) \dfrac{\partial x_j}{\partial y_n} = \varrho\, X_i\,, & (i = 1, 2, \ldots . n) \\ \sum_j \}i\,j\{ \dfrac{\partial x_j}{\partial y_n} = \varrho\, X_i\,, & (i = 1, 2, \ldots n) \\ \sum_j \}r\,s\,j\{ \dfrac{\partial x_j}{\partial y_n} = \varrho\, X_{rs}\,, & (r, s = 1, 2, \ldots n) \end{array}\right.$$

e a queste devono soddisfare le derivate rispetto alla y_n delle antiche variabili. La matrice di queste equazioni lineari è quella medesima da me studiata nelle Note sopracitate e nelle altre in Rend. Ist. Lomb. (2), t. 35,

(¹) Vedi la mia Nota in Rend. Ist. Lomb. (2), t. 34, pag. 1180, ovvero l'altra in Rend. Acc. Lincei (5), t. XI, 1902, 2° sem., p. 105.

pag. 835 e 875, e di cui ho dimostrata la notevole proprietà che la sua caratteristica è invariante per qualunque trasformazione di variabili. Essa è rappresentata nelle mie precedenti Note colla notazione $M + (M) + \}M\{ + \}\}M\{\{$.

Possiamo far vedere che la sussistenza delle (5) è condizione anche *sufficiente* per la desiderata riduzione; giacchè in primo luogo è evidente che dalle (5) si hanno le (3), (4) e quindi le (2), e inoltre la prima delle (1); resta perciò solo a dimostrare che ne risulta anche la seconda delle (1). Ora sottraendo le seconde e terze delle (5) si hanno le

$$\sum_j ((j\,i)) \frac{\partial x_j}{\partial y_n} = 0$$

donde

$$\sum_i \sum_j ((j\,i)) \frac{\partial x_j}{\partial y_n} \frac{\partial x_i}{\partial y_h} = 0 .$$

Ma per le formole di trasformazione del simbolo $((n\,h))$ [1], il primo membro di questa equazione non è altro che $((nh))$ calcolato per la forma trasformata cioè $((n\,h))'$, dunque si ha:

$$((n\,h))' = \frac{\partial Y_n}{\partial y_h} - Y_{nh} = 0$$

donde, essendo già $Y_n = 0$, resta $Y_{hn} = 0$.

Sia di caratteristica *non* maggiore di n, la matrice delle equazioni lineari (5) cioè la matrice $M + (M) + \}M\{ + \}\}M\{\{$, e sia allora $\xi_1 \dots \xi_n, \varrho$ una soluzione del sistema (5), e formiamo l'equazione a derivate parziali

$$(6) \qquad \sum_i \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 ,$$

della quale potranno trovarsi gli $n - 1$ integrali indipendenti $y_1 \dots y_{n-1}$.

Scegliamo arbitrariamente una nuova funzione y_n delle x, colla sola condizione che sia indipendente dalle precedenti; la trasformazione

$$(7) \qquad y_i = \varphi_i(x_1 \dots x_n) , \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

risolve il nostro problema, e ogni trasformazione che risolve il problema deve essere di questa specie. Infatti i differenziali delle $x_1 \dots x_n$, ricavati dalle prime $n - 1$ delle (7) soddisfanno a

$$(8) \qquad \frac{dx_1}{\xi_1} = \frac{dx_2}{\xi_2} = \cdots \frac{dx_n}{\xi_n}$$

per effetto di (6), e quindi, introducendo la funzione y_n, si ha che i rap-

[1] Op. cit.

porti $\frac{dx_j}{dy_n}$ sono proporzionali alle ξ_j e perciò soddisfanno le (5). Viceversa se le (5) sono soddisfatte, lo saranno le (8) e quindi (6). Abbiamo perciò il risultato:

Condizione necessaria e sufficiente perchè esista una trasformazione per cui la forma data si riduca, a meno di un fattore, ad una contenente una variabile di meno, è che la matrice $\mathrm{M} + (\mathrm{M}) + \}\mathrm{M}\{ + \}\}\mathrm{M}\{\{$ *abbia caratteristica eguale o minore di* n. *In tal caso una trasformazione di tale specie si ottiene cercando una soluzione* $\xi_1 \dots \xi_n\ \varrho$ *delle equazioni lineari*

$$(9)\qquad \begin{cases} \sum \mathrm{X}_j \quad \xi_j = 0 & \\ \sum_j (i\,j) \quad \xi_j = \varrho\, \mathrm{X}_i & (i = 1, 2, \dots n) \\ \sum_j \}i\,j\{ \quad \xi_j = \varrho\, \mathrm{X}_i & (i = 1, 2, \dots n) \\ \sum_j \}r\,s\,j\{\ \xi_j = \varrho\, \mathrm{X}_{rs} & (r, s = 1, 2, \dots n) \end{cases}$$

e indi gli $n - 1$ *integrali indipendenti dell'equazione a derivate parziali:*

$$(10)\qquad \sum \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 .$$

Chiamando $y_1 \dots y_{n-1}$ *tali integrali e costruendo arbitrariamente una nuova funzione* y_n *indipendente dalle precedenti, la trasformazione*

$$(11)\qquad y_i = \varphi_i(x_1 \dots x_n), \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

è la richiesta; e ognuna di tal natura si ottiene in tal modo.

Sia $\nu < n$ la caratteristica della predetta matrice. Colla trasformazione (11) si abbia $\mathrm{U} = \varrho\, \mathrm{U}_1$, dove U_1 non dipenda più dalla variabile y_n.

La matrice relativa alla forma U_1 ha alcune linee di meno (quelle che dipendono dall'indice n) e *una* colonna di meno (l'ultima); per un teorema da noi già dimostrato (¹), quella matrice, che ha ora n colonne, ha la stessa caratteristica che quella relativa ad U, cioè $\nu < n$. Ne deduciamo che essendo di nuovo soddisfatte le condizioni espresse dal teorema precedente, sarà possibile una nuova riduzione e si ha $\mathrm{U}_1 = \varrho_1\, \mathrm{U}_2$ dove U_2 non conterrà che solo $n - 2$ variabili, e così di seguito, finchè ci riduciamo ad una $\mathrm{U}_{n-\nu+1}$ di cui la matrice corrispondente contiene solo ν colonne e che perciò, dovendo avere sempre caratteristica ν, è diversa da zero. Allora non sarà più, per questa via, possibile una ulteriore riduzione, e si sarà così trasformata la U in un'altra che, a meno di un fattore, dipenderà solo da $\nu - 1$ variabili.

(¹) *Estensione di alcuni teoremi di Frobenius,* Rend. Ist. Lomb. (2), t. 35, 1902, pag. 875, § 1.

Cioè: *Se è* ν *la caratteristica della matrice* $\mathrm{M} + (\mathrm{M}) + \}\mathrm{M}\{ + \}\}\mathrm{M}\{\{$, *esisteranno sempre trasformazioni per le quali la* EQUAZIONE $\mathrm{U} = 0$ *si trasformi in una con* $\nu - 1$ *variabili.*

2. Vogliamo ora mostrare con quanta eleganza e semplicità si può ritrovare il medesimo teorema del § precedente servendosi della teoria delle trasformazioni infinitesime e dei risultati da me già ottenuti nella Nota presentata a questa stessa Accademia e citata in principio.

Posto

$$\mathrm{U} = \varrho\, \mathrm{U}_1 \equiv \mathrm{U}'$$

e ammesso che U_1 non contenga la variabile y_n, si osserva che la U' *ammette* (nel senso della precedente Nota) la trasformazione infinitesima

$$\boldsymbol{Y} = \sigma\,(y_1 \dots y_n)\,\frac{\partial}{\partial y_n}\,.$$

Infatti il risultato dell'applicazione di $\boldsymbol{Y}$ ad U' è

$$\boldsymbol{Y}\,\mathrm{U}' = \frac{\sigma}{\varrho}\,\frac{\partial \varrho}{\partial y_n}\,\mathrm{U}'.$$

Intanto l'invariante simultaneo $\boldsymbol{\Delta}$ e il covariante simultaneo C di U' e $\boldsymbol{Y}$ (v. nota cit.), sono zero, come si riconosce a colpo d'occhio, dunque, potendo affermare che le stesse proprietà sussisteranno fra la U e la trasformata, nelle x, $\boldsymbol{\Xi}$ della $\boldsymbol{Y}$, abbiamo che questa $\boldsymbol{\Xi}$ deve essere una di quelle studiate nell'ultimo teorema della Nota citata e per la cui esistenza, come sappiamo, è necessario e basta che la matrice $\mathrm{M} + (\mathrm{M}) + \}\mathrm{M}\{ + \}\}\mathrm{M}\{\{$ abbia caratteristica minore o al più eguale ad n.

Se dunque è possibile la riduzione di Pfaff, se ne deduce la esistenza di una trasformazione infinitesima $\boldsymbol{\Xi}$ di cui sono zero l'invariante $\boldsymbol{\Delta}$ e il covariante C e che lascia invariata U.

Viceversa dall'esistenza di una tale $\boldsymbol{\Xi}$ si ricava la riduzione di Pfaff. Giacchè sieno $y_1 \dots y_{n-1}$ gli $n - 1$ integrali indipendenti dell'equazione

$$\boldsymbol{\Xi} f = \sum_i \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0\,, \tag{12}$$

formiamo una nuova funzione y_n indipendente dalle precedenti e consideriamo la trasformazione

$$y_i = \varphi_i\,(x_1 \dots x_n)\,, \qquad (i = 1\,, 2\,, \dots n). \tag{13}$$

Se la trasformata della U ha per coefficienti le Y, poichè la trasformata di $\boldsymbol{\Xi}$ sarà del tipo

$$\sum_k \eta_k \frac{\partial}{\partial y_k} \equiv \sigma \frac{\partial}{\partial y_n}\,,$$

dovendo essere zero l' invariante $\varDelta = \sum_k \eta_k \mathrm{Y}_k$, ne risulta

$$\mathrm{Y}_n = 0\,;$$

e dovendo inoltre essere zero tutti i coefficienti di

$$\mathrm{C} = \sum_k \mathrm{C}_k\, dy_k = \sum_k \left[\sum_h ((hk))\, \eta_h \right] dy_k\,,$$

ne risulta

$$((n\,k)) = 0$$

cioè

$$\frac{\partial \mathrm{Y}_n}{\partial y_k} - \mathrm{Y}_{nk} = 0\,,$$

donde, essendo già $\mathrm{Y}_n = 0$, si ha

$$\mathrm{Y}_{nk} = 0\,.$$

Dunque la U trasformata, cioè la U′, non contiene termini *differenziali* in y_n. Si può far vedere che il rapporto degli altri coefficienti è indipendente da y_n; giacchè dovendo la Ξ essere una trasformazione che lascia invariata la U, sarà

$$\sigma \frac{\partial}{\partial y_n} \mathrm{U}' = \varrho\, \mathrm{U}'$$

cioè

$$\sigma \sum_1^{n-1} \frac{\partial \mathrm{Y}_i}{\partial y_n} d^2 y_i + \sigma \sum_1^{n-1} \sum_1^{n-1} \frac{\partial \mathrm{Y}_{ij}}{\partial y_n} dy_i\, dy_j = \varrho\, \mathrm{U}'$$

donde

$$\sigma \frac{\partial \mathrm{Y}_i}{\partial y_n} = \varrho\, \mathrm{Y}_i\,, \quad \sigma \frac{\partial \mathrm{Y}_{ij}}{\partial y_n} = \varrho\, \mathrm{Y}_{ij}$$

cioè si hanno relazioni come le (2) del § 1, le quali mostrano che la U′ è eguale al prodotto di un fattore finito, dipendente da tutte le variabili, per una forma nelle sole $y_1 \ldots y_{n-1}$. Abbiamo dunque:

Perchè sia possibile una riduzione di Pfaff per la forma U *del second'ordine, è necessario e sufficiente che esista una trasformazione infinitesima che lasci invariata la* U *e di cui sieno zero l'invariante* $\varDelta$ *e il covariante* C.

Ricordando il risultato, relativo a siffatte trasformazioni infinitesime, da noi ottenuto alla fine della Nota: *Trasformazioni infinitesime e forme ai differenziali di 2° ordine* (Rend. Acc. Lincei (5), t. XI, 1902, 2° sem., pag. 167) il precedente risultato coincide con quello ottenuto nel § 1.

È bene osservare che con questo teorema si viene a dare un significato notevole al primo membro dell'equazione (10), donde nel § 1 si ricavava la trasformazione (11) colla quale si ottiene la richiesta riduzione. Quel primo membro non è altro che la Ξ di questo paragrafo, cioè:

Per costruire la trasformazione che effettua la riduzione di Pfaff si devono cercare gli $n-1$ *integrali indipendenti* $y_1 \ldots y_{n-1}$ *della equazione* $\Xi f = 0$, *il cui primo membro è una trasformazione infinitesima di cui sono zero* A *e* C, *e che lascia invariata* U, *e indi procedere come nel teorema del § precedente.*

3. Ricerchiamo ora l'estensione della cosiddetta *riduzione di Jacobi; vogliamo cioè trovare le condizioni perchè la forma* U *si possa trasformare in*

$$\mathrm{U} = \mathrm{U}_1 + d^2\varphi \equiv \mathrm{U}'$$

dove U_1 *non contenga la variabile* y_n, *e* φ *contenga invece tutte le variabili; insieme vogliamo trovare la più generale trasformazione che effettui questa riduzione.*

È facile riconoscere che aggiungendo ad una forma un differenziale secondo esatto, i simboli $(i\,j)$, $\}i\,j\{$, $\}i\,j\,r\{$ restano inalterati; dunque quelli relativi ad U_1 saranno eguali a quelli relativi a U'; ma i simboli $(i\,n)$, $\}i\,n\{$, $\}i\,j\,n\{$ relativi ad U_1 sono zero, perchè U_1 non contiene y_n, dunque lo saranno anche quelli relativi ad U'; indicando perciò questi ultimi cogli apici, abbiamo

$$(i\,n)' = 0 \;,\; \}i\,n\{' = 0 \,,\;,\; \}i\,j\,n\{' = 0$$

per tutti i valori di $i\,,j = 1\,,2\,,\ldots n$.

Ricordando intanto le formole di trasformazione relative a questi simboli (v. la citazione fatta al principio del § 1) si ottengono le equazioni:

$$(14)\quad \begin{cases} (i\,n)' = \sum\limits_r \sum\limits_s (r\,s) \dfrac{\partial x_r}{\partial y_i} \dfrac{\partial x_s}{\partial y_n} = 0 \\ \}i\,n\{' = \sum\limits_r \sum\limits_s \}r\,s\{ \dfrac{\partial x_r}{\partial y_i} \dfrac{\partial x_s}{\partial y_n} = 0 \\ \}i\,j\,n\{' = \sum\limits_r \sum\limits_s \}r\,s\{ \dfrac{\partial^2 x_r}{\partial y_i\,\partial y_j} \dfrac{\partial x_s}{\partial y_n} + \sum\limits_r \sum\limits_t \sum\limits_s \}r\,t\,s\{ \dfrac{\partial x_r}{\partial x_i} \dfrac{\partial x_t}{\partial y_j} \dfrac{\partial x_s}{\partial y_n} = 0. \end{cases}$$

Dalla prima di queste, facendo variare i da 1 ad n, ed osservando che deve essere naturalmente diverso da zero il determinante funzionale delle x rispetto alle y, si deduce

$$(15)\qquad \sum_s (r\,s) \frac{\partial x_s}{\partial y_n} = 0\,,$$

e con simile procedimento dalle seconde delle (14) si deduce

$$(16)\qquad \sum_s \}r\,s\{ \frac{\partial x_s}{\partial y_n} = 0$$

per cui dalle terze delle (14) si deduce infine in simil modo:

$$(17)\qquad \sum_s \}r\,t\,s\{ \frac{\partial x_s}{\partial y_n} = 0 .$$

Le (15) (16) (17), di cui la matrice dei coefficienti è (giusta la notazione adoperata nelle Note succitate) la $(\mathrm{M}') + \}\mathrm{M}'\{ + \}\}\mathrm{M}'\{\{$, sono condizioni *necessarie* perchè sia possibile la richiesta riduzione; esse sono anche *sufficienti*. Giacchè da esse seguono le (14), e perciò anche le $((i\,n))' = 0$; quindi, chiamando al solito Y i coefficienti della forma trasformata, si ha

$$\frac{\partial \mathrm{Y}_i}{\partial y_n} = \frac{\partial \mathrm{Y}_n}{\partial y_i} = \mathrm{Y}_{ni}$$

e ponendo

$$\int \mathrm{Y}_n\, dy = \varphi \quad , \quad \mathrm{Y}_n = \frac{\partial \varphi}{\partial y_n} ,$$

si ha, integrando:

$$\mathrm{Y}_i = \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} + \mathrm{Z}_i(y_1, \ldots y_{n-1}) \quad , \quad \mathrm{Y}_{ni} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_i\, \partial y_n} ,$$

e indi da

$$\}i\,j\,n\{' = 0 = \frac{\partial \mathrm{Y}_{ij}}{\partial y_n} - \frac{\partial \mathrm{Y}_{in}}{\partial y_j} - \frac{\partial \mathrm{Y}_{jn}}{\partial y_i} + \frac{\partial^2 \mathrm{Y}_n}{\partial y_i\, \partial y_j}$$

si ha infine:

$$\mathrm{Y}_{ij} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_i\, \partial y_j} + \mathrm{Z}_{ij}(y_1, \ldots y_{n-1})$$

e perciò la U trasformata ha precisamente la forma richiesta.

Colle stesse considerazioni che nel § 1 si ricava pertanto:

Condizione necessaria e sufficiente perchè sia possibile la riduzione alla forma $\mathrm{U} = \mathrm{U}_1 + d^2\varphi$ *dove* U_1 *non contenga la variabile* y_n, *è che la matrice* $(\mathrm{M}') + \}\mathrm{M}'\{ + \}\}\mathrm{M}'\{\{$ *sia zero, cioè abbia caratteristica minore di* n. *Soddisfatta che sia tale condizione, per ottenere una trasformazione che effettui la indicata riduzione, si scelga una soluzione* $\xi_1 \ldots \xi_n$ *delle equazioni lineari*

$$(18)\qquad \begin{cases} \sum_s (r\,s)\ \xi_s = 0 \\ \sum_s \}r\,s\{\ \xi_s = 0 \\ \sum_s \}r\,t\,s\{\ \xi_s = 0 \end{cases}$$

e si formi l'equazione

$$\Xi' f \equiv \sum_s \xi_s \frac{\partial f}{\partial x_s} = 0 \tag{19}$$

di cui si cerchino gli $n-1$ *integrali indipendenti* $y_1 \ldots y_{n-1}$; *con una nuova e arbitraria funzione* y_n, *indipendente dalle precedenti, si formerà allora, nel modo solito, la richiesta trasformazione. Ogni trasformazione di tal natura dovrà potersi ottenere nel modo indicato.*

Si potrebbe anche qui ritrovare questo stesso risultato, coi principî della teoria delle trasformazioni infinitesime. Ci limiteremo però solo alle seguenti considerazioni: *la trasformazione infinitesima* Ξ' *ha il covariante* C *eguale a zero*, perchè sottraendo le due prime delle (18) si ha

$$\sum_s ((s\,r))\, \xi_s = 0 \tag{20}$$

e il primo membro di questa non è che il coefficiente generico C_s della C.

Inoltre per la formola (8) della mia Nota citata *Trasformazioni infinitesime* etc. (Rend. Acc. Lincei, 1902, 2° sem., pag. 167) si riconosce che

$$\Xi'\, \mathrm{U} = d^2 \mathit{A}, \tag{21}$$

cioè Ξ' *è una trasformazione infinitesima che applicata sulla* U *la riduce al differenziale secondo esatto dell' invariante* A.

Ora è evidente che la trasformazione finita ottenuta nel solito modo, indicato alla fine del teorema precedente, da una Ξ' avente queste due proprietà, effettua sempre la riduzione richiesta; in effetti da queste due proprietà possono sempre dedursi la sussistenza delle (18), ovvero delle (15), (16), (17) e quindi procedere come si è fatto di sopra. Onde:

Per l'esistenza di una trasformazione che effettui la riduzione di Jacobi estesa al second'ordine è necessario e basta che esista una trasformazione infinitesima Ξ' *di cui sia zero il covariante* C, *mentre si abbia* $\Xi'\, \mathrm{U} = d^2 \mathit{A}$.

4. Tratteremo infine brevemente del caso in cui si voglia trasformare la U nella somma di una forma con sole $n-1$ variabili e del differenziale primo di una forma di primo ordine:

$$\mathrm{U} = \mathrm{U}_1 + d\left(\sum_1^n \mathrm{Z}_i\, dy_i\right) \equiv \mathrm{U}'. \tag{22}$$

Osservando che i simboli $\}i\,j\{$ e $\}i\,j\,h\{$ relativi ad U_1 sono gli stessi che quelli relativi ad U′ e che quelli, fra questi, nei quali l' ultimo indice è n, relativi ad U_1, sono zero perchè U_1 non dipende da y_n, si ha:

$$\}i\,n\{' = 0 \quad , \quad \}i\,j\,n\{' = 0 \tag{23}$$

donde, come al § 3, si deducono le equazioni (16) e (17) di cui la matrice dei coefficienti è $\}M'\{ + \}\}M'\{\{$.

Le (16) e (17) sono viceversa *sufficienti* perchè la U si riduca alla forma (22); giacchè da esse si deducono le (23), e quindi, indicati al solito con Y i coefficienti di U′ e posto

$$\begin{aligned} Y_i &= T_i + Z_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n-1) \\ Y_n &= Z_n \end{aligned}$$

dove le T sono delle *arbitrarie* funzioni delle sole $y_1 \ldots y_{n-1}$, da $\}i\, n\{' = 0$ si deduce

$$Y_{ni} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Z_i}{\partial y_n} + \frac{\partial Z_n}{\partial y_i}\right)$$

e da $\}i\, j\, n\{' = 0$ si ricava

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_{ij}}{\partial y_n} &= \frac{\partial Y_{in}}{\partial y_j} + \frac{\partial Y_{jn}}{\partial y_i} - \frac{\partial^2 Y_n}{\partial y_i\, \partial y_i} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y_n}\left(\frac{\partial Z_i}{\partial y_j} + \frac{\partial Z_j}{\partial y_i}\right), \end{aligned}$$

donde

$$Y_{ij} = T_{ij} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Z_i}{\partial y_j} + \frac{\partial Z_j}{\partial y_i}\right),$$

dove le T_{ij} sono indipendenti da y_n; perciò la U ha la forma (22).

Formando la trasformazione infinitesima

$$\Xi'' = \sum \xi_s \frac{\partial}{\partial x_s}$$

i cui coefficienti ξ soddisfanno alle sole equazioni

$$\text{(24)} \qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_s \}r\, s\{\, \xi_s = 0 \\ &\sum_s \}r\, t\, s\{\, \xi_s = 0, \end{aligned}\right.$$

si ha evidentemente una trasformazione che applicata ad U la riduce a

$$\text{(25)} \qquad \Xi''\, U = d^2 A - 2\, dC$$

(v. formola (8) della mia Nota citata nel § 3), e quindi, ragionando come nel § precedente, abbiamo infine il risultato:

Perchè esista una trasformazione che riduca la U *alla forma* (22), *in cui* U_1 *non contenga la* y_n, *è necessario e basta che la matrice* $\}M'\{ + \}\}M'\{\{$

abbia caratteristica minore di n; *se ciò si verifica, tutte le trasformazioni della specie richiesta si ottengono cercando le soluzioni di* (24), *indi gli* $n-1$ *integrali indipendenti* $y_1 \dots y_{n-1}$ *di* $\Xi'' f = 0$ *e assumendo questi come nuove variabili insieme ad una nuova* y_n, *funzione arbitraria delle* x, *ma indipendente dalle altre* y.

La trasformazione infinitesima Ξ'' *applicata ad* U *la riduce a* $d^2 \mathcal{A} - 2\,d\,\mathrm{C}$, *e ogni trasformazione infinitesima di tal natura risolve il problema.*

Fisica matematica. — *Campo elettromagnetico generato da una carica elettrica in moto circolare uniforme.* Nota di G. Picciati, presentata dal Socio Volterra.

Si consideri un dielettrico indefinito impolarizzabile ed in quiete ed il campo elettromagnetico generato da una carica elettrica m in moto circolare uniforme.

Indicando le componenti della forza elettrica con X, Y, Z, e con L, M, N quelle della forza magnetica esse debbono esser soluzioni del sistema

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} A\dfrac{dX}{dt} = \dfrac{dM}{dz} - \dfrac{dN}{dy}, \\[2mm] A\dfrac{dY}{dt} = \dfrac{dN}{dx} - \dfrac{dL}{dz}, \\[2mm] A\dfrac{dZ}{dt} = \dfrac{dL}{dy} - \dfrac{dM}{dx}; \end{cases} \qquad \text{(II)}\quad \begin{cases} A\dfrac{dL}{dt} = \dfrac{dZ}{dy} - \dfrac{dY}{dx} \\[2mm] A\dfrac{dM}{dt} = \dfrac{dX}{dz} - \dfrac{dZ}{dx} \\[2mm] A\dfrac{dN}{dt} = \dfrac{dY}{dx} - \dfrac{dX}{dy}, \end{cases}$$

e delle due

$$\text{(III)}\quad \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 0, \qquad \text{(IV)}\quad \frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dz} = 0,$$

essendo A l' inversa della velocità della luce nell'etere. L e X, Y, ..., N soluzioni del sistema (I), ..., (IV) debbono presentare una singolarità (variabile con t) nel punto occupato dalla carica, ed esser nulle all' infinito come $\frac{1}{r^2}$ almeno ($r^2 = x^2 + y^2 + z^2$). La determinazione diretta di questi integrali non si presenta nè facile, nè agevole; invece si perviene immediatamente alle loro espressioni facendo uso dei potenziali ritardati, ed applicando un metodo generale dato dal prof. Levi-Civita (1), il quale permette di determinare in ogni caso il campo elettromagnetico dovuto al moto di

(1) *Sur le champ électromagnétique* etc. Annales de la Faculté des Sciences de Toulose, sér. III, t. IV, 1902.