ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCC.

1903

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1903

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 maggio 1903.

P. Blaserna, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Introduzione alla teoria delle forme differenziali di ordine qualunque.* Nota I del Corrispondente Ernesto Pascal.

In una Nota intitolata: *Su di un invariante simultaneo di una espressione ai differenziali totali di ordine qualunque e di un'altra alle derivate parziali*, da me presentata nella seduta del 3 luglio 1902 al R. Istituto Lombardo ([1]), io ho dimostrato per una forma differenziale di ordine qualunque e di un'altra alle derivate parziali, l'esistenza di un invariante simultaneo, estensione di quello noto relativo alle ordinarie forme pfaffiane, ed in tale occasione ho cominciato a stabilire alcune formole fondamentali per la teorica delle forme differenziali di ordine qualunque.

Riprendendo ora queste ricerche, io mi propongo con questa Nota e con altre che a questa seguiranno, di stabilire i fondamenti di questa teoria, allo scopo di giungere, fra le altre cose, anche alla risoluzione del problema di Pfaff per l'ordine qualunque, estendendo così nel modo più generale, alcune di quelle ricerche, sui differenziali di 2° ordine, da me già condotte a termine in questi ultimi tempi e pubblicate negli Annali di Matematica, nei Rendiconti dell'Istituto Lombardo e in quelli dell'Accademia dei Lincei.

([1]) Rend. Ist. Lomb. (2), t. 35, 1902, pp. 691-700.

In ciò che segue ci riferiremo pertanto continuamente alla Nota citata in principio.

1. *Preliminari.* — Le forme differenziali che considereremo sono dello stesso tipo di quelle che risultano formando il differenziale r^{mo} di una funzione di n variabili dipendenti, e cioè sono del tipo:

$$U \equiv X^{(r)} \equiv \sum_{m=1}^{r} \sum_{j_1 \dots j_m} X_{j_1 \dots j_m} \delta^{(r)}_{j_1 \dots j_m} \tag{1}$$

dove poniamo, per brevità:

$$\delta^{(r)}_{j_1 \dots j_m} = \frac{1}{m!} S_j \sum_{i_1 \dots i_m} [i_1 \dots i_m] \, d^{i_1} x_{j_1} \dots d^{i_m} x_{j_m} \tag{2}$$

rappresentando con S_j l'operazione del sommare tutti i termini che si ottengono permutando le $j_1 \dots j_m$ in tutti i modi possibili fra loro. La δ risulta così *simmetrica nelle* j.

Per amor di chiarezza ricorderemo che

1. Le $X_{j_1 \dots j_m}$ sono delle funzioni assegnate delle variabili $x_1, x_2, \dots x_n$, i cui valori sono indipendenti dall'ordine degli indici. Se esse diventano le derivate m^{me} di una funzione, la U diventa il differenziale totale r^{mo} della medesima.

2. Gli indici $j_1 \dots j_m$ rappresentano una disposizione qualunque *con ripetizione* dei numeri $1, 2, \dots n$ ad m ad m e il sommatorio in (1) deve estendersi a tutte le possibili disposizioni di tale specie.

3. Gli indici $i_1 \dots i_m$ sono m numeri interi positivi $\geqq 1$ tali che

$$i_1 + i_2 + \dots + i_m = r \tag{3}$$

e il sommatorio in (2) deve estendersi per tutti i possibili valori degli i soddisfacenti alla (3) ma *senza ripetizioni*.

4. Infine il simbolo $[i_1 \dots i_m]$ rappresenta un certo coefficiente numerico dipendente dagli indici $i_1 \dots i_m$, il cui valore esplicito lo abbiamo potuto calcolare nella predetta Nota, ed è il seguente: se poniamo che fra i numeri $i_1 \dots i_m$ ve ne siano ϱ_1 eguali fra loro, altri ϱ_2 anche eguali fra loro, ma diversi dai precedenti, e così di seguito, si ha:

$$[i_1 \dots i_m] = \frac{\binom{r}{i_1}\binom{r-i_1}{i_2}\binom{r-i_1-i_2}{i_3}\dots\binom{r-i_1-\dots-i_{m-1}}{i_m}}{\varrho_1!\,\varrho_2!\,\dots\dots} . \tag{4}$$

È bene avvertire che nella predetta Nota questo coefficiente numerico è stato rappresentato colla *parentesi rotonda* e non colla *quadrata*, come invece facciamo qui per evitare una confusione che potrebbe prodursi in seguito. Così anche nel medesimo luogo abbiamo scritto un po' diversamente l'espressione di δ, cioè senza l' S_j e senza dividerla per $m!$ Ma è facile vedere che introducendo questi nuovi δ che hanno il vantaggio di essere simmetrici nelle j, la (1) non si altera.

Nella medesima Nota abbiamo poi dimostrato che, con una trasformazione di variabili, la (1) si trasforma in un'altra del medesimo tipo e propriamente in:

$$(5) \qquad \sum_{\mu=1}^{r} \sum_{h_1 \dots h_\mu} Y_{h_1 \dots h_\mu} \delta'^{(r)}_{h_1 \dots h_\mu}$$

dove

$$(6) \qquad \delta'^{(r)}_{h_1 \dots h_\mu} = \frac{1}{\mu!} S_h \sum_{k_1 \dots k_\mu} [k_1 \dots k_\mu]\, d^{k_1} y_{h_1} \dots d^{k_\mu} y_{h_\mu}$$

e i coefficienti trasformati hanno i valori

$$(7) \qquad Y_{h_1 \dots h_\mu} = \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{j_1 \dots j_m} X_{j_1 \dots j_m} \begin{pmatrix} j_1 \dots j_m \\ h_1 \dots h_\mu \end{pmatrix}_{xy}, \quad \begin{pmatrix} m \leq \mu \\ \mu \leq r \end{pmatrix}$$

essendo

$$(8) \qquad \begin{pmatrix} j_1 \dots j_m \\ h_1 \dots h_\mu \end{pmatrix}_{xy}, \quad (m \leq \mu)$$

una certa somma di prodotti di derivate delle x di indici $j_1 \dots j_m$ rispetto alle y di indici $h_1 \dots h_\mu$, *simmetrica* sia nei primi indici che nei secondi, e della cui costruzione abbiamo trattato nel medesimo luogo.

Ricorderemo infine che le (8) sono definite dalla formola:

$$(9) \qquad \frac{\partial^\mu f}{\partial y_{h_1} \dots \partial y_{h_\mu}} = \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{j_1 \dots j_m} \frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_m}} \begin{pmatrix} j_1 \dots j_m \\ h_1 \dots h_\mu \end{pmatrix}_{xy}$$

dove f rappresenta una funzione qualunque.

2. *Identità cui soddisfa il simbolo* $\begin{pmatrix} j_1 \dots j_m \\ h_1 \dots h_\mu \end{pmatrix}_{xy}$. — Tratteremo in questo § di una formola identica cui soddisfa il simbolo (8), e della quale dovremo fare in seguito spesso uso.

Deriviamo primo e secondo membro di (9) rispetto ad $y_{h_{\mu+1}}$ e si ha:

$$\frac{\partial^{\mu+1} f}{\partial y_{h_1} \dots \partial y_{h_{\mu+1}}} = \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{j_1 \dots j_{m+1}} \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_{m+1}}} \frac{\partial x_{j_{m+1}}}{\partial y_{h_{\mu+1}}} \begin{pmatrix} j_1 \dots j_m \\ h_1 \dots h_\mu \end{pmatrix}_{xy} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{j_1 \dots j_m} \frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_m}} \frac{\partial}{\partial y_{h_{\mu+1}}} \begin{pmatrix} j_1 \dots j_m \\ h_1 \dots h_\mu \end{pmatrix}_{xy},$$

e mutando nella prima parte del secondo membro $m+1$ in m, e quindi estendendo il primo dei sommatorii da $m=2$ sino ad $m=\mu+1$, e staccando dagli altri il primo e ultimo termine, cioè quelli nei quali m è eguale ad 1, o è eguale a $\mu+1$, possiamo scrivere:

$$
(10)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^{\mu+1} f}{\partial y_{h_1}\dots\partial y_{h_{\mu+1}}} = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial y_{h_{\mu+1}}}\begin{pmatrix} j \\ h_1\dots h_\mu\end{pmatrix}_{xy} + \\
&+\sum_{m=2}^{\mu}\sum_{j_1\dots j_m}\frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_m}}\left\{\frac{\partial x_{j_m}}{\partial y_{h_{\mu+1}}}\begin{pmatrix} j_1\dots j_{m-1} \\ h_1\dots h_\mu\end{pmatrix}_{xy} + \frac{\partial}{\partial y_{h_{\mu+1}}}\begin{pmatrix} j_1\dots j_m \\ h_1\dots h_\mu\end{pmatrix}_{xy}\right\} + \\
&+\sum_{j_1\dots j_{\mu+1}}\frac{\partial^{\mu+1} f}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_{\mu+1}}}\frac{\partial x_{j_{\mu+1}}}{\partial y_{h_{\mu+1}}}\begin{pmatrix} j_1\dots j_\mu \\ h_1\dots h_\mu\end{pmatrix}_{xy}.
\end{aligned}\right.
$$

Paragoniamo i termini di questa formola con quelli di (9) in cui si sia mutato μ in $\mu+1$. I coefficienti delle medesime derivate della f (funzione arbitraria) in ambedue le formole devono coincidere. Osservando che $j_1\dots j_m$ rappresentano una disposizione (con ripetizioni) di m dei numeri $1, 2, \dots n$, che mutandone l'ordine cambia la disposizione ma, essendo (8) simmetrico negli indici superiori, non cambia il valore del corrispondente termine in (9), mentre d'altra parte il sommatorio $\sum\limits_{j_1\dots j_m}$ deve estendersi a *tutte* le disposizioni, si ha che il coefficiente di

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_m}}$$

in (9) in cui si sia mutato μ in $\mu+1$, è, se gli indici $j_1\dots j_m$ sono tutti diversi:

$$
(11)\qquad m!\begin{pmatrix} j_1\dots j_m \\ h_1\dots h_{\mu+1}\end{pmatrix}_{xy}
$$

e se dei medesimi indici ve ne sono ϱ_1 fra loro eguali, ϱ_2 fra loro anche eguali ma diversi dai precedenti, e così di seguito, il medesimo coefficiente è lo stesso (11) ma diviso per $\varrho_1!\,\varrho_2!\dots\dots$

Il coefficiente della medesima derivata in (10), se $2\leq m\leq\mu$, è intanto il risultato che si ottiene dalla parentesi della seconda riga di (10), quando si permutano le $j_1\dots j_m$ in tutti i modi, ovvero, al solito, tale somma divisa per $\varrho_1!\,\varrho_2!\dots$ Indicando perciò con S_{j_m} l'operazione di scambiare l'indice j_m con ciascuno degli $j_1\dots j_m$, e di sommare gli m risultati ottenuti, il predetto coefficiente è:

$$
(12)\qquad (m-1)!\,S_{j_m}\frac{\partial x_{j_m}}{\partial y_{h_{\mu+1}}}\begin{pmatrix} j_1\dots j_{m-1} \\ h_1\dots h_\mu\end{pmatrix}_{xy} + m!\,\frac{\partial}{\partial y_{h_{\mu+1}}}\begin{pmatrix} j_1\dots j_m \\ h_1\dots h_\mu\end{pmatrix}_{xy}
$$

ovvero questo medesimo diviso per $\varrho_1!\,\varrho_2!\dots$ se gli j non sono tutti diversi.

Se poi $m=1$ ovvero $=\mu+1$, il coefficiente della corrispondente derivata in (10) è rispettivamente:

$$(13) \qquad \frac{\partial}{\partial y_{h_{\mu+1}}} \begin{pmatrix} j \\ h_1 \dots h_\mu \end{pmatrix}_{xy}$$

e

$$(14) \qquad \mu\,!\; S_{j_{\mu+1}} \frac{\partial x_{j_{\mu+1}}}{\partial y_{h_{\mu+1}}} \begin{pmatrix} j_1 \dots j_\mu \\ h_1 \dots h_\mu \end{pmatrix}_{xy} .$$

Paragonando (11) con (12), e ricordando che $\frac{\partial x_{j_m}}{\partial y_{h_{\mu+1}}}$ può scriversi $\begin{pmatrix} j_m \\ h_{\mu+1} \end{pmatrix}_{xy}$, *si ha la formola*:

$$(15) \qquad \frac{1}{m} S_{j_m} \begin{pmatrix} j_m \\ h_{\mu+1} \end{pmatrix}_{xy} \begin{pmatrix} j_1 \dots j_{m-1} \\ h_1 \dots h_\mu \end{pmatrix}_{xy} + \frac{\partial}{\partial y_{h_{\mu+1}}} \begin{pmatrix} j_1 \dots j_m \\ h_1 \dots h_\mu \end{pmatrix}_{xy} = \begin{pmatrix} j_1 \dots j_m \\ h_1 \dots h_{\mu+1} \end{pmatrix}_{xy}$$

valevole per $m=2\,,3\,,\dots\mu$. Se poi $m=1$ allora, come risulta da (13), bisogna nel primo membro lasciare solo il secondo termine, e se $m=\mu+1$, bisogna invece lasciarvi solo il primo termine, come risulta da (14).

3. *Identità relative al simbolo* δ *definito dalla* (2). — Passeremo ora a stabilire altre due identità di frequente uso nelle cose che dovremo dire in seguito, e relative all'espressione δ che entra nella formazione del differenziale r^{mo} di una funzione.

La prima si riferisce al differenziale del δ e si ottiene nel seguente modo:

Da $d\,.\,d^r f = d^{r+1} f$, adoperando la (1) in cui per le X si intendano le derivate di f, si deduce:

$$\sum_{m=1}^{r} \sum_{j_1 \dots j_{m+1}} \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_{m+1}}} dx_{j_{m+1}}\, \delta^{(r)}_{j_1 \dots j_m} + \sum_{m=1}^{r} \sum_{j_1 \dots j_m} \frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_m}}\, d\; \delta^{(r)}_{j_1 \dots j_m} =$$

$$= \sum_{m=1}^{r+1} \sum_{j_1 \dots j_m} \frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_m}}\, \delta^{(r+1)}_{j_1 \dots j_m}$$

e nel primo sommatorio mutando m in $m-1$ e indi scambiando j_m con $j_1 \dots j_{m-1}$, sommando e dividendo per m, introducendo il simbolo di operazione S del paragrafo precedente e paragonando infine i coefficienti delle medesime derivate al primo e secondo membro, *si ha la formola*:

$$(16) \qquad d\,\delta^{(r)}_{j_1 \dots j_m} = \delta^{(r+1)}_{j_1 \dots j_m} - \frac{1}{m} S_{j_m} dx_{j_m} \delta^{(r)}_{j_1 \dots j_{m-1}}$$

che vale per $m=2\,,3\,,\dots r$, *ma non per* $m=1$, *perchè per tal caso si ha semplicemente*:

$$(17) \qquad d\,\delta^{(r)}_j = \delta^{(r+1)}_j$$

perchè $\delta^{(r)}_j = d^r x_j$.

Passiamo ora alla seconda formola.

Formando il differenziale r^{mo} del prodotto di due funzioni arbitrarie, e applicando alle derivate del prodotto una elementare formola di calcolo, possiamo scrivere:

$$(18)\quad d^r(f\varphi)=\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{m=0}^{\rho}\sum_{j_1\dots j_m}\sum_{i_1\dots i_{\rho-m}}\binom{\rho}{m}\frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_m}}\frac{\partial^{\rho-m}\varphi}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_{\rho-m}}}\delta^{(r)}_{j_1\dots j_m\, i_1\dots i_{\rho-m}}$$

dove osserviamo che dovendosi effettuare il sommatorio rispetto a tutti i valori delle i e j si può applicare, come abbiamo fatto, la formola di Leibnitz alla derivata

$$\frac{\partial^\rho(f\varphi)}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_m}\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_{\rho-m}}}$$

spezzando le variabili in due gruppi di m e di $\rho-m$ *in un sol modo* e non in *tutti* i modi possibili, come si dovrebbe fare in altro caso.

Intanto si può scrivere:

$$(19)\qquad d^r(f\varphi)=\sum_{p=0}^{r}\binom{r}{\rho}d^p f\, d^{r-\rho}\varphi=$$

$$=\sum_{p=0}^{r}\sum_{m=1}^{p}\sum_{\rho=m+1}^{m+r-p}\binom{r}{p}\frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_m}}\frac{\partial^{\rho-m}\varphi}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_{\rho-m}}}\delta^{(p)}_{j_1\dots j_m}\delta^{(r-p)}_{i_1\dots i_{\rho-m}}$$

Se poniamo da parte sia in (18) che in (19) quei termini in cui compariscono fattori f o φ *non* sottoposti a derivazioni, per gli altri termini dobbiamo in (18) estendere i sommatorii nel seguente modo:

$$\sum_{\rho=2}^{r}\sum_{m=1}^{\rho-1}\quad\text{che è eguale a}\quad\sum_{m=1}^{r-1}\sum_{\rho=m+1}^{r}$$

mentre in (19) dobbiamo scrivere:

$$\sum_{p=1}^{r-1}\sum_{m=1}^{p}\sum_{\rho=m+1}^{m+r-p}\quad\text{che è eguale a}\quad\sum_{m=1}^{r-1}\sum_{\rho=m+1}^{r}\sum_{p=m}^{r+m-\rho}$$

Facendo allora questi mutamenti in (18) e (19), osservando che i termini trascurati sono fra loro identici in ambo le formole, e paragonando i coefficienti dei medesimi prodotti di derivate di f e φ, nei secondi membri sia di (18) che di (19), *si ha la formola notevole*:

$$(20)\qquad \sum_{p=m}^{r+m-\rho}\binom{r}{p}\delta^{(p)}_{j_1\dots j_m}\delta^{(r-p)}_{j_1\dots j_{\rho-m}}=\binom{\rho}{m}\delta^{(r)}_{j_1\dots j_m\, i_1\dots i_{\rho-m}}$$

valevole per $\rho>m$, *e per qualunque sistema di indici* $j_1\dots j_m\ i_1\dots i_{\rho-m}$.

4. *Applicazione di una trasformazione infinitesima al simbolo δ.* — Sempre in vista di quanto dovremo esporre nelle Note seguenti, stabiliremo ora la formola che dà il risultato dell'applicazione di una trasformazione infinitesima

$$\Xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{21}$$

all'espressione δ. Stabiliremo *per definizione* che l'operazione rappresentata dal simbolo Ξ sia permutabile con quella rappresentata dal simbolo di differenziale d, e perciò

$$\Xi d^r f = d^r \Xi f = \sum_{i=1}^{n} d^r \left(\xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} d^k \xi_i \, d^{r-k} \frac{\partial f}{\partial x_i} .$$

Sostituendo in questa formola per $d^r f$ e per $d^{r-k} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ i loro valori, si ha:

$$\sum_{m=1}^{r} \sum_{j_1 \ldots j_m} \sum_{i} \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_m} \partial x_i} \xi_i \, \delta^{(r)}_{j_1 \ldots j_m} + \sum_{m=1}^{r} \sum_{j_1 \ldots j_m} \frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_m}} \Xi \, \delta^{(r)}_{j_1 \ldots j_m} = \tag{22}$$

$$= \sum_{k=0}^{r} \sum_{m=1}^{r-k} \sum_{j_1 \ldots j_m} \sum_{i} \binom{r}{k} \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_m} \partial x_i} d^k \xi_i \, \delta^{(r-k)}_{j_1 \ldots j_m} ,$$

intendendo che per $k = r$ al secondo membro debba intendersi il termine:

$$\sum_{i} \frac{\partial f}{\partial x_i} d^r \xi_i . \tag{23}$$

Osserviamo che al secondo membro il termine per $k = 0$ è esattamente la prima delle due parti del primo membro, mentre il termine per $k = r$, cioè (23) coincide con quello che la seconda parte del secondo membro, dà per $m = 1$; soppressi allora questi termini comuni al primo e secondo membro, mutando nel secondo m in $m - 1$, osservando che

$$\sum_{k=1}^{r-1} \sum_{m=2}^{r-k+1} = \sum_{m=2}^{r} \sum_{k=1}^{r-m+1}$$

e ponendo $i = j_m$, si ha:

$$\sum_{m=2}^{r} \sum_{j_1 \ldots j_m} \frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_m}} \Xi \, \delta^{(r)}_{j_1 \ldots j_m} =$$

$$= \sum_{m=2}^{r} \sum_{j_1 \ldots j_m} \frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_m}} \sum_{k=1}^{r-m+1} \binom{r}{k} d^k \xi_{j_m} \, \delta^{(r-k)}_{j_1 \ldots j_{m-1}} .$$

Se ora paragoniamo i coefficienti delle medesime derivate di f al primo e secondo membro, e per ciò fare permutiamo le j fra loro in tutti i modi possibili, osserviamo che le δ sono simmetriche negli indici inferiori, e introduciamo il simbolo S_{j_m} con analogo significato che nel § 2, *abbiamo infine la formola*:

$$\Xi\, \delta^{(r)}_{j_1 \dots j_m} = \frac{1}{m} S_{j_m} \sum_{k=1}^{r-m+1} \binom{r}{k} d^r \xi_{j_m} \delta^{(r-k)}_{j_1 \dots j_{m-1}} \tag{24}$$

valevole per $m = 2, 3, \dots r$, *mentre per* $m = 1$ *si ha semplicemente*:

$$\Xi\, \delta^{(r)}_{j} = d^r \xi_j \,. \tag{25}$$

In una prossima Nota faremo le applicazioni di queste formole.

Meccanica. — *Traiettorie dinamiche di un punto libero, sollecitato da forze conservative*. Nota di A. F. DALL'ACQUA, presentata dal Corrispondente G. RICCI.

Il problema che mi sono proposto è il seguente:

« Sotto quali condizioni una doppia infinità di linee (*congruenza*) in « uno spazio con tre dimensioni, possa riguardarsi come costituita dalle « traiettorie dinamiche di un punto libero, sollecitato da una forza conser- « vativa ».

Nel caso generale, con molta semplicità e senza sforzo veruno viene a completarsi a mano a mano il sistema delle equazioni del moto. Tuttavia non sembra agevole dare alle condizioni ottenute una forma elegante e di evidente significato geometrico.

In taluni casi però la questione si presenta in modo più adatto alle ricerche. Oltre al caso generale ne ho trattati tre particolari in ispecial modo interessanti.

1°. Quello in cui le traiettorie del punto siano geodetiche. « Esse, allora, coincidono con le linee di forza ».

2°. Il caso che la velocità sia costante rispetto al moto. Allora « il punto percorre delle geodetiche delle superfici equipotenziali ». Queste geodetiche sono inoltre caratterizzate dall'equazione

$$\frac{\partial \varrho}{\partial s} + \varrho\, \gamma_{131} = 0$$

dove ϱ è il loro raggio di curvatura, s il loro arco, γ_{131} la curvatura della