ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCC.

1903

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1903

Se ora paragoniamo i coefficienti delle medesime derivate di f al primo e secondo membro, e per ciò fare permutiamo le j fra loro in tutti i modi possibili, osserviamo che le δ sono simmetriche negli indici inferiori, e introduciamo il simbolo S_{j_m} con analogo significato che nel § 2, *abbiamo infine la formola*:

$$\Xi\, \delta^{(r)}_{j_1 \dots j_m} = \frac{1}{m} S_{j_m} \sum_{k=1}^{r-m+1} \binom{r}{k} d^r \xi_{j_m} \delta^{(r-k)}_{j_1 \dots j_{m-1}} \tag{24}$$

valevole per $m = 2, 3, \dots r$, *mentre per* $m = 1$ *si ha semplicemente*:

$$\Xi\, \delta^{(r)}_j = d^r \xi_j \,. \tag{25}$$

In una prossima Nota faremo le applicazioni di queste formole.

Meccanica. — *Traiettorie dinamiche di un punto libero, sollecitato da forze conservative.* Nota di A. F. Dall'Acqua, presentata dal Corrispondente G. Ricci.

Il problema che mi sono proposto è il seguente:

« Sotto quali condizioni una doppia infinità di linee (*congruenza*) in « uno spazio con tre dimensioni, possa riguardarsi come costituita dalle « traiettorie dinamiche di un punto libero, sollecitato da una forza conser« vativa ».

Nel caso generale, con molta semplicità e senza sforzo veruno viene a completarsi a mano a mano il sistema delle equazioni del moto. Tuttavia non sembra agevole dare alle condizioni ottenute una forma elegante e di evidente significato geometrico.

In taluni casi però la questione si presenta in modo più adatto alle ricerche. Oltre al caso generale ne ho trattati tre particolari in ispecial modo interessanti.

1°. Quello in cui le traiettorie del punto siano geodetiche. « Esse, allora, coincidono con le linee di forza ».

2°. Il caso che la velocità sia costante rispetto al moto. Allora « il punto percorre delle geodetiche delle superfici equipotenziali ». Queste geodetiche sono inoltre caratterizzate dall'equazione

$$\frac{\partial \varrho}{\partial s} + \varrho \gamma_{131} = 0$$

dove ϱ è il loro raggio di curvatura, s il loro arco, γ_{131} la curvatura della proiezione sul piano ad esse normale delle traiettorie ortogonali alle superficie di livello.

3°. Il caso che le traiettorie costituiscano una congruenza normale. Ho trovato allora che: « Tutte le congruenze normali possono venir percorse da un punto generico sottoposto a forze conservative ». Il potenziale, quando si indichi con $\alpha(x_1, x_2, x_3) = \text{cost.}$ il parametro delle superfici ortogonali alla congruenza, è dato da

$$U = (\underset{1}{\Delta}\alpha)^2 f(\alpha) + \text{cost.}$$

dove f è simbolo di funzione arbitaria.

Si ha un'altra soluzione oltre a questa quando sia normale anche la congruenza inviluppata dalle normali principali alle traiettorie dinamiche. In tal caso, essendo ancora α il parametro delle superfici ortogonali alle traiettorie, « il parametro differenziale misto $\nabla(\alpha, \underset{1}{\Delta}\alpha)$ è funzione di α e $\underset{1}{\Delta}\alpha$ soltanto ».

Indicando con β il parametro delle superfici ortogonali alla congruenza inviluppata dalle normali principali, la seconda soluzione per U è data dalla

$$U = (\underset{1}{\Delta}\alpha)^2 f(\alpha) + (\underset{1}{\Delta}\alpha)^2 \int \frac{d\beta}{(\underset{1}{\Delta}\alpha)^2} - \beta$$

dove, risultando $\underset{1}{\Delta}\alpha$ funzione soltanto di α e β, l' integrale del secondo membro, indica una integrazione parziale rispetto a β. Inoltre f è simbolo di funzione arbitraria.

1. Sia $[\lambda]$ la congruenza costituita dalle traiettorie dinamiche di un punto libero, sollecitato da una forza conservativa: la velocità con cui le traiettorie vengono percorse sia rappresentata da un vettore $[p]$, tangente alla $[\lambda]$.

Applichiamo al nostro problema le formole generali della mia Nota sui *Moti di un punto libero, a caratteristiche indipendenti* (¹) e poniamo perciò $[\lambda] \equiv [\lambda_3]$. Le *caratteristiche* (componenti della velocità secondo il triedro $[\lambda_1], [\lambda_2], [\lambda_3]$) saranno $p_1 = p_2 = 0$, $p_3 = p$. Le equazioni del moto [(I), (II), Nota citata] si scrivono nel nostro caso

$$\text{(I)} \qquad x'_r = p\,\lambda^{(r)}$$

$$\text{(II)} \qquad P_1 = mp^2 \gamma_{313} \; , \; P_2 = mp^2 \gamma_{323} \; , \; P_3 = mp' .$$

Se indichiamo con U la funzione potenziale, con $T = \frac{mp^2}{2}$ la forza

(¹) Rendiconti della R. Accademia dei Lincei. Seduta del 15 marzo 1903.

viva, le (II) danno (ricordando le (I))

$$\frac{\partial U}{\partial s_1} = 2\,T\gamma_{313} \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial s_2} = 2\,T\gamma_{323}$$

$$\frac{\partial U}{\partial s_3} = mp' = m\sum_r \frac{\partial p}{\partial x_r}\,x'_r + m\,\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial s_3} + m\,\frac{\partial p}{\partial t}\,.$$

Se, come supponiamo, il campo di forza è indipendente dal tempo, dovremo avere l'integrale delle forze vive $T - U = h$ (cost. rispetto al moto) da cui

$$\frac{\partial U}{\partial s_3} = \frac{\partial T}{\partial s_3}\,.$$

Questa confrontata con la precedente espressione di $\frac{\partial U}{\partial s_3}$, mostra che nel nostro caso p non dipende esplicitamente dal tempo.

Le nostre equazioni si scrivono adunque, ponendo per brevità $\gamma_{3h3} = \gamma_h$

$$\frac{\partial U}{\partial s_1} = 2\gamma_1 T \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial s_2} = 2\gamma_2 T \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial s_3} = \frac{\partial T}{\partial s_3}\,. \tag{1}$$

Il problema meccanico che ci siamo proposti, corrisponde a questo:

« Sotto quali condizioni, desunte da soli elementi della $[\lambda]$, le (1) risultino illimitatamente integrabili ».

2. Le condizioni di integrabilità delle (1), posto $\frac{\partial T}{\partial s_3} = \varepsilon$, sono

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_1} = 2T\beta_1 + 3\varepsilon\gamma_1 \quad , \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial s_2} = 2T\beta_2 + 3\varepsilon\gamma_2 \tag{2}$$

$$\gamma_1\,\frac{\partial T}{\partial s_2} - \gamma_2\,\frac{\partial T}{\partial s_1} + T\delta + \varepsilon A = 0 \tag{3}$$

dove β_1, β_2, δ e ϑ, che comparirà più innanzi (¹), sono funzioni soltanto degli invarianti della terna $[\lambda]$.

Perchè queste equazioni possano esser sodisfatte, è necessario anzitutto che le (2) siano integrabili: sia cioè

$$\beta_1\,\frac{\partial T}{\partial s_2} - \beta_2\,\frac{\partial T}{\partial s_1} + T\vartheta + \frac{3}{2}\,\varepsilon\delta + A\,\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_3} = 0\,. \tag{4}$$

(¹) Le espressioni A, A_1, A_2 sono le *anormalità* delle congruenze $[\lambda]$, $[\lambda_1]$, $[\lambda_2]$, date dalle formole $2A_h = \gamma_{h\,h+1\,h+2} - \gamma_{h\,h+2\,h+1}$. Abbiamo posto inoltre

$$\beta_1 = \frac{\partial \gamma_1}{\partial s_1} - \gamma_1\gamma_{221} - 2\gamma_2 A_2 \quad , \quad \beta_2 = \frac{\partial \gamma_2}{\partial s_2} - \gamma_2\gamma_{112} + 2\,\gamma_1 A_1$$

$$\delta = \frac{\partial \gamma_1}{\partial s_2} - \frac{\partial \gamma_2}{\partial s_1} + \gamma_{121}\gamma_2 - \gamma_{212}\gamma_1 \quad , \quad \vartheta = \frac{\partial \beta_1}{\partial s_2} - \frac{\partial \beta_2}{\partial s_1} + \beta_2\gamma_{121} - \beta_1\gamma_{212} + 3(\beta_2\gamma_1 - \beta_1\gamma_2).$$

La congruenza $[\lambda_1]$ fino ad ora è rimasta arbitraria: approfittiamo di tale arbitrarietà per semplificare le nostre formole: assumiamo quindi per congruenza $[\lambda_1]$ quella (e ciò è sempre possibile) che sodisfa alla relazione

$$\frac{\beta_1}{\gamma_1} = \frac{\beta_2}{\gamma_2} = \sigma \tag{5}$$

dove indichiamo con σ il valore comune di questi rapporti.

Dalle (3) (4) abbiamo allora una relazione della forma

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_3} = \mathrm{T}\eta + \varepsilon\zeta \text{ (1)}. \tag{2_1}$$

Delle condizioni di integrabilità del sistema (2) (2_1), una è già sodisfatta per la (4), le altre due sono del tipo

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial s_1}\eta = \mathrm{T}\mu_1 + \varepsilon\nu_1 \ , \ \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial s_2}\eta = \mathrm{T}\mu_2 + \varepsilon\nu_2 \, .$$

Da queste e dalla (3) ricaviamo allora

$$\varepsilon + \mathrm{T}\varrho = 0 \, .$$

Per questa le condizioni di integrabilità del sistema (1) (cioè le (2), (3) e la (4) o la equivalente (2_1)) si scrivono

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \varrho}{\partial s_1} + \gamma_1(2\sigma - 3\varrho) + \frac{\varrho}{\eta}(\mu_1 - \nu_1\varrho) = 0 \, , \\ &\frac{\partial \varrho}{\partial s_2} + \gamma_2(2\sigma - 3\varrho) + \frac{\varrho}{\eta}(\mu_2 - \nu_2\varrho) = 0 \, , \\ &\frac{\partial \varrho}{\partial s_3} + \eta - \zeta\varrho - \varrho^2 = 0 \, . \end{aligned} \tag{6}$$

(1) Introducendo il simbolo σ, ϑ assume la forma: $\vartheta = \gamma_1 \frac{\partial \sigma}{\partial s_2} - \gamma_2 \frac{\partial \sigma}{\partial s_1} + \sigma\delta$, e abbiamo allora $\mathrm{A}\eta = \gamma_2 \frac{\partial \sigma}{\partial s_1} - \gamma_1 \frac{\partial \sigma}{\partial s_2}$, $\mathrm{A}\zeta = \mathrm{A}\sigma - \frac{3}{2}\delta$.
Nelle formole seguenti abbiamo posto:

$$\mu_1 = \gamma_1\left(2\frac{\partial \sigma}{\partial s_3} - 3\sigma\frac{\delta}{\mathrm{A}} + 4\eta\right) - \frac{\partial \eta}{\partial s_1} \, , \, \mu_2 = \gamma_2\left(2\frac{\partial \sigma}{\partial s_3} - 3\sigma\frac{\delta}{\mathrm{A}} + 4\eta\right) - \frac{\partial \eta}{\partial s_2}$$

$$\nu_1 = \gamma_1(5\sigma + \zeta) - \frac{\partial \zeta}{\partial s_1} \ , \ \nu_2 = \gamma_2(5\sigma + \zeta) - \frac{\partial \zeta}{\partial s_2}$$

da cui

$$\varrho = \frac{\delta\eta + \gamma_1\mu_2 - \gamma_2\mu_1}{\mathrm{A}\eta + \gamma_1\nu_2 - \gamma_1\nu_2} = \frac{\delta\eta - \gamma_1\frac{\partial \eta}{\partial s_2} + \gamma_2\frac{\partial \eta}{\partial s_1}}{\mathrm{A}\eta - \gamma_1\frac{\partial \zeta}{\partial s_2} + \gamma_2\frac{\partial \zeta}{\partial s_1}} \, .$$

Queste, poichè le $[\lambda_1]$ $[\lambda_2]$ non sono più arbitrarie, non contengono elementi indipendenti dalla $[\lambda]$ e sono quindi le condizioni cercate.

Così il nostro problema analitico è risolto. Come dicemmo, non riesce però facile di dare nel caso generale una forma semplice e una semplice interpretazione geometrica alle (6).

Questo ci riuscirà invece nei casi a cui abbiamo accennato.

3. Il primo caso è il più semplice di tutti [1]. La geodeticità della $[\lambda]$ è caratterizzata dall'annullarsi simultaneo degli invarianti γ_1, γ_2. Le (1) allora diventano

$$\frac{\partial U}{\partial s_1} = 0 \;,\quad \frac{\partial U}{\partial s_2} = 0$$

(omessa l'ultima che può sempre esser sodisfatta per un conveniente valore di T). Queste mostrano che le congruenze $[\lambda_1]$ $[\lambda_2]$ giacciono sulle superficie $U = \text{cost}$. La $[\lambda]$ adunque riesce normale a tali superficie.

E poichè le $U = \text{cost}$. sono le superficie equipotenziali, ne viene che le traiettorie dal punto mobile, coincidono con le linee di forza.

4. Un caso che presenta alcune analogie col precedente, è quello in in cui la velocità (e quindi la forza viva) sia costante lungo le traiettorie del punto. Lungo queste allora (ricorda le (1), oppure l'integrale delle forze vive) sarà anche costante il potenziale: cioè il punto si muove sopra le superficie equipotenziali.

Poichè la forza è normale a queste superficie, potremo considerare il punto come non sollecitato da forze, ma sottoposto al legame di dover rimanere sopra una superficie data (*equipotenziale*). Esso percorrerà quindi una geodetica di questa.

La sua velocità dovrà essere inoltre costante, rispetto al movimento. Se indichiamo con $[\lambda_1]$ la congruenza ortogonale alle superficie equipotenziali, che riuscirà per ciò che si è detto, normale principale alla $[\lambda]$, sarà [2] $\gamma_2 = 0$, $\gamma_1 = c$, c curvatura della $[\lambda]$. Avremo per le (1)

$$\frac{1}{c}\frac{\partial U}{\partial s_1} = T \,,$$

e perchè T sia costante durante il movimento $\left(\frac{\partial T}{\partial s_3} = 0\right)$

[1] Esso venne escluso dalla trattazione generale, insieme col caso delle congruenze normali, perchè nelle posizioni della pagina precedente figurano come divisori quantità che si annullano in tali casi.

[2] Confr. la mia Memoria *Sulla teoria delle congruenze di curve*, ecc. Annali di Matematica. S. III, T. VI.

$$c\frac{\partial}{\partial s_3}\frac{\partial U}{\partial s_1}-\frac{\partial U}{\partial s_1}\frac{\partial c}{\partial s_3}=0$$

cioè [1]

$$\frac{\partial \log c}{\partial s_3}=\gamma_{131}$$

che indicando con $\varrho=\frac{1}{c}$ il raggio di curvatura della $[\lambda]$, assume la forma che le abbiamo data nella introduzione.

5. Veniamo al caso delle congruenze normali (non geodetiche, $A=0$, $c\neq 0$) e supponiamo ancora la $[\lambda_1]$ normale principale alla $[\lambda]$ $(\gamma_1=c, \gamma_2=0)$. Le (1) si scrivono

$$(1')\qquad \frac{\partial U}{\partial s_1}=2cT\ ,\quad \frac{\partial U}{\partial s_2}=0\ ,\quad \frac{\partial U}{\partial s_3}=\frac{\partial T}{\partial s_3}\,.$$

Insieme con queste varrà ancora la (3). Postovi $A=0$, $\gamma_1=c$, $\gamma_2=0$; essa si scriverà [2] $\frac{\partial T}{\partial s_2}=0$.

Da questa e dalle (1') abbiamo

$$(7)\qquad \frac{\partial(T-U)}{\partial s_2}=0\ ,\quad \frac{\partial(T-U)}{\partial s_3}=0\,.$$

Quindi: o $T-U$ è costante in tutto lo spazio, e si avrà anche per le (1')

$$(8)\qquad \frac{\partial \log T}{\partial s_1}=2c\ ,\quad \frac{\partial \log T}{\partial s_2}=0\,.$$

oppure la congruenza $[\lambda_1]$ è anch'essa normale, e $T-U$ è un parametro delle superficie ortogonali ad essa.

(1) Fra le derivate seconde di una funzione passa la relazione (condizione di integrabilità)

$$\frac{\partial}{\partial s_1}\frac{\partial U}{\partial s_3}-\frac{\partial}{\partial s_3}\frac{\partial U}{\partial s_1}+\gamma_{131}\frac{\partial U}{\partial s_1}+2A_2\frac{\partial U}{\partial s_2}-\gamma_1\frac{\partial U}{\partial s_3}=0$$

e che nel nostro caso (per le (1)) assume la forma

$$\frac{\partial}{\partial s_3}\frac{\partial U}{\partial s_1}=\gamma_{131}\frac{\partial U}{\partial s_1}\,.$$

(2) Per la nota relazione simbolica $\gamma_{12}-\gamma_{21}=0$ (v. p. e. Nota citata), si ha nel nostro caso

$$\frac{\partial c}{\partial s_2}-c\gamma_{121}=2\frac{\partial A}{\partial s_3}+4AH=0\,.$$

Per questa il coefficiente δ nella (3) si annulla.

Nel primo caso, indichiamo con $\alpha(x_1, x_2, x_3) = \text{cost.}$, l'equazione delle superficie ortogonali alla $[\lambda]$. È noto allora (¹) che le linee lungo cui si intersecano le superficie $\alpha = \text{cost.}$, con le $\underset{1}{\Delta}\alpha = \text{cost.}$, riescono binormali alla $[\lambda]$, costituiscono cioè la $[\lambda_2]$. Ed è noto pure che si ha

$$\frac{\partial \log \underset{1}{\Delta}\alpha}{\partial s_1} = c \quad , \quad \frac{\partial \log \underset{1}{\Delta}\alpha}{\partial s_2} = 0 . \tag{9}$$

Da queste e dalle (8)

$$\frac{\partial (\log \mathrm{T} - 2 \log \underset{1}{\Delta}\alpha)}{\partial s_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial (\log \mathrm{T} - 2 \log \underset{1}{\Delta}\alpha)}{\partial s_2} = 0 .$$

Queste ci mostrano che $\log \mathrm{T} - 2 \log \underset{1}{\Delta}\alpha$ e quindi $\dfrac{\mathrm{T}}{(\underset{1}{\Delta}\alpha)^2}$ è costante sulle superficie ortogonali alla $[\lambda]$ cioè sulle $\alpha = \text{cost.}$: ne sarà adunque un parametro. Potremo indicarlo con $f(\alpha)$, e sarà

$$\mathrm{T} = (\underset{1}{\Delta}\alpha)^2 f(\alpha) .$$

Per la osservazione precedente, $\mathrm{U} = \mathrm{T} + \mathrm{C}$ da cui

$$\mathrm{U} = (\underset{1}{\Delta}\alpha)^2 f(\alpha) + \mathrm{C}$$

dove C rappresenta una costante assoluta.

6. Consideriamo il secondo caso. La $[\lambda_1]$ è normale, sia $\beta = \text{cost.}$ l'equazione delle superficie ortogonali alla $[\lambda_1]$: $\mathrm{T} - \mathrm{U}$ è un parametro di queste, che potremo identificare con β

$$\mathrm{T} - \mathrm{U} = \beta .$$

Per la prima delle (9), la prima delle (1') si scrive

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial s_1} = \frac{2}{\underset{1}{\Delta}\alpha} \frac{\partial \underset{1}{\Delta}\alpha}{\partial s_1} (\mathrm{U} + \beta)$$

od anche

$$\frac{\partial}{\partial s_1} \frac{\mathrm{U}}{(\underset{1}{\Delta}\alpha)^2} = 2\beta \frac{1}{(\underset{1}{\Delta}\alpha)^3} \frac{\partial \underset{1}{\Delta}\alpha}{\partial s_1} = -\beta \frac{\partial}{\partial s_1} \frac{1}{(\underset{1}{\Delta}\alpha)^2} .$$

La $\dfrac{\mathrm{U}}{(\underset{1}{\Delta}\alpha)^2}$, e la $\dfrac{1}{(\underset{1}{\Delta}\alpha)^2}$ sono funzioni soltanto di α e β. Invero dalla

(¹) Cfr. Memoria citata, pag. 34.

seconda delle (1) e dalla seconda delle (9) si trae che U e $\underset{1}{\Delta}\alpha$ sono costanti lungo la $[\lambda_2]$, sono cioè funzioni soltanto dei parametri (α e β) delle superficie che si intersecano lungo la $[\lambda_2]$.

Sarà perciò (¹)

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{U}{(\underset{1}{\Delta}\alpha)^2} = -\beta\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{(\underset{1}{\Delta}\alpha)^2}$$

e integrando per parti

$$U = -\beta + (\underset{1}{\Delta}\alpha)^2\int\frac{d\beta}{(\underset{1}{\Delta}\alpha)^2} + (\underset{1}{\Delta}\alpha)^2 f.$$

La f rappresenta la costante rispetto a β relativa all'integrale del secondo membro: essa perciò non deve contener β: ma poichè U è funzione solo di α e β, essa riuscirà funzione di α soltanto.

7. Per esaurire la nostra ricerca, procuriamo di determinare tutte le $[\lambda]$ che sodisfanno alla doppia condizione di esser normali e inviluppare con le loro normali principali una congruenza normale. Indicando ancora con α e β i parametri delle superficie ortogonali alla $[\lambda]$ e alla sua normale principale, dovrà valere la relazione

$$\nabla(\alpha\,,\beta) = 0 \tag{10}$$

(con che le $\beta =$ cost. riescono ortogonali alle $\alpha =$ cost.), e valere inoltre la $\dfrac{\partial\underset{1}{\Delta}\alpha}{\partial s_2} = 0$ (con che le linee ortogonali alle $\beta =$ cost. riescono normali principali rispetto alla $[\lambda]$); $\underset{1}{\Delta}\alpha$ è perciò funzione solo di α e β, o ciò che è lo stesso β è funzione di α e $\underset{1}{\Delta}\alpha$ soltanto.

Tenendo conto di ciò la (10) si scrive (²)

$$\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}(\underset{1}{\Delta}\alpha)^2 + \frac{\partial\beta}{\partial(\underset{1}{\Delta}\alpha)}\nabla(\alpha\,,\underset{1}{\Delta}\alpha) = 0.$$

(¹) In generale si avrà

$$\frac{\partial F(\alpha,\beta)}{\partial s_1} = \frac{\partial F}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial s_1} + \frac{\partial F}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial s_1}.$$

Ma si ha $\dfrac{\partial\alpha}{\partial s_1} \equiv 0$, $\dfrac{\partial\beta}{\partial s_1} \neq 0$, per cui $\dfrac{\partial F}{\partial s_1} : \dfrac{\partial\beta}{\partial s_1} = \dfrac{\partial F}{\partial\beta}$.

(²) $$\nabla(\alpha\,,\beta) = \Sigma_r\,\alpha^{(r)}\beta_r = \Sigma_r\,\alpha^{(r)}\left[\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\alpha_r + \frac{\partial\beta}{\partial\underset{1}{\Delta}\alpha}(\underset{1}{\Delta}\alpha)_r\right] =$$
$$= \frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\Sigma_r\,\alpha^{(r)}\alpha_r + \frac{\partial\beta}{\partial\underset{1}{\Delta}\alpha}\Sigma_r\,\alpha^{(r)}(\underset{1}{\Delta}\alpha)_r = \frac{\partial\beta}{\partial\alpha}(\underset{1}{\Delta}\alpha)^2 + \frac{\partial\beta}{\partial\underset{1}{\Delta}\alpha}\nabla(\alpha\,,\underset{1}{\Delta}\alpha).$$

Perchè questa sia integrabile è necessario e sufficiente che si abbia

$$\nabla(\alpha\,,\underset{1}{\triangle}\alpha) = \mathrm{F}(\alpha\,,\underset{1}{\triangle}\alpha)\,.$$

Ad ogni integrale di questa ultima corrisponderà adunque una congruenza del tipo cercato.

Fisica. — *Sensibilità del ferro alle onde elettriche nell'isteresi magneto-elastica.* Nota di A. Sella, presentata dal Socio Blaserna.

Rutherford mostrava nel 1897 (Phil. Trans. of the Roy. Soc. of London, 189) che fili sottili di acciaio magnetizzati a saturazione possono costituire un rivelatore sensibile di onde elettriche, poichè essi si smagnetizzano parzialmente, quando le onde vengano fatte passare sia in un avvolgimento solenoidale intorno al filo, sia longitudinalmente per il filo stesso.

Marconi ha recentemente mostrato (Proc. Roy. Soc. London, 1902) che una variazione della magnetizzazione di un filo di ferro ha sempre luogo sotto l'azione di onde elettriche condotte intorno ad esso, mentre il filo percorre un ciclo magnetico sotto l'azione di un campo esterno variabile ed in generale in un punto qualunque di questo ciclo. La brusca variazione di energia magnetica del filo prodotta dall'onda viene accusata da un telefono in serie con un avvolgimento intorno al filo di ferro. Con questa doppia e radicale modificazione, il *detector* magnetico è diventato nelle mani del Marconi, come è noto, un apparecchio di grande sensibilità.

Era naturale il pensare che questa sensibilità di un filo di ferro alle onde elettriche si dovesse ritrovare quando l'isteresi magnetica fosse generata invece che da un cambiamento del campo esterno, da un altro processo, come per esempio da una deformazione elastica. E si riesce infatti molto facilmente a dimostrare che le cose stanno così.

Un fascio di fili di ferro saldati insieme alle due estremità è infilato in un tubo di vetro, intorno a cui sono disposti due avvolgimenti di filo di rame sottile; di cui l'uno è destinato ad accogliere il passaggio delle onde elettriche, mentre l'altro è chiuso su di un telefono. Se ora il fascio è stato previamente magnetizzato e lo si sottopone ad un processo di torsione alternativamente da una parte e dall'altra, esso è molto sensibile in queste condizioni ad onde elettriche lanciate nel primo avvolgimento.

L'isteresi magneto-elastica per torsione è un fenomeno molto complesso ed anche la sensibilità alle onde elettriche del filo di ferro dipende fortemente dalle sue condizioni momentanee e dalla sua storia precedente, sia magnetica, sia elastica.