ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCC.

1903

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1903

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 17 maggio 1903.

P. Villari, Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla costruzione dei simboli a carattere invariantivo nella teoria delle forme differenziali di ordine qualunque.* Nota II del Corrispondente Ernesto Pascal.

Nella teoria invariantiva delle forme differenziali di una determinata specie si presentano sempre certe espressioni, più o meno complesse, formate mediante i coefficienti della forma e le loro derivate, e che hanno un' importanza fondamentale, tale che può quasi dirsi che è intorno ad esse e alle loro relazioni che si svolge e si aggira tutta la teoria. Così, per le forme pfaffiane tali espressioni sono quelle che si rappresentano col noto simbolo (ij), per le ordinarie forme differenziali quadratiche esse si riducono ai simboli di Christoffel, e infine per il caso più generale delle forme differenziali di 2° ordine, esse sono state da me trovate e studiate in varî sensi nei parecchi lavori che ho su questo argomento pubblicato negli ultimi tempi.

La presente Nota, che fa seguito all' altra da me pubblicata recentemente in questi medesimi Rendiconti [1], ha per iscopo *di costruire e studiare siffatte espressioni per il caso generale delle forme differenziali di ordine qualsiasi.*

[1] Rend. della R. Acc. dei Lincei (5), t. XII, 1903, pagg. 325-332.

Queste espressioni, nella loro totalità, si riproducono con una trasformazione di variabili, in un senso che sarà visto più sotto, ed è perciò che io, per comodità, le chiamerò *simboli a carattere invariantivo*, come ho fatto nel titolo di questa Nota.

1. *Simboli secondari e loro proprietà*. — Per procedere con ordine e per maggiore chiarezza e comodità di locuzione distingueremo due categorie di simboli, e cioè quelli che chiameremo *principali*, e quelli che chiameremo *secondari*.

Nel caso del secondo ordine sono *simboli secondari* quelli da noi rappresentati colle parentesi doppie $((i\,j))$, e sono *principali* quelli rappresentati con $(i\,j)$, $\}i\,j\{$, $\}i\,j\,h\{$; questi ultimi poi li distingueremo in due specie, come diremo più sotto.

In questo paragrafo, come dice il titolo, si tratterà pertanto di estendere per le forme differenziali di ordine qualsiasi, la definizione delle parentesi doppie, che hanno per il nostro caso un'importanza assai maggiore che non per quello del secondo ordine.

Poniamo in generale:

$$
\begin{aligned}
(1) \qquad ((i_1 \dots i_\nu\,,\, j_1 \dots j_m)) = {} & \frac{\partial^m X_{i_1 \dots i_\nu}}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_m}} - \\
& - \frac{\partial^{m-1} X_{i_1 \dots i_\nu j_1}}{\partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_m}} - \frac{\partial^{m-1} X_{i_1 \dots i_\nu j_2}}{\partial x_{j_1}\, \partial x_{j_3} \dots \partial x_{j_m}} - \dots\dots \\
& + \frac{\partial^{m-2} X_{i_1 \dots i_\nu j_1 j_2}}{\partial x_{j_3} \dots \partial x_{j_m}} + \frac{\partial^{m-2} X_{i_1 \dots i_\nu j_1 j_3}}{\partial x_{j_2}\, \partial x_{j_4} \dots \partial x_{j_m}} + \dots\dots \\
& - \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\
& + (-1)^m X_{i_1 \dots i_\nu j_1 \dots j_m}
\end{aligned}
$$

di cui la legge di formazione si riconosce agevolmente; nella seconda linea ci sono le derivate di ordine $m - 1$ di tutte le $X_{i_1 \dots i_\nu j_s}$ $(s = 1\,,\, 2\,, \dots m)$ rispetto alle x di indici $j_1 \dots j_{s-1}\, j_{s+1} \dots j_m$; nella terza compaiono le derivate $(m-2)^{me}$ di tutte le $X_{i_1 \dots i_\nu j_s j_t}$ rispetto a tutte le x i cui indici sono le j meno j_s e j_t; e così di seguito.

È evidente che *il simbolo è simmetrico sia nel gruppo dei primi indici* $i_1 \dots i_\nu$, *che nel gruppo dei secondi* $j_1 \dots j_m$.

Avvertiamo che alle volte per ricordare che è cogli elementi X che si intende calcolato il predetto simbolo, scriveremo $((i_1 \dots i\,,\, j_\nu \dots j_m))_X$. Inoltre per $m = 0$ *poniamo* $((i_1 \dots i_\nu)) = X_{i_1 \dots i_\nu}$.

Si riconosce subito che *si ha identicamente*:

$$
(2) \quad ((i_1 \dots i_\nu\,,\, j_1 \dots j_m)) = \frac{\partial}{\partial x_{j_m}} ((i_1 \dots i_\nu\,,\, j_1 \dots j_{m-1})) - ((i_1 \dots i_\nu\, j_m\,,\, j_1 \dots j_{m-1}))
$$

$$
(3) \quad ((i_1 \dots i_\nu\,,\, j_1 \dots j_m)) = \frac{\partial}{\partial x_{i_\nu}} ((i_1 \dots i_{\nu-1}\,,\, j_1 \dots j_m)) - ((i_1 \dots i_{\nu-1}\,,\, j_1 \dots j_m\, i_\nu))
$$

di cui però la (3) è in sostanza la stessa della (2) quando vi si faccia uno spostamento di termini e un mutamento di nomi agli indici.

Il secondo membro della (2) è di una formazione analoga a quella della (1) per $m = 1$; propriamente se in luogo degli elementi X, consideriamo gli elementi

$$Z_{hk\dots}^{(j_1\dots j_{m-1})} = ((hk\dots, j_1\dots j_{m-1}))_X$$

il secondo membro di (2) non è che il simbolo

$$((i_1\dots i_\nu, j_m))_Z$$

formato cogli elementi Z.

Riapplicando la stessa (2) si ha:

$$((i_1\dots i_\nu, j_1\dots j_m)) = \frac{\partial^2}{\partial x_{j_{m-1}}\,\partial x_{j_m}}((i_1\dots i_\nu, j_1\dots j_{m-2})) -$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_{j_{m-1}}}((i_1\dots i_\nu j_m, j_1\dots j_{m-2})) - \frac{\partial}{\partial x_{j_m}}((i_1\dots i_\nu j_{m-1}, j_1\dots j_{m-2})) +$$

$$+((i_1\dots i_\nu j_{m-1} j_m, j_1\dots j_{m-2}))$$

e il secondo membro non è altro che

$$((i_1\dots i_\nu, j_{m-1} j_m))_Z$$

quando questo simbolo si calcoli prendendo per elementi, anzichè le X, le

$$Z_{hk\dots}^{(j_1\dots j_{m-2})} = ((hk\dots, j_1\dots j_{m-2}))_X.$$

Così in generale si ha l' importante risultato che: *il simbolo*

$$((i_1\dots i_\nu, j_1\dots j_m))_X$$

è eguale al simbolo

$$((i_1\dots i_\nu, j_{m-s+1}\dots j_m))_Z$$

calcolato, anzichè per le X, *per le*

$$Z_{hk\dots}^{(j_1\dots j_{m-s})} = ((hk\dots, j_1\dots j_{m-s}))_X.$$

Così *un simbolo* (1) *di cui il gruppo dei secondi indici sia formato di m indici, si può rappresentare (e in vari modi) come simbolo in cui il numero degli indici del secondo gruppo sia minore di m.*

La considerazione fatta per la (2) può ripetersi per la (3), che p. es. riapplicata ancora una volta, dà:

$$((i_1 \dots i_\nu , j_1 \dots j_m)) = \frac{\partial^2}{\partial x_{i_{\nu-1}} \partial x_{i_\nu}} ((i_1 \dots i_{\nu-2} , j_1 \dots j_m)) -$$

$$- \frac{\partial}{\partial x_{i_{\nu-1}}} ((i_1 \dots i_{\nu-2} , j_1 \dots j_m \, i_\nu)) - \frac{\partial}{\partial x_{i_\nu}} ((i_1 \dots i_{\nu-2} , j_1 \dots j_m \, i_{\nu-1})) +$$

$$+ ((i_1 \dots i_{\nu-2} , j_1 \dots j_m \, i_{\nu-1} \, i_\nu)),$$

di cui il secondo membro è $((j_1 \dots j_m \, , \, i_{\nu-1} \, i_\nu))_Y$ calcolato per gli elementi

$$Y_{hk\dots}^{(i_1 \dots i_{\nu-2})} = ((i_1 \dots i_{\nu-2} , hk \dots))_X$$

ovvero, più generalmente, è anche $((j_{m-s+1} \dots j_m \, , \, i_{\nu-1} \, i_\nu))_T$ calcolato per gli elementi

$$T_{hk\dots}^{(i_1 \dots i_{\nu-2} , j_1 \dots j_{m-s})} = ((i_1 \dots i_{\nu-2} , j_1 \dots j_{m-s} \, hk \dots))_X$$

dove s è qualunque, e gli indici $h , k \dots$ sono al solito i variabili, mentre gli altri si intendono fissi per uno stesso sistema di elementi T.

In generale possiamo dire: *il simbolo* $((i_1 \dots i_\nu , j_1 \dots j_m))_X$ *si può anche rappresentare came simbolo del tipo* $((j_{m-s+1} \dots j_m \, , \, i_{\nu-t+1} \dots i_\nu))_T$ *calcolato però, anzichè per le* X, *per gli elementi*:

$$T_{hk\dots}^{(i_1 \dots i_{\nu-t} , j_1 \dots j_{m-s})} = ((i_1 \dots i_{\nu-t} , j_1 \dots j_{m-s} \, hk \dots))_X$$

in cui s , t *sono arbitrari.*

Ponendo $m = 0$, osservando che allora $((i_1 \dots i_\nu \, i \, , j_1 \dots j_m))_X$ diventa $X_{i_1 \dots i_\nu i}$ e applicando il precedente teorema per $s = 0$, e $t = \nu$, *si ha la formola*:

$$X_{i_1 \dots i_\nu i} = \frac{\partial^\nu X_i}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_\nu}} - S_{i_1} \frac{\partial^{\nu-1}}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_\nu}} ((i \, , i_1)) + \tag{4}$$

$$+ S_{i_1 i_2} \frac{\partial^{\nu-2}}{\partial x_{i_3} \dots \partial x_{i_\nu}} ((i \, , i_1 \, i_2)) - \cdots\cdots + (-1)^\nu ((i \, , i_1 \dots i_\nu))$$

dove le S hanno il significato operativo già stabilito alla precedente Nota, e cioè S_{i_1} significa che bisogna permutare i_1 con $i_2 \dots i_\nu$ e poi sommare i risultati, $S_{i_1 i_2}$ significa che bisogna permutare $i_1 \, i_2$ con due altri qualunque degli altri indici e poi sommare tutti i risultati, e così di seguito.

2. *Costruzione dei simboli principali.* — Di *simboli principali* ne considereremo due specie; quelli di *prima specie* li rappresenteremo colle parentesi rotonde ordinarie, a quelli di *seconda specie* colle parentesi $\} \{$.

Porremo:

$$(5)\quad \begin{cases} (i\,j) = ((i\,,j)) - ((j\,,i)) \\ (i\,h\,j) = ((i\,h\,,j)) + ((j\,,i\,h)) \\ (i\,h\,k\,j) = ((i\,h\,k\,,j)) - ((j\,,i\,h\,k)) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

e invece

$$(6)\quad \begin{cases} \}i\,j\{ = ((i\,,j)) + ((j\,,i)) \\ \}i\,h\,j\{ = ((i\,h\,,j)) - ((j\,,ih)) \\ \}i\,h\,k\,j\{ = ((i\,h\,k\,,j)) + ((j\,,i\,h\,k)) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

e così di seguito con una legge semplice ed evidente.

È da notare che il simbolo ora denotato con $(i\,h\,j)$ è lo stesso di quello che nella teoria delle forme di secondo ordine era stato da noi denotato con $\}i\,h\,j\{$; qui abbiamo dovuto mutare la notazione per porre quel simbolo di accordo colle notazioni adottate per gli altri.

Sviluppando i (5) si vede che essi risultano formati mediante solo le *derivate* delle X, e in essi non compaiono mai le X non sottoposte a derivazione; invece nei (6) comparisce sempre un termine in cui c' è la X avente per indici tutti quelli del simbolo stesso, e non sottoposto a derivazione.

Per una forma differenziale di ordine r, di simboli principali di 1ª specie (i(5)) ne esistono sino a quelli con $r+1$ indici; di simboli principali di 2ª specie (i(6)) ne esistono fino a quelli con r indici.

Se da una forma differenziale di ordine r si passa ad una dell' ordine $r+1$, si viene ad introdurre una nuova categoria *di ciascuna delle due specie di simboli*, e cioè i simboli di 1ª specie a $r+2$ indici, e quelli di 2ª specie a $r+1$ indici.

3. *Formole di trasformazione dei simboli secondari.* — Passiamo ora a ricercare le formole di trasformazione dei simboli e cominceremo naturalmente dai secondari, perchè da esse poi immediatamente si troveranno le altre.

Il risultato importante cui giungeremo è il seguente:

Il simbolo $((h_1 \dots h_\mu\,, k_1 \dots k_\sigma))$ si trasforma esattamente come si trasformerebbe il prodotto $X_{h_1 \dots h_\mu} X_{k_1 \dots k_\sigma}$.

Indichiamo con $((h_1 \dots, k_1 \dots))'$ i simboli secondari calcolati per i coefficienti trasformati Y dati dalla formola (7) della Nota precedente, e ricerchiamo prima la formola di trasformazione per il caso particolare in cui il gruppo dei secondi indici del simbolo sia formato di *un* indice solo.

Si ha:

$$((h_1 \dots h_\mu\,, h_{\mu+1}))' = \frac{\partial Y_{h_1 \dots h_\mu}}{\partial y_{h_{\mu+1}}} - Y_{h_1 \dots h_{\mu+1}}\,,$$

cioè

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} &= \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{j_1 \dots j_{m+1}} \frac{\partial X_{j_1 \dots j_m}}{\partial x_{j_{m+1}}} \frac{\partial x_{j_{m+1}}}{\partial y_{h_{\mu+1}}} \begin{pmatrix} j_1 \dots j_m \\ h_1 \dots h_\mu \end{pmatrix}_{xy} + \\ &+ \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{j_1 \dots j_m} X_{j_1 \dots j_m} \frac{\partial}{\partial y_{h_{\mu+1}}} \begin{pmatrix} j_1 \dots j_m \\ h_1 \dots h_\mu \end{pmatrix}_{xy} - \\ &- \sum_{m=1}^{\mu+1} \sum_{j_1 \dots j_m} X_{j_1 \dots j_m} \begin{pmatrix} j_1 \dots j_m \\ h_1 \dots h_{\mu+1} \end{pmatrix}_{xy}. \end{aligned} \right.$$

I termini per $m = 1$ della seconda riga si distruggono con quelli per $m = 1$ della terza riga, come è facile riconoscere; quelli per $m = 2, 3, \dots \mu$ della seconda e terza riga, in forza dell'identità (15) della Nota precedente si riducono a

$$\frac{1}{m} \sum_{m=2}^{\mu} \sum_{j_1 \dots j_m} X_{j_1 \dots j_m} S_{j_m} \frac{\partial x_{j_m}}{\partial y_{h_{\mu+1}}} \begin{pmatrix} j_1 \dots j_{m-1} \\ h_1 \dots h_\mu \end{pmatrix}_{xy}$$

Ora essendo $X_{j_1 \dots j_m}$ simmetrico negli indici, si può porre il simbolo di operazione S_{j_m} avanti la X, e inoltre evidentemente

$$\frac{1}{m} \sum_{j_1 \dots j_m} S_{j_m} \equiv \sum_{j_1 \dots j_m};$$

onde, mutando m in $m+1$, l'ultima espressione può scriversi:

$$(8)\qquad - \sum_{m=1}^{\mu-1} \sum_{j_1 \dots j_{m+1}} X_{j_1 \dots j_{m+1}} \frac{\partial x_{j_{m+1}}}{\partial y_{h_{\mu+1}}} \begin{pmatrix} j_1 \dots j_m \\ h_1 \dots h_\mu \end{pmatrix}_{xy}.$$

Bisogna poi ancora sottrarre il termine che risulta dalla terza riga di (7) per $m = \mu + 1$; ma tal termine può, come è facile vedere, porsi sotto la forma che si otterrebbe da (8) per $m = \mu$. Raccogliendo perciò la prima riga di (7) colla (8) estesa da $m = 1$ ad $m = \mu$, e chiamando rispettivamente i e k gli indici j_{m+1} e $h_{\mu+1}$, si ha infine:

$$(9)\qquad ((h_1 \dots h_\mu, k)) = \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{i} \sum_{j_1 \dots j_m} ((j_1 \dots j_m, i)) \begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix}_{xy} \begin{pmatrix} j_1 \dots j_m \\ h_1 \dots h_\mu \end{pmatrix}_{xy}$$

Passiamo ora alla formola per il caso generale in cui il gruppo dei secondi indici sia formato di più di uno.

Dico che *si ha in generale*:

$$(10)\ ((h_1 \dots h_\mu, k_1 \dots k_\sigma))' = \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{s=1}^{\sigma} \sum_{j_1 \dots j_m} \sum_{i_1 \dots i_s} ((j_1 \dots j_m, i_1 \dots i_s)) \begin{pmatrix} j_1 \dots j_m \\ h_1 \dots h_\mu \end{pmatrix}_{xy} \begin{pmatrix} i_1 \dots i_s \\ k_1 \dots k_\sigma \end{pmatrix}_{xy}$$

formola che per $\sigma = 1$ si riduce alla (9), e che noi dimostreremo per induzione facendo vedere che se essa si verifica per σ si verifica per $\sigma + 1$.

Serviamoci della formola (2) che scriveremo:

$$(11)\ ((h_1 \dots h_\mu, k_1 \dots k_\sigma k))' = \frac{\partial}{\partial y_k} ((h_1 \dots h_\mu, k_1 \dots k_\sigma))' - ((h_1 \dots h_\mu k, k_1 \dots k_\sigma))'$$

e calcoliamo il secondo membro di questa espressione mediante la (10) che vale, per ipotesi, per ciascuno dei termini di quel secondo membro, perchè in essi il gruppo dei secondi indici è formato da σ indici.

Otteniamo (tralasciando da ora in poi, per brevità, di segnare gli indici x, y in basso alle parentesi che figurano in (10))

$$(12)\ \left\{ \begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{s=1}^{\sigma} \sum_{j_1 \dots j_m} \sum_{i_1 \dots i_{s+1}} \frac{\partial}{\partial x_{i_{s+1}}} ((j_1 \dots j_m, i_1 \dots i_s)) \cdot \begin{pmatrix} i_{s+1} \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 \dots j_m \\ h_1 \dots h_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \dots i_s \\ k_1 \dots k_\sigma \end{pmatrix} + \\ & + \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{s=1}^{\sigma} \sum_{j_1 \dots j_m} \sum_{i_1 \dots i_s} ((j_1 \dots j_m, i_1 \dots i_s)) \frac{\partial}{\partial y_k} \left[\begin{pmatrix} j_1 \dots j_m \\ h_1 \dots h_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \dots i_s \\ k_1 \dots k_\sigma \end{pmatrix} \right] \\ & - \sum_{m=1}^{\mu+1} \sum_{s=1}^{\sigma} \sum_{j_1 \dots j_m} \sum_{i_1 \dots i_s} ((j_1 \dots j_m, i_1 \dots i_s)) \begin{pmatrix} j_1 \dots j_m \\ h_1 \dots h_\mu k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \dots i_s \\ k_1 \dots k_\sigma \end{pmatrix}. \end{aligned} \right.$$

Ora per $m = 1$ la seconda e terza riga dà:

$$\sum_{s=1}^{\sigma} \sum_{j_1} \sum_{i_1 \dots i_s} ((j_1, i_1 \dots i_s)) \begin{pmatrix} j_1 \\ h_1 \dots h_\mu \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y_k} \begin{pmatrix} i_1 \dots i_s \\ k_1 \dots k_\sigma \end{pmatrix}$$

osservando che

$$\frac{\partial}{\partial y_k} \begin{pmatrix} j_1 \\ h_1 \dots h_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 \\ h_1 \dots h_\mu k \end{pmatrix}.$$

Se $s = 1$ possiamo ancora scrivere $\frac{\partial}{\partial y_k} \begin{pmatrix} i_1 \\ k_1 \dots k_\sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 \\ k_1 \dots k_\sigma k \end{pmatrix}$, e se $s > 1$, mediante la formola (15) della precedente Nota, scriviamo invece:

$$\frac{\partial}{\partial y_k} \begin{pmatrix} i_1 \dots i_s \\ k_1 \dots k_\sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 \dots i_s \\ k_1 \dots k_\sigma k \end{pmatrix} - \frac{1}{s} \mathrm{S}_{i_s} \begin{pmatrix} i_s \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \dots i_{s-1} \\ k_1 \dots k_\sigma \end{pmatrix}$$

e quindi abbiamo $\left(\text{osservando al solito che } \frac{1}{s} \sum_{i_1 \dots i_s} \mathrm{S}_{i_s} = \sum_{i_1 \dots i_s}\right)$

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_{s=1}^{\sigma} \sum_{j_1} \sum_{i_1 \dots i_s} ((j_1\,, i_1 \dots i_s)) \begin{pmatrix} j_1 \\ h_1 \dots h_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \dots i_s \\ k_1 \dots k_\sigma\, k \end{pmatrix} - \\ & - \sum_{s=1}^{\sigma} \sum_{j_1} \sum_{i_1 \dots i_s} ((j_1\,, i_1 \dots i_s)) \begin{pmatrix} i_s \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 \\ h_1 \dots h_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \dots i_{s-1} \\ k_1 \dots k_\sigma \end{pmatrix}. \end{aligned} \right.$$

Se poi è $m > 1$ allora, sempre mediante la (15) della Nota precedente, possiamo scrivere (per $s > 1$):

$$\frac{\partial}{\partial y_k} \begin{pmatrix} j_1 \dots j_m \\ h_1 \dots h_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \dots i_s \\ k_1 \dots k_\sigma \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} j_1 \dots j_m \\ h_1 \dots h_\mu\, k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \dots i_s \\ k_1 \dots k_\sigma \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{m} \mathrm{S}_{j_m} \begin{pmatrix} i_m \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 \dots j_{m-1} \\ h_1 \dots h_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \dots i_s \\ k_1 \dots k_\sigma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j_1 \dots j_m \\ h_1 \dots h_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \dots i_s \\ k_1 \dots k_\sigma\, k \end{pmatrix} -$$

$$- \frac{1}{s} \mathrm{S}_{i_s} \begin{pmatrix} i_s \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 \dots j_m \\ h_1 \dots h_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \dots i_{s-1} \\ k_1 \dots k_\sigma \end{pmatrix}$$

e per $s = 1$ una formola simile priva però dell' ultimo termine; per cui la seconda e terza riga di (12) da $m = 1$ sino a $m = \mu$ danno (aggiungendo i termini (13)):

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{s=1}^{\sigma} \sum_{j_1 \dots j_m} \sum_{i_1 \dots i_s} ((j_1 \dots j_m\,, i_1 \dots i_s)) \begin{pmatrix} j_1 \dots j_m \\ h_1 \dots h_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \dots i_s \\ k_1 \dots k_\sigma\, k \end{pmatrix} - \\ & - \sum_{m=2}^{\mu} \sum_{s=1}^{\sigma} \sum_{j_1 \dots j_m} \sum_{i_1 \dots i_s} ((j_1 \dots j_m\,, i_1 \dots i_s)) \begin{pmatrix} j_m \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 \dots j_{m-1} \\ h_1 \dots h_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \dots i_s \\ k_1 \dots k_\sigma \end{pmatrix} - \\ & - \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{s=2}^{\sigma} \sum_{j_1 \dots j_m} \sum_{i_1 \dots i_s} ((j_1 \dots j_m\,, i_1 \dots i_s)) \begin{pmatrix} i_s \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 \dots j_m \\ h_1 \dots h_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \dots i_{-1} \\ k_1 \dots k_\sigma \end{pmatrix}. \end{aligned} \right.$$

A questi termini bisogna poi aggiungere ancora quelli della prima riga di (12) che, con mutamenti di indici, scriveremo così:

$$(15) \quad \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{s=2}^{\sigma+1} \sum_{j_1 \dots j_m} \sum_{i_1 \dots i_s} \frac{\partial}{\partial x_{i_s}} ((j_1 \dots j_m\,, i_1 \dots i_{s-1})) \begin{pmatrix} i_s \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 \dots j_m \\ h_1 \dots h_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \dots i_{s-1} \\ k_1 \dots k_\sigma \end{pmatrix}$$

mentre nella seconda riga di (14) mutando m in $m+1$, s in $s-1$, e ponendo infine i_s in luogo di j_{m+1} [1], si ha

$$(16) \quad - \sum_{m=1}^{\mu-1} \sum_{s=2}^{\sigma-1} \sum_{j_1 \dots j_m} \sum_{i_1 \dots i_s} ((j_1 \dots j_m\, i_s\,, i_1 \dots i_{s-1})) \begin{pmatrix} i_s \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 \dots j_m \\ h_1 \dots h_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \dots i_{s-1} \\ k_1 \dots k_\sigma \end{pmatrix}.$$

[1] Questi cangiamenti possono farsi perchè questi indici sono sottoposti ai sommatori.

Ora i termini dell'ultima riga di (14), di (15) e di (16), estendendo i sommatori da $m=1$ ad $m=\mu$ $\left(\text{cioè scrivendo (16) sotto la forma } -\sum_{m=1}^{\mu}+\sum_{\mu}\right)$ e da $s=2$ ad $s=\sigma$ danno per risultato zero, perchè si raccolgono col fattore

$$\frac{\partial}{\partial x_s}((j_1 \dots j_m\,,\, i_1 \dots i_{s-1})) - ((j_1 \dots j_m\, i_s\,,\, i_1 \dots i_{s-1})) - ((j_1 \dots j_m\,,\, i_1 \dots i_s))$$

che è zero.

Resta quindi (ricordando che bisogna ancora scrivere la terza riga di (12) per $m=\mu+1$):

$$\sum_{m=1}^{\mu} \sum_{j_1 \dots j_m} \sum_{i_1 \dots i_{\sigma+1}} \frac{\partial}{\partial x_{i_{\sigma+1}}} ((j_1 \dots j_m\,,\, i_1 \dots i_\sigma)) \binom{i_{\sigma+1}}{k} \binom{j_1 \dots j_m}{h_1 \dots h_\mu} \binom{i_1 \dots i_\sigma}{k_1 \dots k_\sigma}$$

$$-\sum_{m=1}^{\mu} \sum_{j_1 \dots j_\mu} \sum_{i_1 \dots i_{\sigma+1}} ((j_1 \dots j_m\, i_{\sigma+1}\,,\, i_1 \dots i_\sigma)) \binom{i_{\sigma+1}}{k} \binom{j_1 \dots j_m}{h_1 \dots h_\mu} \binom{i_1 \dots i_\sigma}{k_1 \dots k_\sigma}$$

$$+\sum_{s=2}^{\sigma+1} \sum_{j_1 \dots j_\mu} \sum_{j_1 \dots i_s} ((j_1 \dots j_\mu\, i_s\,,\, i_1 \dots i_{s-1})) \binom{i_s}{k} \binom{j_1 \dots j_\mu}{h_1 \dots h_\mu} \binom{i_1 \dots i_{s-1}}{k_1 \dots k_\sigma}$$

$$-\sum_{s=1}^{\sigma} \sum_{j_1 \dots j_{\mu+1}} \sum_{i_1 \dots i_s} ((j_1 \dots j_{\mu+1}\,,\, i_1 \dots i_s)) \binom{j_1 \dots j_{\mu+1}}{h_1 \dots h_\mu\, k} \binom{i_1 \dots i_s}{k_1 \dots k_\sigma}.$$

I termini della terza e quarta riga si distruggono fra loro, come si vede mutando nella quarta riga s in $s-1$, ponendovi i_s al posto di $j_{\mu+1}$, e tenendo conto che è identicamente

$$\binom{j_1 \dots j_\mu\, i_s}{h_1 \dots h_\mu\, k} = \binom{j_1 \dots j_\mu}{h_1 \dots h_\mu} \binom{i_s}{k}.$$

I termini delle due prime righe, mediante la solita identità (15) della Nota precedente, possono combinarsi a due a due, e scriversi:

$$(17) \qquad \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{j_1 \dots j_m} \sum_{i_1 \dots i_{\sigma+1}} ((j_1 \dots j_m\,,\, i_1 \dots i_{\sigma+1})) \binom{j_1 \dots j_m}{h_1 \dots h_\mu} \binom{i_1 \dots i_{\sigma+1}}{k_1 \dots k_\sigma\, k}$$

e a questi termini bisogna poi infine aggiungere quelli della prima riga di (14). Ora si vede che (17) è ciò che si otterrebbe da tal prima riga di (14) per $s=\sigma+1$, quindi il risultato finale che si ha è che il primo membro di (11) si esprime con una formola come la (10) ma mutandovi σ in $\sigma+1$. Resta così, per induzione, provata la (10) medesima.

Ricordando poi la formola (7) della Nota precedente, ed osservando la (10) resta senz'altro anche provato il teorema enunciato al principio di questo paragrafo.

4. *Formole di trasformazione dei simboli principali.* — Servendoci delle formole (5), (6) e della (10) siamo ora finalmente in grado di scrivere le formole di trasformazione dei simboli principali di prima e seconda specie.

Si hanno le formole:

$$(18)\qquad (h_1 \dots h_\mu\, k)' = \sum_i \sum_j \binom{i}{k}_{xy} \Big[(j_1 \dots j_\mu\, i) \binom{j_1 \dots j_\mu}{h_1 \dots h_\mu}_{xy} + \\ + \}j_1 \dots j_{\mu-1}\, i\{ \binom{j_1 \dots j_{\mu-1}}{h_1 \dots h_\mu}_{xy} + \\ + (j_1 \dots j_{\mu-2}\, i) \binom{j_1 \dots j_{\mu-2}}{h_1 \dots h_\mu}_{xy} + \\ + \dots \dots \dots \Big]$$

con una legge evidente; si alternano al secondo membro i simboli principali di prima specie con quelli di seconda, e l'ultimo termine sarà perciò:

$$(j_1\, i) \binom{j_1}{h_1 \dots h_\mu}_{xy} \qquad \textit{se } \mu \textit{ è dispari}$$

ovvero

$$\}j_1\, i\{ \binom{j_1}{h_1 \dots h_\mu}_{xy} \qquad \textit{se } \mu \textit{ è pari.}$$

Similmente è:

$$(19)\qquad \}h_1 \dots h_\mu\, k\{' = \sum_i \sum_j \binom{i}{k}_{xy} \Big[\}j_1 \dots j_\mu\, i\{ \binom{j_1 \dots j_\mu}{h_1 \dots h_\mu}_{xy} + \\ + (j_1 \dots j_{\mu-1}\, i) \binom{j_1 \dots j_{\mu-1}}{h_1 \dots h_\mu}_{xy} + \\ + \}j_1 \dots j_{\mu-2}\, i\{ \binom{j_1 \dots j_{\mu-2}}{h_1 \dots h_\mu}_{xy} + \\ + \dots \dots \dots \Big].$$

essendo l'ultimo termine

$$\}j_1\, i\{ \binom{j_1}{h_1 \dots h_\mu}_{xy} \qquad \textit{se } \mu \textit{ è dispari}$$

ovvero

$$(j_1\, i) \binom{j_1}{h_1 \dots h_\mu}_{xy} \qquad \textit{se } \mu \textit{ è pari.}$$

Da queste formole e dalle precedenti appare che i trasformati dei simboli secondari si esprimono mediante combinazione lineare degli antichi simboli secondari, e lo stesso fanno per conto loro i nuovi simboli principali mediante gli antichi, ed è in tal senso che bisogna intendere il carattere invariantivo della totalità dei simboli, secondari e principali, al quale abbiamo accennato nell' introduzione.

Servendosi delle precedenti formole di trasformazione, da me comunicategli, il dott. Sinigallia (¹) ha potuto ora dimostrare l' invariantività delle caratteristiche delle matrici costruite con i simboli principali relativi ad una forma differenziale di ordine r, estendendo così un risultato che per il second' ordine io avea trovato in precedenti lavori.

5. *Simboli relativi alle forme differenziali di primo ordine e di r^{mo} grado.* — Se immaginiamo eguali a zero tutte le X di cui il numero degli indici sia inferiore ad r, che è l' ordine della forma differenziale, questa acquista il tipo di una forma differenziale di primo ordine e di r^{mo} grado, mentre d' altra parte è evidente (vedi le (7) della Nota precedente) che le poste relazioni costituiscono una totalità di relazioni di carattere invariantivo.

I simboli principali, da noi sopra introdotti in generale, diventano in questo caso una più diretta, ma naturalmente meno ampia, estensione di quei simboli che per le forme differenziali quadratiche vanno sotto il nome di Christoffel. È facile riconoscere che i simboli principali che non si annullano identicamente sono allora solo quelli contenenti il massimo numero di indici, cioè $r+1$ indici se di prima specie, e r indici se di seconda specie. Questi ultimi si riducono eguali rispettivamente ai coefficienti X stessi, mentre gli altri, che vorremo, per analogia colla notazione adottata pei simboli di Christoffel, indicare col simbolo $\begin{bmatrix} j_1 \cdots j_r \\ i \end{bmatrix}$, risultano

$$\begin{bmatrix} j_1 \cdots j_r \\ i \end{bmatrix} = \frac{\partial X_{j_1 \cdots j_r}}{\partial x_i} - \frac{\partial X_{ij_2 \cdots j_r}}{\partial x_{j_1}} - \frac{\partial X_{ij_1j_3 \cdots j_r}}{\partial x_{j_2}} - \cdots - \frac{\partial X_{ij_1 \cdots j_{r-1}}}{\partial x_{j_r}} .$$

Le formole di trasformazione per questi si potrebbero ricavare come caso particolare da quelle del paragrafo precedente.

Matematica. — *Sulle superficie geodetiche in una varietà qualunque e in particolare nelle varietà a tre dimensioni.* Nota del Corrispondente G. Ricci.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

(¹) Rend. Ist. Lomb. (2), t. 36, 1903.