ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCC.

1903

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1903

Fisiologia — *Analisi dei gas del sangue a differenti pressioni barometriche*. Nota del Socio ANGELO MOSSO e di GIACOMO MARRO.

Fisiologia. — *L'acapnia prodotta nell'uomo dalla diminuita pressione barometrica*. Nota del Socio ANGELO MOSSO e di GIACOMO MARRO.

Fisiologia. — *Le variazioni che succedono nei gas del sangue sulla vetta del Monte Rosa*. Nota del Socio ANGELO MOSSO e di GACOMO MARRO.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sulla rappresentazione delle forme ternarie mediante la somma di potenze di forme lineari*. Nota del prof. FRANCESCO PALATINI, presentata dal Socio SEGRE.

In una recente Nota (¹) ho applicato alla ricerca del minimo numero di cubi con la somma dei quali possa rappresentarsi la cubica quinaria generica, un metodo che, come ho osservato alla fine di quello scritto, lasciava sperare di poter raggiungere risultati di una qualche generalità sul numero di potenze n^{me} necessario e sufficiente per esprimere una forma generica di ordine n. Applicherò ora al caso delle forme ternarie di qualsiasi ordine codesto metodo, che per comodità del lettore qui riassumerò.

Le varietà V di dimensione $r-1$ ed ordine n dello spazio S_r si rappresentino linearmente coi punti di S_m essendo $m=\binom{n+r}{r}-1$. Si consideri in S_m la varietà M di dimensione r ed ordine n^r i cui punti corrispondono alle V ridotte ad iperpiani n-pli e la quale altro non è che la varietà di S_m rappresentata in S_r da tutte le varietà di dimensione $r-1$ e ordine n di questo spazio. Ora l'equazione di una V generica si potrà porre sotto la forma

$$a_1 A_1^n + a_2 A_2^n + \cdots + a_k A_k^n = 0$$

(¹) *Sulla rappresentazione delle forme* ecc., Atti Accad. Torino, 1902.

essendo le A forme lineari di dimensione r fra loro indipendenti, quando (e solo allora) considerando tutti i sistemi lineari della forma

$$\lambda_1 X_1^n + \lambda_2 X_2^n + \cdots + \lambda_k X_k^n = 0$$

essi comprendono tutte le V, cioè, ricorrendo all' anzidetta rappresentazione, quando (e solo quando) gli S_{k-1} che sono k-secanti della M riempiono S_m.

Abbiamo nel caso attuale $r=2$, $m=\frac{n(n+3)}{2}$ e la M è di ordine n^2. Si tratta di vedere se accade che gli spazî determinati ognuno da $\frac{(n+1)(n+2)+\eta}{6}$ punti della M riempiono S_m, dove η deve avere un valor tale che il numeratore riesca multiplo di 6, cioè uno dei valori 0, 4, e noi diremo che deve avere il valore 4ε $(\varepsilon=0, 1)$. Gli spazî in discorso formano un' infinità di dimensione $\frac{(n+1)(n+2)+4\varepsilon}{3}$, quindi, essendo ciascuno di dimensione $\frac{(n+1)(n+2)+4\varepsilon}{6}-1$, contengono complessivamente un numero di punti la cui infinità è di dimensione $\frac{n(n+3)}{2}+2\varepsilon$, cosicchè parrebbe che per ogni punto di S_m ne dovesse passare un numero finito o ∞^2 secondo che è $\varepsilon=0$, $\varepsilon=1$. Senonchè sappiamo già che per $n=2$, $n=4$ non è questa la conclusione cui si arriva, giacchè in questi casi per ogni punto di S_m per cui passa uno degli spazî anzidetti ne passano infiniti, cosicchè nessuno ne passa per un punto generico.

Prendiamo uno dei nostri spazî di dimensione $\frac{(n+1)(n+2)+4\varepsilon}{6}-1$ determinato da $\frac{(n+1)(n+2)+4\varepsilon}{6}$ punti di M e vediamo quanti sono gli spazî congeneri che lo incontrano in un punto. Ricorrendo alla rappresentazione di M coi punti del piano, abbiamo che all' S scelto, cioè all' infinità di dimensione $\frac{(n+1)(n+2)-2\varepsilon}{3}-1$ di iperpiani passanti per esso, corrisponde l' insieme S' di altrettante C^n passanti per gli $\frac{(n+1)(n+2)+4\varepsilon}{6}$ punti del piano che corrispondono a quelli scelti sulla M. Se quell' S ed un altro S_1 s' incontrano in un punto, essi appartengono ad uno spazio Σ di dimensione $\frac{(n+1)(n+2)+4\varepsilon}{3}-2$ che è $\frac{(n+1)(n+2)+4\varepsilon}{3}$ — secante della M, al quale, cioè all' infinità di dimensione $\frac{(n+1)(n+2)-8\varepsilon}{6}$ di iperpiani passanti per esso, corrisponde un sistema Σ' altrettanto infinito di C^n passanti per gli $\frac{(n+1)(n+2)+4\varepsilon}{3}$ punti del piano corrispondenti a quelli in cui la M è segata da Σ. Ma siccome un siffatto numero di punti, se essi sono indipendenti, determina un sistema di C^n di dimensione $\frac{(n+1)(n+2)-8\varepsilon}{6}-1$, così vuol dire che Σ' ha la sovrabbondanza 1. Ora per $n=2, 4, 5$ il grado di un sistema di C^n passanti per $\frac{(n+1)(n+2)+4\varepsilon}{3}$ punti è rispettivamente 0, 6, 11, cioè maggiore di $2p-2$ (essendo p il genere), perciò per un noto teorema [1] il sistema è regolare, il che prova che in siffatti casi non vi sono spazî Σ di dimensione $\frac{(n+1)(n+2)+4\varepsilon}{3}-2$ seganti la M in $\frac{(n+1)(n+2)+4\varepsilon}{3}$ punti. Anche per $n=3$ non possono prendersi 8 punti in modo che le cubiche passanti per 7 di essi passino di conseguenza anche per l'ottavo. Dalle considerazioni che ora faremo, s'intenderanno esclusi questi casi.

Ogni Σ passante per un S incontra M, oltre che nei $\frac{(n+1)(n+2)+4\varepsilon}{6}$ punti che questa ha in comune con S, in altri $\frac{(n+1)(n+2)+4\varepsilon}{6}$ punti i quali determinano un S_1 della stessa specie di S e ad esso incidente. Se l'infinità dei Σ passanti per un S generico è uguale alla dimensione di questo aumentata di 2ε, vorrà dire che per ogni suo punto generico non può passare che un numero $\infty^{2\varepsilon}$ ($\infty^0=$ numero finito) di spazî S_1; in altre parole si ha allora che per ogni punto (generico) di S_m per il quale passa un S passa al più un numero $\infty^{2\varepsilon}$ di spazî siffatti, quindi gli S riempiono S_m e perciò la forma ternaria generica di grado n è rappresentabile mediante la somma delle potenze n^{me} di $\frac{(n+1)(n+2)+4\varepsilon}{6}$ forme lineari.

Il fatto di essere l'infinità dei Σ passanti per un S generico uguale alla dimensione di questo aumentata di 2ε, avverrà quando nel piano l'infinità dei sistemi Σ' formati dalle C^n passanti per $\frac{(n+1)(n+2)+4\varepsilon}{6}$ punti generici sia uguale a $\frac{(n+1)(n+2)+4\varepsilon}{6}-1+2\varepsilon$.

P. e. per $n=7$ ($\varepsilon=0$) si abbiano 12 punti generici ed un sistema Σ' di curve C^7 passanti per essi e per altri 12 punti in modo che il sistema (dotato di 24 punti base semplici) abbia la sovrabbondanza 1. Allora considerando la cubica determinata da 9 dei primi 12 punti, una quartica che

[1] Segre, *Sui sistemi lineari* ecc., Rend. Circ. mat. di Palermo, t. I.

passi per i secondi 12 e per 2 dei rimanenti 3 passa anche per il terzo, dovendo ogni C^7 che passa per 23 dei punti dati passare anche per il 24mo. Si vede subito di qui, variando convenientemente i 9 punti che si sono scelti per determinare la cubica, che i 24 punti base di Σ' trovansi sopra una quartica; siccome poi per questi passano sempre delle sestiche [1], così risulta che essi sono la completa intersezione di una quartica con una sestica. Reciprocamente poi, per un ben noto teorema di Cayley, ogni gruppo di 24 punti che sia l'intersezione di una quartica ed una sestica è tale che ogni C^7 passante per 23 di essi passa pure per il rimanente. Presa dunque una C^4 passante per i 12 punti dati, le C^6 passanti per questi vi segano una serie lineare g^9_{24} ad ogni gruppo della quale corrisponde un sistema Σ' e siccome sono ∞^2 le C^4 che consideriamo, così è 11 l'infinità dei sistemi Σ' (passanti per i 12 punti dati), cioè precisamente $\frac{(n+1)(n+2)+4\varepsilon}{6}-1+2\varepsilon$. Lo stesso ragionamento si applica al caso di $n=8$ $(\varepsilon=0)$ nel quale la base di un Σ' risulta come intersezione di una C^5 ed una C^6, ed a quello di $n=6$ $(\varepsilon=1)$ nel quale la base di un Σ' è l'intersezione di una C^4 con una C^5, ed in entrambi questi casi si trova che l'infinità dei Σ' passanti per $\frac{(n+1)(n+2)+4\varepsilon}{6}$ punti generici è $\frac{(n+1)(n+2)+4\varepsilon}{6}-1+2\varepsilon$. Possiamo dunque concludere che per $n=6$, 7, 8 la forma ternaria generica di grado n è rappresentabile con la somma delle potenze n^{me} di $\frac{(n+1)(n+2)+4\varepsilon}{6}$ forme lineari.

Passando ad $n=9$ $(\varepsilon=1)$, applicando un metodo sviluppato dal sig. F. S. Macaulay [2] abbiamo che un sistema Σ' di curve C^9 con 38 punti base semplici ha la sovrabbondanza 1, quando quei 38 punti sono le intersezioni di due C^7 passanti entrambi per gli stessi 11 punti di una conica. Vediamo quanti sono i sistemi Σ' passanti per $\frac{(n+1)(n+2)+4\varepsilon}{6}=19$ punti dati generici. Per aver la base di un Σ' bisogna fissare una conica e su essa 11 punti e condurre per questi due C^7 le quali si taglieranno ulteriormente nella base cercata di 38 punti. Per gli 11 punti ora detti passano ∞^{24} C^7 formanti ∞^{48} coppie; variando gli 11 punti sulla conica e poi variando questa, di

(1) È una generica di queste sestiche non contiene la C^4 come parte, giacchè il suo passaggio per i 24 punti è determinato dal passaggio per 21 dei medesimi. Difatti condotta una retta per 2 dei 24 punti, una sestica passante per 21 dei rimanenti 22 passa anche per il ventiduesimo, ed essa passa per tutti e 24, come si vede variando opportunamente la retta. Considerazioni analoghe valgono per i casi che verranno menzionati poco sotto.

(2) *Point-Groups in relation to Curves*, n. 26. Proc. of the London Math. Soc., vol. XXVI, 1895.

tali coppie ne otteniamo ∞^{64}. Però per 38 punti siffatti passano ∞^3 C^7 (perchè per 5 di essi passa una conica e le C^7 passanti per 32 dei rimanenti 33 passano per tutti i 38 [1] e formano un sistema ∞^3) che danno luogo ad ∞^6 coppie, cosicchè i sistemi Σ' in tutto sono ∞^{58}, quindi l'infinità di quelli che passano per 19 punti generici dati è $20 = \frac{(n+1)(n+2)+4\varepsilon}{6} - 1 + 2\varepsilon$.

Parimenti per $n = 10, 11, 12, 13, 14, 15 \ldots\ldots$ è applicabile lo stesso metodo e si trova che la base di un sistema Σ' è data dall'intersezione rispettivamente di due C^7, C^8, C^9, C^{10}, di una C^{10} con una C^{12}, di una C^{11} con una $C^{13}, \ldots\ldots$ passanti rispettivamente per 5 punti collineari, per 12 punti di una conica, per 19 di una cubica, per 30 di una quartica, per 40 di una quintica, per 51 di una sestica...... e sempre si trova con lo stesso procedimento tenuto per $n = 9$ che l'infinità dei Σ' passanti per $\frac{(n+1)(n+2)+4\varepsilon}{6}$ punti generici dati è $\frac{(n+1)(n+2)+4\varepsilon}{6} - 1 + 2\varepsilon$.

Passando al caso di n qualunque, ed applicando il citato metodo del Macaulay, sia C^{n-k} la minima curva passante per $N = \frac{(n+1)(n+2)+4\varepsilon}{3}$ punti semplici formanti la base di un sistema Σ' di sovrabbondanza 1, sì che le C^{n-k} passanti per il gruppo N formino un sistema di dimensione maggiore di zero (come avviene p. e. per $n = 9, 10, 11, 12, 13$), per cui sarà

$$(1) \qquad \frac{k(k+3)}{2} + \frac{(n-k)(n-k+3)}{2} > \frac{(n+1)(n+2)+4\varepsilon}{3} - 1$$

donde

$$(1') \qquad k(n-k) < \frac{(n+1)(n+2)-8\varepsilon}{6}$$

e precisamente k è il massimo valore non superiore ad $\frac{n}{2}$ che soddisfa questa relazione.

La base di un sistema Σ' si compone di $N = \frac{(n+1)(n+2)+4\varepsilon}{3}$ punti che sono l'intersezione di due C^{n-k} passanti per $N' = (n-k)^2 - \frac{(n+1)(n+2)+4\varepsilon}{3}$ punti di una $C^{l+m-n-3}$ $(l = m = n-k) \equiv C^{n-2k-3}$. Dopo ciò procedendo in modo identico a quello tenuto per $n = 9$, si può constatare che in virtù delle (1), (1') nessuna delle operazioni geometriche che si presentano offre mai particolarità tali da far modificare in qualche punto le conclusioni cui quel procedimento conduceva per $n = 9$, e si trova

[1] V. il ragionamento fatto per $n = 7$.

precisamente che l'infinità dei sistemi Σ' passanti per $\frac{(n+1)(n+2)+4\varepsilon}{6}$ punti generici dati è $\frac{(n+1)(n+2)+4\varepsilon}{6}-1+2\varepsilon$.

Se poi per il gruppo N passa una sola C^{n-k} (come avviene p. e. per $n=14, 15$), nel qual caso è

$$(2) \qquad k(n-k)=\frac{(n+1)(n+2)-8\varepsilon}{6}$$

e se è C^{n-k+h} la minima curva passante per N e non contenente C^{n-k} come parte, si ottiene la base di un sistema Σ' come intersezione di una C^{n-k} ed una C^{n-k+h} passanti entrambi per $N'=(n-k)(n-k+h)-\frac{(n+1)(n+2)+4\varepsilon}{3}$ punti di una $C^{l+m-n-3}=C^{n-2k+h-3}$, $(m=n-k,\ l=n-k+h)$. Dopo ciò, sempre con lo stesso procedimento, si trova che l'infinità dei Σ' passanti per $\frac{(n+1)(n+2)+4\varepsilon}{6}$ punti generici dati è $\frac{(n+1)(n+2)+4\varepsilon}{3}-k(n-k)-1$, il qual numero, in virtù della (2), è appunto eguale a $\frac{(n+1)(n+2)+4\varepsilon}{6}-1+2\varepsilon$.

Dopo ciò possiamo concludere: *Per $n>5$ la forma ternaria generica di ordine n è rappresentabile in $\infty^{2\varepsilon}$ modi* ($\infty^0=$ numero finito) *mediante la somma delle potenze n^{me} di $\frac{(n+1)(n+2)+4\varepsilon}{6}$ forme lineari, essendo $\varepsilon=0$ od $\varepsilon=1$ secondo che n non è od è multiplo di 3.*

Dei casi che si hanno per $n\leq 5$ ci conviene trattare soltanto quello di $n=5$ essendo ben noti gli altri. La M è in questo caso una superficie di ordine 25 di S_{20} ed è $\frac{(n+1)(n+2)+4\varepsilon}{6}=7$. Alle cubiche del piano corrispondono in M delle C^{15} normali appartenenti a spazî S_{14}. Fissiamo un S_6 determinato da 7 punti della M per i quali passa una rete di C^{15} e quindi per quel S_6 passano ∞^2 dei nostri S_{14}. L'S_{14} di una C^{15} generica della M incontrerà S_6 in un punto A che sarà un punto generico di S_6 (gli S_{14} sono ∞^9, quindi per ogni punto generico di S_6 ne passeranno ∞^3; tuttavia si potrebbe dubitare che A non sia un punto generico di M, che cioè le intersezioni di S_6 coi nostri S_{14} diversi da quelli passanti per esso si accentrino in certi punti di S_6 per ognuno dei quali ne passerebbe allora un'infinità di dimensione maggiore di 3; in tal caso si ha senz'altro che per ogni punto generico di S_6 non passa alcun altro spazio congenere) e gli ∞^3 S_{14} (contenenti curve C^{15}) passanti per A sono quelli cui appartengono le curve del sistema triplo determinato dalla C^{15} e dalla rete considerate. Fra questi ∞^3 S_{14} non ve ne sono ∞^2 passanti per un altro S_6 7-secante di M, od in altre parole nel considerato sistema triplo di C^{15} non vi è un' altra rete come quella fissata sopra. Basta perciò osservare che data nel piano una rete (C) di cubiche passanti per 7 punti ed un' altra cubica generica C_1, il sistema triplo che ne riesce determinato non contiene un' altra rete come la (C). Difatti siccome la C_1 per ipotesi non passa per alcun punto della base di (C), lo stesso avviene per ogni curva del sistema la quale non appartenga a (C). Ora una qualunque rete del sistema, diversa da (C), è determinata da un fascio di (C) e da una curva C_2, non appartenente a (C), ed essa non è certo formata da curve passanti per 7 punti fissi perchè questi dovrebbero trovarsi fra i 9 punti base del fascio e perciò dovrebbero fra essi trovarsi anche alcuni dei 7 punti base della (C) (almeno 5), mentre la C_2 abbiamo visto che non passa per nessuno di questi. Ne segue che per ogni punto generico di un S_6 7-secante di M non passa alcun altro spazio siffatto, il che vuol dire che gli S_6 7-secanti di M riempiono S_{20} per ogni punto generico del quale ne passa uno. Dunque: *La forma ternaria quintica generica è rappresentabile, ed in un solo modo, con la somma delle quinte potenze di 7 forme lineari.*

Osserverò, nel chiudere questo scritto, che attualmente si può già prevedere che l' impossibilità di rappresentare una forma *s*-aria generica con la somma di potenze di forme lineari contenenti un numero di costanti non inferiore a quello contenuto nella forma considerata, si avrà soltanto in casi particolari. Di questi uno solo mi si è presentato, oltre a quelli già noti, e vale, per la sua importanza, la pena di accennarlo: è quello della quartica quinaria ($r = 4$, $n = 4$, $m = 69$) che contiene 70 costanti. Consideriamo in S_{69} gli S_{13} 14 secanti della M, i quali complessivamente hanno ∞^{70} punti. Siccome 14 punti di S_4 vi determinano una quadrica, così i nostri S_{13} appartengono agli spazî contenenti le varietà di M corrispondenti alle quadriche di S_4. Ora nel sistema di tutte le V_3^4 ve ne sono ∞^{14} che contengono una data Q_3^2, quindi la dimensione della serie segata dalle V_3^4 in Q_3^2 è 54, il che vuol dire che gli spazî cui appartengono in S_{69} le varietà di M corrispondenti alle quadriche di S_4 sono di dimensioni 54, per cui i nostri S_{13} essendo contenuti in questi, che complessivamente hanno ∞^{68} punti, non riempiono S_{69}. Ne deriva: *La forma quartica quinaria generica non è rappresentabile con la somma delle quarte potenze di 14 forme lineari.*