ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCC.

1903

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1903

Meccanica. — *Sulle vibrazioni trasversali di una lamina, che dipendono da due soli parametri.* Nota del dott. G. BISCONCINI, presentata dal Socio VOLTERRA.

1. Seguendo le orme di una Memoria del prof. Levi-Civita [1] e approfittando in buona parte dei risultati ivi racchiusi, ci siamo proposti, data l'equazione

$$(1) \qquad \square w \equiv \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

di determinare la forma di tutte le possibili sostituzioni

$$\varrho_1 = \varrho_1 (x , y , t) \quad , \quad \varrho_2 = \varrho_2 (x , y , t)$$

tali, che, posto arbitrariamente

$$\varrho_3 = \varrho_3 (x , y , t) ,$$

(colla sola condizione, che le funzioni ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 sieno indipendenti) ed espressa la (1) mediante $\varrho_1 , \varrho_2 , \varrho_3$, la equazione trasformata, posto in essa $\dfrac{\partial w}{\partial \varrho_3} = 0$ e moltiplicata al più per un conveniente fattore dipendente da ϱ_3, non contenga più esplicitamente questa variabile.

La funzione w definita dall'equazione $\overline{\square w} = 0$, così ottenuta, risulta dunque una funzione dei soli parametri ϱ_1, ϱ_2.

Ricordando poi, che l'equazione (1) definisce, scelta convenientemente l'unità di tempo, le vibrazioni trasversali di una membrana, risulta giustificato il significato attribuito ai risultati ottenuti, quale apparisce dal titolo della presente Nota.

2. Osserviamo intanto, che, considerata l'equazione dei potenziali

$$(1') \qquad \underset{2}{\Delta} w \equiv \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$$

ed eseguita la trasformazione:

$$\varrho_1 = \varrho_1 (x , y , z) \quad , \quad \varrho_2 = \varrho_2 (x , y , z) \quad , \quad \varrho_3 = \varrho_3 (x , y , z) ,$$

è possibile ottenere, col procedimento più sopra indicato, una equazione $\overline{\underset{2}{\Delta} w} = 0$, che definisca w come funzione delle sole ϱ_1 e ϱ_2, solo quando la con-

[1] *Tipi di potenziali, che si possono far dipendere da due sole coordinate.* (Mem. della R. Accad. delle Scienze di Torino, s. II, Tom. XLIX, a. 1899).

gruenza $\varrho_1 = \text{cost.}$, $\varrho_2 = \text{cost.}$ sia isotròpa o risulti costituita dalle traiettorie di un gruppo ∞^1 di similitudini [1].

Potremo poi asserire, che, siccome dalla (1) si passa alla (1') collo scambio di z in it, così, se $\varrho_1 = \varrho_1(x, y, z)$, $\varrho_2 = \varrho_2(x, y, z)$ costituiscono l'integrale generale di una congruenza equipotenziale, le equazioni $\varrho_1 = \varrho_1(x, y, it)$, $\varrho_2 = \varrho_2(x, y, it)$ definiscono, indipendentemente dalla condizione di realità, i parametri ϱ_1 e ϱ_2, dai quali soltanto dipenderanno le vibrazioni trasversali della lamina [2].

Operando in tal guisa, risulta immediatamente, che l'equazione dei potenziali isotròpi $\frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_2^2} = 0$ è anche l'equazione delle vibrazioni, che nel caso corrispondente dipendono solo da ϱ_1 e ϱ_2.

Nei rimanenti casi abbiamo dovuto iniziare la ricerca dei sottogruppi ∞^1 reali del gruppo G_7 delle similitudini nello spazio $ds^2 = dx^2 + dy^2 - dt^2$, le cui trasformazioni infinitesime sono (usando delle notazioni ben note del Lie):

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x} = p \ , \ X_2 f = \frac{\partial f}{\partial y} = q \ , \ X_3 f = \frac{\partial f}{\partial t} = s \ , \ Uf = xp + yp + ts \ ,$$

$$S_1 f = ys + tp \ , \ S_2 f = tp + xs \ , \ S_3 f = xq - yp \ ,$$

coll'avvertenza di considerare equivalenti due sottogruppi ∞^1 riducibili l'uno all'altro soltanto mediante due trasformazioni di G_7 non involgenti in ufficio scambievole le tre variabili x, y, t [3].

Scartati inoltre i sottogruppi, le equazioni delle cui traiettorie non risultavano indipendenti rispetto alle variabili x, y (condizione, che come apparisce subito, è essenziale), abbiamo trovato di dover ritenere distinti i sottogruppi ∞^1 definiti dalle seguenti trasformazioni infinitesime:

$$X_1 f + c\, X_3 f \quad (c \neq 0) \quad , \quad Uf \ ;$$

$$q + S_2 f \ , \ c\, Uf + S_2 f \ , \ s \pm Uf + S_2 f \ , \ p \pm Uf + S_2 f \ ;$$

$$c\, Uf + S_3 f - S_1 f \ , \ s + S_3 f - S_1 f \ , \ p + S_3 f - S_1 f \ ;$$

$$c\, Uf + S_3 f \quad (c \neq 0) \quad , \quad s + S_3 f \ ;$$

nelle quali il parametro c è essenziale.

(1) Loc. cit. § 8, pag. 149.

(2) Se ϱ_1 e ϱ_2 non fossero reali, si potrà sempre sostituire ad essi altri parametri ϱ'_1, ϱ'_2, funzioni soltanto di ϱ_1 e ϱ_2, i quali risultino reali.

(3) È ovvia la ragione di questa avvertenza: nel caso attuale infatti la variabile t sta a rappresentarci il tempo, che non si può trattare nello stesso modo come le variabili di spazio x e y.

3. Integrate le equazioni differenziali corrispondenti, e trasformata la equazione $\square w = 0$ come è stato indicato al n. 1, abbiamo trovato nei diversi casi enumerati come equazioni delle vibrazioni della lamina, le seguenti:

$$\text{(I)} \qquad \overline{\square w} \equiv (c^2 - 1)\frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_2^2} = 0\,,$$

dove:

$$\varrho_1 = cx - t \quad , \quad \varrho_2 = y\,.$$

$$\text{(II)} \qquad \overline{\square w} \equiv \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_1^2} - \frac{1}{\mathrm{sen}^2\, i\varrho_1}\frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_2^2} + i \,\mathrm{cotg}\, i\,\varrho_1 \frac{\partial w}{\partial \varrho_1} = 0\,,$$

$$\varrho_1 = \frac{1}{i}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{it} \quad , \quad \varrho_2 = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{y}{x}\,.$$

$$\text{(III)} \qquad \overline{\square w} \equiv \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_1^2} - \left(1 + \frac{1}{\varrho_1^2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_2^2} + \frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial w}{\partial \varrho_1} = 0\,,$$

$$\varrho_1 = \sqrt{t^2 - x^2}\,, \quad \varrho_2 = y + \log\sqrt{\frac{t-x}{t+x}}$$

$$\text{(IV)} \qquad \overline{\square w} \equiv \left(1 - \frac{c^2}{\mathrm{sen}^2\, i\varrho_2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_1^2} - \frac{1}{\varrho_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_2^2} + \frac{1}{\varrho_1}\left(2 - \frac{c^2}{\mathrm{sen}^2\, i\varrho_2}\right)\frac{\partial w}{\partial \varrho_1} - \frac{1}{\varrho_1^2}\, i\,\mathrm{cotg}\, i\varrho_2 \frac{\partial w}{\partial \varrho_2} = 0\,,$$

$$\varrho_1 = \sqrt{x^2+y^2-t^2}\left(\frac{t+x}{t-x}\right)^{\frac{c}{2}} \varrho_2 = \frac{1}{i}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{\sqrt{x^2-t^2}}{y}\,.$$

$$\text{(V)} \qquad \overline{\square w} \equiv 4\varrho_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_1^2} + \varrho_2^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_2^2} - 2\varrho_2(2\varrho_1 - 1)\frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_1\, \partial \varrho_2} + 6\varrho_1 \frac{\partial w}{\partial \varrho_1}\,,$$

$$\varrho_1 = \frac{2(x \pm t) + 1}{4y^2} \quad , \quad \varrho_2 = y\, e^{x \mp t}\,.$$

$$\text{(VI)} \qquad \overline{\square w} \equiv 4\varrho_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_1^2} + \varrho_2^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_2^2} + 2\varrho_2(2\varrho_1 + 1)\frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_1\, \partial \varrho_2} - 6\varrho_1 \frac{\partial w}{\partial \varrho_1} = 0\,,$$

$$\varrho_1 = \frac{2(x \pm t) + 1}{4y^2} \quad , \quad \varrho_2 = y\, e^{-x \mp t}\,.$$

$$\text{(VII)} \qquad \overline{\square w} \equiv 2\varrho_1 \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_1^2} - c^2 \varrho_2^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_2^2} + 2\varrho_2 \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_1\, \partial \varrho_2} + \frac{\partial w}{\partial \varrho_1} - c^2 \varrho_2 \frac{\partial w}{\partial \varrho_2} = 0\,,$$

$$\varrho_1 = \frac{x^2 + y^2 - t^2}{2(x+t)^2} \quad , \quad \varrho_2 = (x+t)\, e^{\frac{cy}{x+t}}\,.$$

$$\text{(VIII)} \qquad \overline{\square w} \equiv \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_1^2} - \frac{\varrho_1 - 1}{4}\frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_2^2} = 0\,,$$

$$\varrho_1 = (x+t)^2 + 2y \quad , \quad \varrho_2 = \frac{1}{3}(x+t)^3 + y(x+t) - x\,.$$

$$\text{(IX)} \qquad \overline{\Box w} \equiv \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_1{}^2} - \frac{\varrho_1 + 1}{4} \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_2{}^2} = 0\,,$$

$$\varrho_1 = (x+t)^2 + 2y \quad , \quad \varrho_2 = \frac{1}{3}(x+t)^3 + y\,(x+t) + t\,.$$

$$\text{(X)} \quad \overline{\Box w} \equiv \left(1 + \frac{c^2}{\operatorname{sen}^2 i\,\varrho_2}\right) \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_1{}^2} - \frac{1}{\varrho_1{}^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_1{}^2} + \frac{1}{\varrho_1}\left(2 + \frac{c^2}{\operatorname{sen}^2 i\,\varrho_2}\right) \frac{\partial w}{\partial \varrho_1} -$$

$$- \frac{1}{\varrho_1{}^2}\, i \operatorname{cotg} i\,\varrho_2 \frac{\partial w}{\partial \varrho_2} = 0\,,$$

$$\varrho_1 = \sqrt{x^2 + y^2 - t^2}\left(\frac{x+iy}{x-iy}\right)^{\frac{ic}{2}}, \quad \varrho_2 = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t}\,.$$

$$\text{(XI)} \qquad \overline{\Box w} \equiv \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_1{}^2} + \left(\frac{1}{\varrho_1{}^2} - 1\right) \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_2{}^2} + \frac{1}{\varrho_1} \frac{\partial w}{\partial \varrho_1} = 0\,,$$

$$\varrho_1 = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad \varrho_2 = t + \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}\,.$$

Notiamo, che per valori particolari della costante, ch'entra in qualcuno dei sottogruppi, potrà essere opportuno sostituire ai parametri ϱ_1 e ϱ_2 certe loro combinazioni opportunemente scelte, e trasformare l'equazione $\Box w = 0$ servendosi di esse, anzichè porre quel valore particolare nella equazione corrispondente $\overline{\Box w} = 0$. Così p. es., se nel caso (VII) per $c = 0$ si scelgono le variabili ϱ_1, ϱ_2 date dalle equazioni:

$$\varrho_1 = x + t\,, \qquad \varrho_2{}^2 = x^2 + y^2 - t^2\,,$$

anzichè quelle date dalle equazioni $\varrho_1 = \dfrac{x^2 + y^2 + t^2}{2\,(x+t)}$, $\varrho_2 = x + t$, (che si deducono dalle formule generali ponendo $c = 0$) si trova come equazione delle vibrazioni

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_2{}^2} + 2\varrho_1 \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_1\, \partial \varrho_2} + 2 \frac{\partial w}{\partial \varrho_2} = 0\,,$$

che s'integra immediatamente e porge $w = \mathrm{F}(\varrho_1) + \dfrac{1}{\varrho_1} \mathrm{F}_2 (\log \sqrt{\varrho_1} - \varrho_2)$, F_1 ed F_2 essendo simboli di funzioni arbitrarie.

4. Per esaurire la questione ci manca da considerare le congruenze di linee di lunghezza nulla nello spazio $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

Questo caso escluso a priori nella Memoria del Levi-Civita non si poteva escludere nel caso attuale, perchè a quelle congruenze corrispondono in generale congruenze reali nello spazio $ds^2 = dx^2 + dy^2 - dt^2$.

Ci risparmiamo di riportare qui i calcoli eseguiti; solo diremo che, seguendo in questo caso la strada battuta dal Levi-Civita per determinare la condizione, cui doveva soddisfare una congruenza di linee $X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}+$ $+Z\frac{\partial f}{\partial z}=0$ per essere equipotenziale, siamo potuti arrivare al seguente risultato:

L'equazione delle vibrazioni, che dipendono da due soli parametri è:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_2^2}+\frac{2}{\varrho_2}\frac{\partial w}{\partial \varrho_2}=0,$$

il cui integrale generale è $w=\psi(\varrho_1)+\frac{1}{\varrho_2}\chi(\varrho_1)$, le variabili ϱ_1 e ϱ_2 essendo definite dalle equazioni:

$$x\cos\varrho_1+y\,\mathrm{sen}\,\varrho_1-\varphi(\varrho_1)=t,$$

$$\varrho_2+x\,\mathrm{sen}\,\varrho_2-y\cos\varrho_1+\frac{d}{d\varrho_1}\varphi(\varrho_1)=0,$$

dove con φ,ψ,χ si indichino delle funzioni arbitrarie.

Radiotelegrafia. — *Relazione sommaria sull'esperimento di radiotelegrafia sintonica eseguito a Spezia fra le stazioni di S. Vito, Palmaria e Livorno* (1), presentata dal Socio BLASERNA.

Per lo sviluppo crescente della rete radiotelegrafica, allo scopo di evitare il reciproco disturbo delle stazioni, si è imposta la necessità di esperimentare, sia i dispositivi tendenti a ridurre l'energia delle onde emesse dal radiatore delle stazioni di secondaria importanza, sia i dispositivi relativi alla sintonizzazione con apparecchi già forniti dal Marconi alla R. Marina e provveduti di due toni, l'uno detto tono A, della portata di 150 Km., e l'altro tono B della portata di 300.

Perciò il capitano di corvetta Bonomo, direttore delle esperienze radiotelegrafiche della R. Marina, concretò un programma di esperienze, affidandone lo svolgimento al tenente di vascello Villarey.

Gli esperimenti si svolsero a Spezia fra le stazioni di S. Vito, Palmaria e Livorno, queste ultime due distanti dalla prima rispettivamente 5 e 70 Km.

Gli apparati che si sono adoperati sono quelli forniti recentemente dal Marconi alla R. Marina, con i quali per ottenere il tono A, e cioè quello

(1) Comunicazione del Ministero della Marina. Direzione Generale di artiglieria ed armamenti.