ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCC.

1903

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XII.

1° Semestre.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1903

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 giugno 1903.

P. Villari, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Una classe di covarianti simultanei di una forma differenziale di ordine qualunque, e di una alle derivate parziali.* Nota III del Corrispondente Ernesto Pascal.

Questa Nota fa seguito alle altre due da me pubblicate da poco tempo in questi medesimi Rendiconti (1).

I simboli introdotti nella Nota II, e che abbiamo chiamati, per ragioni dette a suo luogo, *simboli a carattere invariantivo*, hanno, fra le altre, anche la notevole proprietà che mediante essi si esprimono i coefficienti di tutta una importante classe di covarianti, che nella presente Nota imprenderemo a studiare, essendo essi che si presentano nel problema della riduzione di Pfaff per le forme differenziali di ordine qualunque.

Nella costruzione che faremo dell' anzidetta classe, questa ci apparirà poi come avente per ultimo rappresentante quell' invariante di cui abbiamo già fatto osservare l' esistenza sin dall' anno passato in una Nota presentata all' Istituto Lombardo (2), e donde, come già dicemmo, abbiamo preso le mosse nelle presenti ricerche.

(1) Rend. della R. Acc. dei Lincei (5), t. XII, 1903, 1° sem., pagg. 325-332 e 365-377.
(2) Rend. Ist. Lomb. (2), t. 35, 1902, pagg. 691-700.

1. *I covarianti evidenti connessi alla forma data e formole relative.* — Data la forma differenziale di ordine r, i cui coefficienti sono le X ad uno, due, tre, ... r indici, le altre forme differenziali di ordini $r-1, r-2, \ldots 2, 1$, i cui coefficienti sono rispettivamente le stesse X sino a quelle ad $r-1$ indici, le stesse sino a quelle ad $r-2$ indici, e così di seguito, sono tutte covarianti della data, come si riconosce a colpo d'occhio, osservando le formole (7) della Nota I, dalle quali apparisce che una trasformata (cioè una Y) a μ indici si esprime mediante le antiche X che hanno un numero eguale o minore di indici. Questi covarianti li chiameremo perciò *i covarianti evidenti connessi alla forma data*, e li indicheremo con $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots X^{(r-1)}$, conservando così la notazione introdotta colla formola (1) della Nota I; essi formano una successione di cui l'ultimo rappresentante può ritenersi che sia $X^{(r)}$, cioè la forma stessa.

Vogliamo ora cominciare a trovare una formola riguardante il differenziale di una $X^{(s)}$ qualunque della predetta successione.

Si ha:

$$dX^{(s)} = d\sum_{m=1}^{s}\sum_{j_1\ldots j_m} X_{j_1\ldots j_m}\,\delta^{(s)}_{j_1\ldots j_m} =$$

$$= \sum_{m=1}^{s}\sum_{j_1\ldots j_m}\sum_{i}\frac{\partial X_{j_1\ldots j_m}}{\partial x_i}\,\delta^{(s)}_{j_1\ldots j_m} + \sum_{m=1}^{s}\sum_{j_1\ldots j_m} X_{j_1\ldots j_m}\,d\,\delta^{(s)}_{j_1\ldots j_m}$$

e adoperando le formole (16) e (17) della Nota I, possiamo scrivere:

$$dX^{(s)} = \sum_{m=1}^{s}\sum_{j_1\ldots j_m}\sum_{i}\frac{\partial X_{j_1\ldots j_m}}{\partial x_i}\,\delta^{(s)}_{j_1\ldots j_m} + \sum_{m=1}^{s}\sum_{j_1\ldots j_m} X_{j_1\ldots j_m}\,\delta^{(s+1)}_{j_1\ldots j_m} -$$

$$-\sum_{m=2}^{s}\sum_{j_1\ldots j_m} X_{j_1\ldots j_m}\,dx_{j_m}\,\delta^{(s)}_{j_1\ldots j_{m-1}}.$$

Mutando nell'ultimo termine m in $m+1$, ponendovi $j_{m+1}\equiv i$, e aggiungendo e togliendo il termine

$$\sum_{j_1\ldots j_{s+1}} X_{j_1\ldots j_{s+1}}\,\delta^{(s+1)}_{j_1\ldots j_{s+1}}$$

e osservando che

$$dx_{j_{s+1}}\,\delta^{(s)}_{j_1\ldots j_s} = \delta^{(s+1)}_{j_1\ldots j_{s+1}}$$

si ha infine la formola:

(1) $$dX^{(s)} = X^{(s+1)} + X^{(s,1)}$$

introducendo la notazione

$$X^{(s,1)} = \sum_{m=1}^{s} \sum_{j_1 \dots j_m} \left[\sum_i \left(\frac{\partial X_{j_1 \dots j_m}}{\partial x_i} - X_{j_1 \dots j_m i} \right) dx_i \right] \delta^{(s)}_{j_1 \dots j_m}$$

$$= \sum_{m=1}^{s} \sum_{j_1 \dots j_m} \left[\sum_i ((j_1 \dots j_m , i)) \, dx_i \right] \delta^{(s)}_{j_1 \dots j_m}$$

in cui la doppia parentesi sta a indicare uno dei noti simboli introdotti nella Nota II.

La $X^{(s,1)}$ non è altro in sostanza che ciò che si ottiene da $X^{(s)}$, quando al posto dei coefficienti $X_{j_1 \dots j_m}$ si sostituiscono le forme differenziali di primo ordine:

$$(3) \qquad \sum_i ((j_1 \dots j_m , i)) \, dx_i \, .$$

Dalla formola (1) ora per induzione otterremo la formola per il differenziale qualunque p^{mo} di $X^{(s)}$.

Ponendo in generale

$$(4) \qquad X^{(s,p)} = \sum_{m=1}^{s} \sum_{\nu=1}^{p} \sum_{j_1 \dots j_m} \sum_{i_1 \dots i_\nu} ((j_1 \dots j_m , i_1 \dots i_\nu)) \, \delta^{(s)}_{j_1 \dots j_m} \delta^{(p)}_{i_1 \dots i_\nu}$$

dico che si ha:

$$(5) \qquad d^p X^{(s)} = \sum_{q=0}^{p} \binom{p}{q} X^{(s+p-q,\, q)}$$

dove per $X^{(m,0)}$ *si intende semplicemente* $X^{(m)}$.

Per dimostrare la (5) basterà trovare la formola per il differenziale di (4). Ora si vede che la (4) si ottiene da $X^{(s)}$ ponendo al posto dei coefficienti $X_{j_1 \dots j_m}$ le forme differenziali di primo ordine

$$(6) \qquad \sum_{\nu=1}^{p} \sum_{i_1 \dots i_\nu} ((j_1 \dots j_m , i_1 \dots i_\nu)) \, \delta^{(p)}_{i_1 \dots i_\nu}$$

che indicheremo col simbolo $X^{(0,p)}_{j_1 \dots j_m}$.

Per trovare quindi il differenziale di (4) si potrà servirsi di una formola come la (1), intendendo però che i simboli in parentesi doppia che compaiono in $X^{(s,1)}$ devono essere sostituiti da quelli formati colle quantità (6). Si ha:

$$dX^{(s,p)} = X^{(s+1,p)} + \sum_{m=1}^{s} \sum_{j_1 \dots j_m} \left[\sum_i \left(\frac{\partial X^{(0,p)}_{j_1 \dots j_m}}{\partial x_i} - X^{(0,p)}_{j_1 \dots j_m i} \right) dx_i \right] \delta^{(s)}_{j_1 \dots j_m}$$

Intanto, tenendo conto di (6),

$$\frac{\partial X^{(0,p)}_{j_1 \dots j_m}}{\partial x_i} - X^{(0,p)}_{j_1 \dots j_m i} = \sum_{\nu=1}^{p} \sum_{i_1 \dots i_\nu} \left[\frac{\partial ((j_1 \dots j_m , i_1 \dots i_\nu))}{\partial x_i} - ((j_1 \dots j_m i , i_1 \dots i_\nu)) \right] \delta^{(p)}_{i_1 \dots i_\nu} +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{p} \sum_{i_1 \dots i_\nu} ((j_1 \dots j_m , i_1 \dots i_\nu)) \frac{\partial \delta^{(p)}_{i_1 \dots i_\nu}}{\partial x_i}$$

onde, tenendo conto della relazione già dimostrata nella Nota II:

$$\frac{\partial ((j_1 \dots j_m , i_1 \dots i_\nu))}{\partial x_i} - ((j_1 \dots j_m i , i_1 \dots i_\nu)) = ((j_1 \dots j_m , i_1 \dots i_\nu i)) ,$$

osservando che:

$$\sum_i \frac{\partial \delta^{(p)}_{i_1 \dots i_\nu}}{\partial x_i} dx_i = d \, \delta^{(p)}_{i_1 \dots i_\nu}$$

e ricordando le formole (16) (17) della Nota I, si ha:

$$dX^{(s,p)} = X^{(s+1,p)} + \sum_{m=1}^{s} \sum_{\nu=1}^{p} \sum_{j_1 \dots j_m} \sum_{i_1 \dots i_\nu i} ((j_1 \dots j_m , i_1 \dots i_\nu i)) \, dx_i \, \delta^{(p)}_{i_1 \dots i_\nu} \, \delta^{(s)}_{j_1 \dots j_m} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{s} \sum_{\nu=1}^{p} \sum_{j_1 \dots j_m} \sum_{i_1 \dots i_\nu} ((j_1 \dots j_m , i_1 \dots i_\nu)) \, \delta^{(p+1)}_{i_1 \dots i_\nu} \, \delta^{(s)}_{j_1 \dots j_m} -$$

$$- \sum_{m=1}^{s} \sum_{\nu=2}^{p} \sum_{j_1 \dots j_m} \sum_{i_1 \dots i_\nu} ((j_1 \dots j_m , i_1 \dots i_\nu)) \frac{1}{\nu} \, S_{i_\nu} \, dx_{i_\nu} \, \delta^{(p)}_{i_1 \dots i_{\nu-1}} \, \delta^{(s)}_{j_1 \dots j_m} .$$

In questa formola vi sono tre gruppi di sommatorii; nell'ultimo, essendo gli indici $i_1 \dots i_\nu$ sottoposti a $\sum_{i_1 \dots i_\nu}$, le due operazioni $\frac{1}{\nu}$ e S_{i_ν} si distruggono; nel primo si muti ν in $\nu - 1$, indi si ponga i_ν al posto di i; con ciò si riconosce che tutto il primo gruppo di sommatorii, meno solo un termine, si distrugge coll'ultimo gruppo; il termine rimasto può scriversi:

$$\sum_{m=1}^{s} \sum_{j_1 \dots j_m} \sum_{i_1 \dots i_{p+1}} ((j_1 \dots j_m , i_1 \dots i_{p+1})) \, \delta^{(p+1)}_{i_1 \dots i_{p+1}} \, \delta^{(s)}_{j_1 \dots j_m}$$

osservando al solito che

$$dx_{p+1} \, \delta^{(p)}_{i_1 \dots i_p} = \delta^{(p+1)}_{i_1 \dots i_{p+1}} .$$

Ora questo termine è come quelli della seconda riga della precedente formola, il cui sommatorio rispetto a ν resta perciò da estendersi da $\nu = 1$ a $\nu = p + 1$, ed osservando che allora i termini di tal seconda riga vengono a formare $X^{(s,p+1)}$, *si ha infine la formola semplicissima ed elegante*:

$$(7) \qquad dX^{(s,p)} = X^{(s+1,p)} + X^{(s,p+1)}$$

che contiene come particolare la (1).

Se ora differenziamo la (5) e teniamo conto di (7) si ottiene una formola precisamente come la (5) ma in cui si sia mutato p in $p + 1$; ciò dimostra per induzione la (5) stessa, ricordando che essa è vera per $p = 1$.

Similmente può dimostrarsi la formola più generale:

$$(8) \qquad d^m X^{(s,p)} = \sum_{q=0}^{m} \binom{m}{q} X^{(s+m-q,p+q)}$$

che per $m = 1$ *dà luogo alla* (7) *e per* $p = 0$ *dà luogo alla* (5).

Le $X^{(s,p)}$, *introdotte colla formola* (4), *sono covarianti.*

La dimostrazione di ciò si deduce da quanto abbiamo dimostrato nella Nota II, cioè che i simboli $((j_1 \dots j_m, i_1 \dots i_\nu))$ si trasformano come i prodotti $X_{j_1 \dots j_m} X_{i_1 \dots i_\nu}$. Da ciò risulta che $X^{(s,p)}$ si trasforma esattamente come il prodotto $X^{(s)} X^{(p)}$, e quindi, come questo prodotto, è un *covariante*.

2. *Introduzione di espressioni più generali delle* $X^{(s,p)}$ *del paragrafo precedente e relazioni fra esse.* — Le espressioni $X^{(s,p)}$ introdotte nel paragrafo precedente soddisfanno alla relazione (7), e quindi alla (8), e sono, come abbiamo detto, covarianti. Formeremo ora delle espressioni più generali le quali soddisfanno ancora a relazioni come (7) e (8), ma che non sono più covarianti, ma sibbene alcuni di essi sono coefficienti di covarianti. La ragione di questa introduzione sta in ciò, che dovremo fra tali espressioni stabilire certe relazioni le quali ci saranno indispensabili per trasformare, secondo un certo intento, il risultato dell'applicazione di una trasformazione infinitesima alla forma differenziale data, argomento di cui tratteremo nella Nota seguente.

Poniamo (più generalmente che colle formole (4) e (6)):

$$(9) \quad X^{(s,p)}_{h_1 \dots h_\sigma, k_1 \dots k_\pi} = \sum_{m=1}^{s} \sum_{\nu=1}^{p} \sum_{j_1 \dots j_m} \sum_{i_1 \dots i_\nu} ((h_1 \dots h_\sigma j_1 \dots j_m, k_1 \dots k_\pi i_1 \dots i_\nu)) \delta^{(s)}_{j_1 \dots j_m} \delta^{(p)}_{i_1 \dots i_\nu}.$$

Per $s = 0$ intenderemo soppresso il sommatorio rispetto ad m, quello rispetto alle j, soppresse le j e la $\delta^{(s)}$; similmente per $p = 0$.

Quando $\pi = 0$ ovvero $\sigma = 0$ scriveremo rispettivamente:

$$X^{(s,p)}_{h_1 \dots h_\sigma, 0}, \quad X^{(s,p)}_{0, k_1 \dots k_\pi}, \quad X^{(s,p)}_{0,0},$$

essendo quest' ultimo lo stesso che $X^{(s,p)}$ dato dalla formola (4). Per $s=0$, $p=0$, poniamo:

$$X^{(0,0)}_{h_1\dots h_\sigma,\,k_1\dots k_\pi}=((h_1\dots h_\sigma\,,\,k_1\dots k_\pi)),$$

e per $s=0$, $p=0$, $\pi=0$, semplicemente:

$$X^{(0,0)}_{h_1\dots h_\sigma,\,0}=X_{h_1\dots h_\sigma}\,.$$

Questa formazione (9) comprende, come particolari, tutte quelle finora introdotte e studiate; comprende i simboli da noi chiamati *secondarii* (Nota II) e comprende i coefficienti della forma data.

Ora è evidente, senza ulteriori calcoli, che la (9) soddisfa, come la (4), a:

$$dX^{(s,p)}_{h_1\dots h_\sigma,\,k_1\dots k_\pi}=X^{(s+1,\,p)}_{h_1\dots h_\sigma,\,k_1\dots k_\pi}+X^{(s,\,p+1)}_{h_1\dots h_\sigma,\,k_1\dots k_\pi}\,. \tag{10}$$

Basta per ciò osservare che i calcoli del paragrafo precedente possono ripetersi, senza sostanziali modificazioni, per il caso nostro, giacchè se in quei calcoli alla parantesi

$$((j_1\dots j_m\,,\,i_1\dots i_\nu))$$

si sostituisce sempre l'altra

$$((h_1\dots h_\sigma\, j_1\dots j_m\,,\,k_1\dots k_\pi\, i_1\dots i_\nu)),$$

si può procedere nella stessa maniera, e ottenere i medesimi risultati.

Dalla (10), nello stesso modo con cui si è ottenuto la (8), si può poi ottenere l'altra:

$$d^m X^{(s,p)}_{h_1\dots h_\sigma,\,k_1\dots k_\pi}=\sum_{q=0}^{m}\binom{m}{q}X^{(s+m-q\,,\,p+q)}_{h_1\dots h_\sigma,\,k_1\dots k_\pi}\,. \tag{11}$$

Altre relazioni cui soddisfanno le (9) sono le seguenti:

$$\sum_{s=0}^{k}(-1)^s\binom{k}{s}d^{k-s}X^{(p+s,\,q)}_{h_1\dots h_\sigma,\,k_1\dots k_\pi}=X^{(p,\,q+k)}_{h_1\dots h_\sigma,\,k_1\dots k_\pi} \tag{12}$$

$$\sum_{s=0}^{k}(-1)^s\binom{k}{s}d^{k-s}X^{(p,\,q+s)}_{h_1\dots h_\sigma,\,k_1\dots k_\pi}=X^{(p+k,\,q)}_{h_1\dots h_\sigma,\,k_1\dots k_\pi} \tag{13}$$

la dimostrazione delle quali si può far procedere per induzione. Per $k=0$ le due formole risultano evidentemente identiche; dimostriamo che sussistendo per k sussisteranno per $k+1$. Per ciò fare basta differenziare primo e secondo membro di (12), e indi sottrarre la (12) stessa in cui si sia prima mutato p in $p+1$. Tenendo allora conto della (10), possiamo scrivere:

$$\sum_{s=0}^{k}(-1)^s\binom{k}{s}d^{k+1-s}\,X_{h,k}^{(p+s,\,q)}-\sum_{s=0}^{k}(-1)^s\binom{k}{s}d^{k-s}\,X_{h,k}^{(p+1+s,\,q)}=X_{h,k}^{(p,q+h+1)}$$

e se nel secondo sommatorio mutiamo s in $s-1$ e indi raccogliamo e riduciamo i termini simili, otteniamo precisamente la stessa (12) in cui si sia mutato k in $k+1$. Analogamente si dimostra la (13). Di queste ultime relazioni avremo bisogno di servirci nella Nota seguente.

3. *Covarianti simultanei di una forma differenziale e di una alle derivate parziali.* — Sia ora data una espressione di ordine ϱ lineare nelle derivate parziali di una funzione indeterminata f, come quelle considerate nella Nota inserita nei Rendiconti dell' Istituto Lombardo e citate in principio:

$$\sum_{s=1}^{\varrho}\sum_{i_1\cdots i_s}\xi_{i_1\ldots i_s}\frac{\partial^s f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_s}} \tag{14}$$

e formiamo:

$$\mathcal{A}^{(\mu)}=\sum_{s=1}^{\varrho}\sum_{i_1\cdots i_s}\xi_{i_1\cdots i_s}\,X_{i_1\cdots i_s,\,0}^{(0,\mu)}= \tag{15}$$

$$=\sum_{s=1}^{\varrho}\sum_{m=1}^{\mu}\sum_{i_1\cdots i_s}\sum_{j_1\cdots j_m}\xi_{i_1\cdots i_s}\left(\left(i_1\ldots i_s\,,\,j_1\ldots j_m\right)\right)\delta_{j_1\cdots m}^{(\mu)}.$$

$$\Delta^{(\mu)}=\sum_{s=1}^{\varrho}\sum_{i_1\cdots i_s}\xi_{i_1\ldots i_s}\,X_{0,i_1\cdots i_s}^{(\mu,0)}= \tag{16}$$

$$=\sum_{s=1}^{\sigma}\sum_{m=1}^{\mu}\sum_{i_1\cdots i_s}\sum_{j_1\cdots j_m}\xi_{i_1\cdots i_s}\left(\left(j_1\ldots j_m\,,\,i_1\ldots i_s\right)\right)\,\delta_{j_1\ldots j_m}^{(\mu)}\,.$$

Noi faremo vedere che queste formazioni sono *covarianti*; ma prima di far ciò è necessario discutere sui possibili valori che possono avere i numeri ϱ e μ.

Se supponiamo che la forma differenziale data sia di ordine r, *poniamo che l'ordine* ϱ *della* (14) *non superi* r; *cioè sia* $\varrho \leq r$.

Il numero μ in (15) non può superare $r-\varrho$, perchè altrimenti in $\mathcal{A}^{(\mu)}$ vi sarebbero, come è facile riconoscere tenendo conto di (9), dei *simboli secondarii* di cui il numero totale degli indici sarebbe $\varrho+\mu$ cioè maggiore di r, e tali simboli non esistono. Lo stesso è da osservarsi per la (16), avvertendo però che per un $\Delta^{(\mu)}$ il numero ϱ non può supporsi, come per un $\mathcal{A}^{(\mu)}$, eguale a r, ma essenzialmente *minore* di r, giacchè se fosse $\varrho = r$, in $\varDelta^{(\mu)}$ vi sarebbero dei simboli *secondarii* in cui il gruppo dei secondi indici sarebbe formato di r indici, e quindi, non potendo oltrepassare r il numero totale degli indici, il gruppo dei primi indici non potrebbe comparirvi; ma simboli secondarii di tal natura non hanno significato, mentre l'hanno (sono eguali ai coefficienti medesimi della forma) quelli in cui scomparisca invece il gruppo dei secondi indici.

La dimostrazione della invariantività delle $\varDelta$ e $\varDelta$ si fa in modo simile a quello tenuto nel paragrafo 2.

Osserviamo che, come abbiamo già dimostrato nella Nota II, i simboli $((i_1 \ldots i_s, j_1 \ldots j_m))$ si trasformano precisamente come i prodotti $X_{i_1 \ldots i_s} X_{j_1 \ldots j_m}$; sostituendo allora questi prodotti a quei simboli si deduce che $\varDelta^{(\mu)}$ si trasforma precisamente come

$$\sum_{s=1}^{\varrho} \sum_{i_1 \ldots i_s} \xi_{i_1 \ldots i_s} X_{i_1 \ldots i_s} \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{j_1 \ldots j_m} X_{j_1 \ldots j_m} \vartheta^{(\mu)}_{j_1 \ldots j_m} .$$

Ma questa espressione è il prodotto dell'*invariante* $\varDelta$ già studiato nella Nota inserita nei Rendiconti dell'Istituto Lombardo, per il covariante evidente $X^{(\mu)}$, dunque resta provato che $\varDelta^{(\mu)}$ si muta in sè stesso. E similmente si procede per $\varDelta^{(\mu)}$.

Nella predetta Nota abbiamo osservato che $\varDelta$ perderebbe la invariantività se fosse ϱ maggiore di r; ciò spiega la ragione della limitazione $\varrho \leq r$ da noi posta di sopra.

Collo stesso semplice metodo può dimostrarsi l'invariantività anche di un'altra espressione: sia data un'altra forma alle derivate parziali (di ordine $\mu \leq r$), con coefficienti ξ' (che però in particolare potrebbero anche essere eguali ai ξ), e formiamo:

$$G = \sum_{s=1}^{\varrho} \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{i_1 \ldots i_s} \sum_{j_1 \ldots j_m} \xi_{i_1 \ldots i_s} \xi'_{j_1 \ldots j_m} ((i_1 \ldots i_s , j_1 \ldots j_m))$$

Si dimostra come sopra che: G *è un invariante simultaneo della forma differenziale e delle due alle derivate parziali.* Per ragioni simili a quelle suesposte deve naturalmente qui supporsi $\varrho + \mu \leq r$. Per il caso di $r = 2$, non può quindi essere che al più $\varrho = 1$, $\mu = 1$, e la Ω diventa un invariante come quello indicato anche con G nelle formole (10) dell'altra mia Nota: *Sulla teoria invariantiva delle espressioni ai differenziali totali di second'ordine*, ecc., pubblicata l'anno scorso in questi medesimi Rendiconti (¹).

(¹) (5), t. XI, 1902, 2° sem., pagg. 105-112.

É utile infine notare che fra le formazioni $\mathcal{A}^{(\mu)}$ vi è compresa anche quella per $\mu = 0$, $\mathcal{A}^{(0)}$ che non è altro che l'*invariante* $\mathcal{A}$, da noi già più volte ricordato.

4. *Caso in cui la forma alle derivate parziali sia di 1º ordine, cioè sia il simbolo di una trasformazione infinitesima.* — Un caso degno di essere messo specialmente in rilievo è quello di $\varrho = 1$, perchè è questo il caso che avremo direttamente da applicare nella soluzione del problema di Pfaff.

Per uniformarci alle notazioni da noi già introdotte per il caso del 2º ordine i covarianti (15) e (16) per il caso di $\varrho = 1$ li chiameremo rispettivamente $C^{(\mu)}$ e $D^{(\mu)}$, cioè porremo:

$$(17) \qquad C^{(\mu)} = \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{i} \sum_{j_1 \dots j_m} \xi_i \, ((i, j_1 \dots j_m)) \, \delta^{(\mu)}_{j_1 \dots j_m}$$

$$(18) \qquad D^{(\mu)} = \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{i} \sum_{j_1 \dots j_m} \xi_i \, ((j_1 \dots j_m, i)) \, \delta^{(\mu)}_{j_1 \dots j_m}$$

in cui μ *può al più essere eguale a* $r - 1$.

Poichè queste espressioni non contengono coefficienti X con più di $\mu + 1$ indici, e poichè $X^{(\mu+1)}$ è un covariante di $X^{(r)}$, così può dirsi che C e D sono anche covarianti di $X^{(\mu+1)}$.

Sommando o sottraendo, e introducendo i *simboli principali* abbiamo altri covarianti. Conviene allora distinguere il caso di μ pari da quello di μ dispari. Porremo, in relazione alle *due* specie di simboli principali:

$$(19) \quad \begin{cases} L^{(2\mu)} = C^{(2\mu)} + D^{(2\mu)} \,, & E^{(2\mu)} = -C^{(2\mu)} + D^{(2\mu)} \\ L^{(2\mu+1)} = -C^{(2\mu+1)} + D^{(2\mu+1)} \,, & E^{(2\mu+1)} = C^{(2\mu+1)} + D^{(2\mu+1)} \end{cases}$$

e allora si ha sempre (sia ϱ pari o ϱ dispari):

$$(20) \qquad L^{(\rho)} = \sum_i \xi_i \sum_j \Big[(j_1 \dots j_\rho \, i) \, \delta^{(\rho)}_{j_1 \dots j_\rho} + \}j_1 \dots j_{\rho-1} \, i\{ \, \delta^{(\rho)}_{j_1 \dots j_{\rho-1}} + \\ + (j_1 \dots j_{\rho-2} \, i) \, \delta^{(\rho)}_{j_1 \dots j_{\rho-2}} + \cdots \Big]$$

$$(21) \qquad E^{(\rho)} = \sum_i \xi_i \sum_j \Big[\}j_1 \dots j_\rho \, i\{ \, \delta^{(\rho)}_{j_1 \dots j_\rho} + (j_1 \dots j_{\rho-1} \, i) \, \delta^{(\rho)}_{j_1 \dots j_{\rho-1}} + \\ + \}j_1 \dots j_{\rho-2}\{ \, \delta^{(\rho)}_{j_1 \dots j_{\rho-2}} + \cdots \Big].$$

I covarianti L si presenteranno, come vedremo, nello studio dell' applicazione di una trasformazione infinitesima alla forma differenziale; le quantità in parentesi sia in L che in E hanno una formazione ben chiara; per una L cominciano sempre coi simboli principali di prima specie, e indi procedono, alternandosi, simboli di prima con simboli di seconda specie; per una E invece si comincia coi simboli di seconda specie e indi si procede alternativamente come sopra.

Una osservazione è ora di fondamentale importanza per le cose che dovremo dire in seguito.

La $L^{(\varrho)}$ non contiene coefficienti X a *più* di ϱ indici; quindi essa può anche considerarsi come un covariante di $X^{(\varrho)}$, mentre non può dirsi lo stesso della $E^{(\varrho)}$ e delle $C^{(\varrho)}$, $D^{(\varrho)}$ le quali possono considerarsi come covarianti solo di $X^{(\varrho+1)}$ e delle altre forme di ordine superiore.

Di qui ne viene che per una $X^{(r)}$ fondamentale, mentre non esistono le $C^{(r)}$, $D^{(r)}$, $E^{(r)}$, esiste invece, la $L^{(r)}$, ed anzi è proprio questa che ci si presenterà nel problema cui abbiamo di sopra accennato.

5. *Caso delle forme differenziali di 1º ordine e di r^{mo} grado.* — Per completare la ricerca poniamoci infine nelle condizioni del paragrafo 5 della Nota II. Dei covarianti (20) e (21) non restano allora che $E^{(r-1)}$ e $L^{(r)}$, i quali risultano rispettivamente:

$$(22)\qquad E^{(r-1)} = -2 \sum_i \sum_j \xi_i \, X_{j_1 \dots j_{r-1} i} \, \delta^{(r-1)}_{j_1 \dots j_{r-1}}$$

$$(23)\qquad L^{(r)} = \sum_i \xi_i \sum_j \left\{ \begin{bmatrix} j_1 \dots j_r \\ i \end{bmatrix} \delta^{(r)}_{j_1 \dots j_r} - 2\, X_{j_1 \dots j_{r-1} i} \, \delta^{(r)}_{j_1 \dots j_{r-1}} \right\}$$

di cui il primo è evidente da sè, e il secondo è quello che per $r = 2$ è stato rilevato colla formola (15) della Nota: *Sulla teoria invariantiva*, ecc. sopracitata, notando però che il simbolo $\begin{bmatrix} i\,j \\ s \end{bmatrix}$ ivi adoperato, essendo esattamente il simbolo di Christoffel sotto la forma ordinariamente per esso adoperata, si ottiene da quello che noi nella Nota II abbiamo indicato con $\begin{bmatrix} j_1 \dots j_r \\ i \end{bmatrix}$, oltrechè ponendo $r = 2$, moltiplicandolo anche per $-\dfrac{1}{2}$.