ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCC.

1903

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1903

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 4 gennaio 1903.

P. BLASERNA, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle proprietà aritmetiche delle funzioni analitiche.* Nota II di ONORATO NICCOLETTI, presentata dal Socio U. DINI.

5. Facendo seguito alla mia Nota precedente (¹), rimane ancora a dimostrare che la trascendente intera $F(x_1 x_2 \ldots x_n)$ può determinarsi in guisa che dalla equazione

$$F(x_1 x_2 \ldots x_n) = 0$$

si possa trarre una delle variabili, ad es. x_i, in funzione analitica e *trascendente* delle altre $n-1$, cioè che dall'equazione stessa si può dedurre una serie di potenze

$$x_i - \xi_i = P_i(x_1 - \xi_1, \ldots x_{i-1} - \xi_{i-1}, x_{i+1} - \xi_{i+1}, \ldots x_n - \xi_n)$$

che soddisfi all'equazione stessa, ma non insieme ad una qualsiasi equazione algebrica.

Indichiamo perciò con α un numero intiero, positivo, affatto arbitrario, e consideriamo la funzione $F^{(\alpha)}(x_1 \ldots x_n)$, già definita colla formola (17):

$$(23) \qquad F^{(\alpha)}(x_1 x_2 \ldots x_n ; u_0, u_1 \ldots u_\alpha) = u_0\, \omega_0(x_1 x_2 \ldots x_n) + \\ + u_1\, \omega_1(x_1 x_2 \ldots x_n) + \cdots + u_\alpha\, \omega_\alpha(x_1 x_2 \ldots x_n),$$

(¹) Cfr. Rendiconti Lincei, seduta del 7 Dicembre 1902. Per maggior chiarezza, oltre conservare tutte le notazioni di questa Nota, la numerazione dei §§ e delle formole fa seguito a quella della Nota stessa.

dove per le (7) è:

$$\omega_0(x_1\, x_2 \ldots x_n) = \theta_0(x_1\, x_2 \ldots x_n);$$

$$\omega_t(x_1\, x_2 \ldots x_n) = x_1^{\mu_1^{(t)}} x_2^{\mu_2^{(t)}} \ldots\ldots x_n^{\mu_n^{(t)}} . \theta_t(x_1 \ldots x_n) \{\psi_t(x_1\, x_2 \ldots x_n)\}^{\rho_t} \; (t=1,2,\ldots,\alpha).$$

Pensando questa funzione $F^{(\alpha)}$ come funzione delle variabili indipendenti $x_1 \ldots x_n, u_0, u_1 \ldots u_\alpha$, si può sempre fare in modo che essa sia irriducibile in tutte queste variabili (nel campo assoluto di razionalità); essendo infatti essa lineare omogenea in $u_0, u_1, \ldots u_\alpha$, qualunque suo divisore non può dipendere che dalle $x_1\, x_2 \ldots x_n$, e dovrebbe quindi essere un divisore comune dei polinomî $\omega_0 = \theta_0, \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\alpha$; se dunque questi polinomî non hanno fattori comuni, la $F^{(\alpha)}$, pensata come funzione delle x e delle u, è irriducibile. Ora si può sempre, ed in infiniti modi, fare che i polinomî $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_\alpha$ non abbiano fattori comuni; basta perciò ad es: supporre che: *a) i polinomi* $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_\alpha$ *non abbiano fattori comuni* e insieme: *b) il polinomio* θ_0 *non abbia fattori (irriducibili) di altezza minore od uguale ad* α; in questa ipotesi infatti, come subito si riconosce, i polinomî $\omega_0, \omega_1 \ldots \omega_\alpha$ non hanno fattori comuni.

La (23) è adunque irriducibile; lo sarà allora anche il numeratore della funzione razionale fratta che si ha da essa, ponendovi

$$(24) \qquad x_i = \frac{1}{\xi_i} \; (i=1,\ldots,n); \; u_t = \frac{1}{v_t} \; ; \; (t=0,\ldots,\alpha)$$

si ha in tal guisa (indicando con r_s il grado della $F^{(\alpha)}$ nella x_s):

$$(25) \qquad F^{(\alpha)}\left(\frac{1}{\xi_1}, \frac{1}{\xi_2}, \ldots, \frac{1}{\xi_n}\; ; \; \frac{1}{v_0}, \frac{1}{v_1}, \ldots, \frac{1}{v_\alpha}\right) =$$

$$= \frac{1}{\prod_1^s \xi_s^{r_s} \cdot v_0 \ldots v_\alpha} G^{(\alpha)}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \; ; \; v_0, v_1, \ldots, v_\alpha)$$

e sarà

$$(25') \qquad G^{(\alpha)}(\xi_1\, \xi_2, \ldots, \xi_n \; ; \; v_0, v_1, \ldots, v_\alpha)$$

irriducibile nei suoi argomenti. Per un noto teorema di Hilbert [1] potremo allora dare alle variabili $\xi_1\, \xi_2 \ldots \xi_{n-1}$ tali valori intieri, non minori di α in valore assoluto, $\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)} \ldots \lambda_{n-1}^{(1)}$, in guisa che la funzione di ξ_n e delle $v_0, v_1, \ldots, v_\alpha$

$$(26) \qquad G^{(\alpha)}(\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \ldots, \lambda_{n-1}^{(1)}, \xi_n \; ; \; v_0, v_1, \ldots, v_\alpha)$$

(1) Cfr. Hilbert, *Ueber die Irreducibilität ganzer rationaler Functionen* (Giornale di Crelle, vol. 110, pag. 122).

sia ancora irriducibile ed abbia in ξ_n lo stesso grado della (25') (¹). Determinate così in un modo qualunque, conforme alle ipotesi precedenti, le $\lambda_i^{(1)}$ $(i = 1, 2 \dots n-1)$, potremo poi nella (26) assegnare alle $v_0, v_1 \dots v_\alpha$ valori razionali intieri $c_0, c_1 \dots c_\alpha$, che soddisfaccia (a causa delle (13)) alle condizioni

$$|c_\rho| > \frac{1}{\varepsilon_\rho} \quad (\rho = 0, 1, \dots \alpha),$$

in guisa che anche la funzione *della sola* ξ_n:

$$\text{(27)} \qquad G^{(\alpha)}(\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \dots \lambda_{n-1}^{(1)}, \xi_n; c_0, c_1 \dots c_\alpha)$$

sia irriducibile ed abbia ancora in ξ_n il grado della (25'). Saranno allora irriducibili, nel campo assoluto di razionalità, anche le due funzioni:

$$\text{(26*)} \qquad F^{(\alpha)}\left(\frac{1}{\lambda_1^{(1)}}, \frac{1}{\lambda_2^{(1)}}, \dots \frac{1}{\lambda_{n-1}^{(1)}}, x_n; u_0, u_1 \dots u_\alpha\right)$$

$$\text{(27*)} \qquad F^{(\alpha)}\left(\frac{1}{\lambda_1^{(1)}}, \frac{1}{\lambda_2^{(1)}}, \dots \frac{1}{\lambda_{n-1}^{(1)}}; x_n; \frac{1}{c_0}, \frac{1}{c_1} \dots \frac{1}{c_\alpha}\right)$$

ed *avranno inoltre nella* x_n *il medesimo grado della* (23); infatti ove questo non fosse, una almeno delle (26), (27) avrebbe come fattore una potenza, con esponente non nullo, di ξ_n, e sarebbe quindi riducibile.

6. Ne segue che anche la funzione:

$$\text{(28)} \qquad F^{(\alpha)}\left(x_1 x_2 \dots x_n; \frac{1}{c_0}, \frac{1}{c_1}, \dots \frac{1}{c_\alpha}\right)$$

è irriducibile nel campo assoluto di razionalità. Se infatti così non fosse, essa dovrebbe spezzarsi in due fattori $\varphi_1(x_1 x_2 \dots x_n)$, $\varphi_2(x_1 \dots x_n)$; si avrebbe cioè:

$$F^{(\alpha)}\left(x_1 x_2 \dots x_n, \frac{1}{c_0}, \frac{1}{c_1} \dots \frac{1}{c_\alpha}\right) = \varphi_1(x_1 x_2 \dots x_n) \cdot \varphi_2(x_1 \dots x_n);$$

ma, poichè per $x_i = \frac{1}{\lambda_i^{(1)}}$ $(i = 1, 2 \dots n-1)$ la (28) si riduce alla (27*)

(¹) Questo è sempre possibile, prendendo le $\lambda_1^{(1)} \dots \lambda_{n-1}^{(1)}$ in guisa che, oltre la (26), anche la funzione

$$\xi_n^{r_n} G^{(\alpha)}\left(\lambda_1^{(1)} \dots \lambda_{n-1}^{(1)}, \frac{1}{\xi_n}; v_0 \dots v_\alpha\right)$$

(dove r_n è il grado della (25) in ξ_n) rimanga irriducibile (cf. Hilbert, l. c.; pag. 117).

che è irriducibile, quando si faccia questa posizione, uno dei due fattori φ_1, φ_2 deve ridursi all'unità, l'altro alla (27*). Sia ad es. $\varphi_1(x_1 x_2 \ldots x_n)$ quello dei due fattori della (28), che per $x_i = \frac{1}{\lambda_i^{(1)}}$ $(i = 1, \ldots n-1)$ si riduce alla (27*); esso avrà allora in x_n il grado della (27*) e quindi anche della (28); l'altro fattore φ_2 deve quindi avere nella x_n il grado zero, *deve essere cioè una funzione delle sole* $x_1 x_2 \ldots x_{n-1}$. Ma si può sempre evitare che la (28) ammetta un tale divisore: supponiamo infatti nella (23) che *il polinomio* θ_0 *abbia qualche termine funzione della sola* x_n; qualunque sistema di valori si dia allora alle $u_0, u_1 \ldots u_\alpha$ (purchè $u_0 \neq 0$) per la proprietà $b)$ dei polinomi ω_r (cf. n. 2) un tal termine non verrà a mancare nella (28); questa dunque non può ammettere un divisore funzione delle sole $x_1 x_2 \ldots x_{n-1}$.

Consideriamo ancora un momento la (28), che abbiamo dimostrato essere irriducibile. Se c è il minimo multiplo comune dei numeri $c_0, c_1 \ldots c_\alpha$, essa, moltiplicata per c, diventa una funzione razionale intera irriducibile delle $x_1 x_2 \ldots x_n$, a coefficienti interi e privi di fattori comuni; la sua altezza inoltre sarà evidentemente non minore della somma dei rapporti $\left|\frac{c}{c_0}\right|, \left|\frac{c}{c_1}\right|, \ldots \left|\frac{c}{c_\alpha}\right|$, (in particolare quindi *maggiore di* α).

Chiamiamo ora con $\alpha_1 - 1$ la *minima* delle $\lambda_i^{(1)}$, e *supponiamo che i numeri interi* $c_0, c_1 \ldots c_\alpha$ *sian stati presi in guisa che la somma ora detta*:

$$c \left\{ \frac{1}{|c_0|} + \frac{1}{|c_1|} + \cdots + \frac{1}{|c_\alpha|} \right\}$$

sia anche maggiore di α_1 (questo è sempre possibile, ad es. prendendo prima in un modo qualunque $c_0, c_1, \ldots c_{\alpha-1}$, e quindi c_α maggiore in valore assoluto di $\alpha_1 . c_{\alpha-1}$); *la* (28) *avrà allora un'altezza maggiore di* α_1.

7. Poniamo ora nella (14):

$$(29) \quad u_0 = \frac{1}{c_0}; u_1 = \frac{1}{c_1}, \ldots; u_\alpha = \frac{1}{c_\alpha}; u_{\alpha+1} = u_{\alpha+2} = \ldots = u_{\alpha_1 - 1} = 0;$$

e consideriamo la:

$$(30) \quad F^{(\alpha_1)}(x_1, \ldots x_n; u_{\alpha_1}) = F^{(\alpha)}\left(x_1 x_2 \ldots x_n; \frac{1}{c_0}, \frac{1}{c_1} \ldots \frac{1}{c_\alpha}\right) + u_{\alpha_1} \omega_{\alpha_1}(x_1 x_2 \ldots x_n).$$

Si può sempre fare in modo che la (30) come funzione delle variabili $x_1, x_2 \ldots x_n, u_{\alpha_1}$ sia irriducibile; basta perciò che non ammetta un divisore funzione delle sole $x_1 \dots x_n$; questo sarà certamente, quando si supponga che *il polinomio* θ_{α_1} *non abbia fattori irriducibili di altezza maggiore di* α_1; in questo caso infatti qualunque divisore irriducibile del polinomio ω_{α_1} ha un'altezza non maggiore di α_1, e non può quindi coincidere colla (28) che è irriducibile ed ha un'altezza maggiore di α_1.

Potremo allora, come per la $F^{(\alpha)}$, determinare dei numeri razionali intieri $\lambda_i^{(2)}$ $(i = 1, 2 \dots n-1)$, maggiori in valore assoluto di α_1, e poi un numero intero c_{α_1}, maggiore in valore assoluto di $\frac{1}{\varepsilon_{\alpha_1}}$ e di tutte le $\lambda_i^{(2)}$, tali che ciascuna delle tre funzioni:

$$F^{(\alpha_1)}\left(\frac{1}{\lambda_1^{(2)}} \cdots \frac{1}{\lambda_{n-1}^{(2)}}, x_n ; u_{\alpha_1}\right) \tag{31}$$

$$F^{(\alpha_1)}\left(\frac{1}{\lambda_1^{(2)}} \cdots \frac{1}{\lambda_{n-1}^{(2)}}, x_n ; \frac{1}{c_{\alpha_1}}\right) \tag{32}$$

$$F^{(\alpha_1)}\left(x_1, x_2 \dots x_n ; \frac{1}{c_{\alpha_1}}\right) \tag{33}$$

sia irriducibile nelle sue variabili; ed inoltre, detta $\alpha_2 - 1$ la minima delle $\lambda_i^{(2)}$, la (33) abbia un'altezza maggiore di α_2.

È chiaro ora come si possa procedere oltre. Adunque:

a) se da un certo valore α in poi ogni polinomio θ_r ha fattori irriducibili di altezza non maggiore di r;

b) se i polinomî $\theta_0, \theta_1, \dots \theta_\alpha$ non hanno fattori comuni;

c) se qualsiasi fattore irriducibile del polinomio θ_0 ha un'altezza maggiore di α;

d) se in θ_0 v'è qualche termine funzione della sola variabile x_n; potremo, procedendo come sopra, costruire una successione *divergente* di numeri interi e positivi:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots \dots \alpha_h \dots \dots$$

e corrispondentemente n successioni congruenti, ancora divergenti e di numeri intieri:

$$\lambda_i^{(1)}, \lambda_i^{(2)} \dots \dots \lambda_i^{(h)} \dots \dots \quad (i = 1, 2 \dots \dots n-1)$$
$$c_0, c_1, c_2, \dots \dots c_\alpha, c_{\alpha_1}, c_{\alpha_2} \dots \dots c_{\alpha_h} \dots \dots$$

tali, che *ciascuna* delle funzioni:

$$F^{(\alpha_i)}\left(\frac{1}{\lambda_1^{(i+1)}}, \frac{1}{\lambda_2^{(i+1)}} \cdots \frac{1}{\lambda_{n-1}^{(i+1)}} ; x_n, \frac{1}{c_{\alpha i}}\right) \tag{34}$$

$$F^{(\alpha_i)}\left(x_1, x_2 \dots x_n ; \frac{1}{c_{\alpha i}}\right) \tag{35}$$

sia irriducibile (in x_n, in $x_1 x_2 \ldots x_n$ rispettivamente) nel campo assoluto di razionalità ed inoltre la (35) abbia un'altezza maggiore di α_{i+1}.

Osserviamo anche che la (34) e (35) hanno in x_n un grado non minore di $\mu_{\alpha_i}{}^{(n)}$; questi gradi formano dunque anche essi una successione divergente.

8. Ciò premesso, consideriamo la funzione:

$$(36) \qquad \overline{\mathrm{F}}(x_1 x_2 \ldots x_n) = \frac{1}{c_0}\,\omega_0(x_1 \ldots x_n) +$$

$$+ \frac{1}{c_1}\,\omega_1(x_1 \ldots x_n) + \cdots + \frac{1}{c_\alpha}\,\omega_\alpha(x_1 x_2 \ldots x_n) + \frac{1}{c_{\alpha_1}}\,\omega_{\alpha_1}(x_1 x_2 \ldots x_n) + \ldots\ldots;$$

e supponiamo che: *per* $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ *il polinomio* $\omega_0 = \theta_0$ *si annulli e ciascuna delle derivate* $\dfrac{\partial \theta_0}{\partial x_i}$ *sia inoltre in questo punto diversa da zero*; questo è evidentemente possibile in infiniti modi, restando insieme anche soddisfatte le condizioni *b*), *c*), *d*) del n. 7. Allora dalla equazione:

$$(36^*) \qquad \overline{\mathrm{F}}(x_1 x_2 \ldots x_n) = 0$$

possiamo dedurre un elemento analitico, una serie di potenze:

$$(37) \qquad x_n = \mathrm{P}(x_1 x_2 \ldots x_{n-1}) \qquad (\mathrm{P}(0, \ldots 0) = 0)$$

che soddisfa all'equazione stessa ed è assolutamente ed uniformemente convergente in un certo campo $\mathrm{C}(x_1 x_2 \ldots x_{n-1})$ attorno al punto $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = 0$.

Nelle ipotesi superiori l'elemento analitico (37) è trascendente.

Si ammetta infatti che non lo sia; e soddisfaccia alla equazione algebrica irriducibile:

$$(38) \qquad g(x_1 x_2 \ldots x_{n-1} x_n) = 0$$

di grado m; ponendo nella (38) per $x_1 x_2 \ldots x_{n-1}$ valori razionali affatto arbitrari, otterremo *sempre* un'equazione in x_n irriducibile o meno, di grado minore od uguale ad m.

Sia ora:

$$\overline{\mathrm{F}}^{(\alpha i)}\left(x_1 x_2 \ldots x_n \cdot \frac{1}{c_{\alpha i}}\right)$$

una delle funzioni (35), *il cui grado nella* x_n *superi* m e tale inoltre che il punto $x_r = \dfrac{1}{\lambda_r{}^{(i+1)}}$, $(r = 1, 2 \ldots n-1)$ cada nel campo di convergenza della serie (37).

Poniamo allora nella (36*), (37), (38):

$$x_r = \frac{1}{\lambda_r^{(i+1)}} \, (r = 1, 2 \ldots n-1);$$

dalla (37) si avrà, detto $\frac{1}{\lambda_n^{(i+1)}}$ il valore di x_n (algebrico, come sappiamo):

$$(39) \qquad \frac{1}{\lambda_n^{(i+1)}} = \mathrm{P}\left(\frac{1}{\lambda_1^{(i+1)}} \cdots\cdots \frac{1}{\lambda_{n-1}^{(i+1)}}\right);$$

la (38) diventerà una equazione:

$$(40) \qquad g\left(\frac{1}{\lambda_1^{(i+1)}} \cdots\cdots \frac{1}{\lambda_{n-1}^{(i+1)}}, x_n\right) = 0$$

a coefficienti razionali di grado non superiore ad m; quanto alla (36*) si osservi che tra le $\lambda_r^{(i+1)}$ $(r = 1, 2 \ldots n-1)$ ve ne è una che in valore assoluto è uguale ad $\alpha_{i+1} - 1$; se questa è la $\lambda_r^{(i+1)}$, il numero $\frac{1}{\lambda_r^{(i+1)}}$ è un numero algebrico di altezza α_{i+1} e perciò per questa sostituzione si annullano tutti i polinomî ω_t per cui è $t \geq \alpha_{i+1}$; la (36*) si riduce perciò alla equazione *irriducibile* e di grado *maggiore di m*:

$$(41) \qquad \overline{\mathrm{F}}^{(\alpha_i)}\left(\frac{1}{\lambda_1^{(i+1)}}, \ldots \frac{1}{\lambda_{n-1}^{(i+1)}}, x_n; \frac{1}{c_{\alpha_i}}\right) = 0.$$

Questa equazione e la (40) che è di grado inferiore, dovrebbero avere una radice comune, la (39), il che è assurdo. Non può dunque aversi un'equazione come la (38) cui la serie (37) soddisfaccia; essa serie rappresenta perciò una funzione trascendente delle $x_1 x_2 \ldots x_{n-1}$, come avevamo affermato.

9. Riassumendo, possiamo enunciare il teorema:

Esistono delle trascendenti intere in n variabili complesse $x_1 x_2 \ldots x_n$, che, uguagliate allo zero, definiscono (in un campo conveniente) una *qualunque* di esse variabili in funzione analitica e *trascendente* delle altre, in guisa che su qualsiasi varietà *algebrica* dell' S_n complesso $(x_1 x_2 \ldots x_n)$ e ciascuna di esse funzioni e qualunque loro derivata si riducono a funzioni *algebriche* di alcune delle $x_1 x_2 \ldots x_n$.

Una tale proprietà *non* è adunque caratteristica delle funzioni algebriche.