ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCC.

1903

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1903

Matematica. — *Sulle superficie geodetiche in una varietà qualunque e in particolare nelle varietà a tre dimensioni.* Nota del Corrispondente G. Ricci.

Il sig. Hadamard [1] ha posto il problema di determinare quelle varietà, che ne contengono altre da lui dette *superficie geodetiche* perchè tali che le loro linee geodetiche sono linee geodetiche anche per le varietà, in cui si considerano immerse. Egli ha anche assegnato una espressione canonica per i ds^2 di quelle varietà a tre dimensioni, le quali godono della proprietà che per ogni loro punto passa una infinità di superficie geodetiche.

Partendo da formole stabilite in altra mia Nota [2], io pongo in equazione il problema generale proposto dal sig. Hadamard nel modo seguente. Considerando una varietà V_{n+m} ad $n+m$ dimensioni come definita per mezzo del suo ds^2 e assumendo una varietà V_n ad n dimensioni in essa immersa come indeterminata, stabilisco un sistema di equazioni a derivate parziali, che deve essere reso integrabile dalla espressione φ del ds^2 di V_n perchè esistano in V_{n+m} delle superficie geodetiche V_n. Questo sistema integrato per una determinata φ porge una intiera classe di superficie geodetiche di V_{n+m}.

Il problema di determinare le varietà V_{n+1} tali che per ogni loro punto passi un numero finito di superficie geodetiche V_n equivale a quello di riconoscere se le superficie V_n, che tagliano ortogonalmente una congruenza normale data di linee tracciate in V_{n+1} sono geodetiche; ed è qui risolto in generale.

Prendo poi in esame il problema risolto dal sig. Hadamard e, assieme ai risultati già da lui stabiliti, determino le caratteristiche intrinseche delle V_3, per ogni punto delle quali passa una infinità di superficie geodetiche. Risulta da esse che le traiettorie ortogonali ad una famiglia di superficie geodetiche di una V_3 costituiscono sempre una congruenza principale di essa V_3; dal che segue prima di tutto che le curvature principali di una V_3 di Hadamard non possono essere tutte distinte. Se esse sono tutte eguali, si ha il caso ben noto dello spazio ordinario euclideo o no; se, invece, due di esse soltanto sono eguali e se di più la congruenza corrispondente

(1) Cfr. *Sur les éléments linéaires à plusieurs dimensions.* Tome XXV^e de la 2^e Série du Bulletin des sciences mathématiques.

(2) Cfr. *Formole fondamentali nella teoria generale delle varietà e della loro curvatura.* Rendic. della R. Acc. dei Lincei, seduta del 4 maggio 1902.

alla terza curvatura principale è insieme normale, geodetica ed isotropa, si ha il caso di Hadamard.

La risoluzione del problema di Hadamard nel caso di $n=3$ è dunque intimamente congiunta colla considerazione di quelle, che io ho chiamate *congruenze* e *curvature principali* di una V_3, le quali sono di importanza fondamentale in tutte le ricerche, che riguardano la struttura intima di queste varietà. La risoluzione dei problemi analoghi per le varietà di un maggior numero di dimensioni dipende certamente da una opportuna estensione di quei concetti.

Questa Nota fa seguito a quella citata sopra sulle *Formole fondamentali nella teoria generale delle varietà e della loro curvatura*, di cui conserverò qui le notazioni, e che citerò, occorrendo, colla lettera N, mentre citerò con M il *Riassunto sui metodi di Calcolo differenziale assoluto e loro applicazioni*, pubblicato dal prof. Levi-Civita e da me nel vol. LIV dei Mathematische Annalen.

1. Il prof. Bianchi in questi Rendiconti [1] ha poste in evidenza alcune identità differenziali, che legano i simboli di Riemann, che si incontrano nella teoria della trasformazione delle forme differenziali quadratiche, a quelli di Christoffel. Nel caso delle forme ternarie ai simboli di Riemann, che costituiscono un sistema quadruplo covariante, se ne possono, come è noto, sostituire altri costituenti un sistema doppio controvariante. Se, seguendo le mie notazioni, quelli si indicano con $a_{pq,rs}$ e questi con $\alpha^{(uv)}$ e si introduce il sistema covariante triplo di elementi ε_{rst} (M, I, 3) le relazioni, che passano tra il sistema di elementi $a_{pq,rs}$ e quello di elementi $\alpha^{(uv)}$ si possono scrivere come segue:

$$a_{pq,rs}=\sum_{uv}^{3}{}_{1}\,\varepsilon_{pqu}\,\varepsilon_{rsv}\,\alpha^{(uv)}\,;$$

ovvero

$$a_{pq,rs}=\sum_{uu'vv'}^{3}{}_{1}\,a^{(uu')}\,a^{(vv')}\,\varepsilon_{pqu}\,\varepsilon_{rsv}\,\alpha_{u'v'}\,,$$

denotandosi con $\alpha_{u'v'}$ il sistema reciproco al sistema $\alpha^{(uv)}$. Ne seguono per derivazione covariante le

$$a_{pq,rst}=\sum_{uu'vv'}^{3}{}_{1}\,a^{(uu')}\,a^{(vv')}\,\varepsilon_{pqu}\,\varepsilon_{rsv}\,\alpha_{u'v't}\,.$$

Colla convenzione di riguardare come equivalenti gli indici, che differiscono per multipli di 3, le formole di Bianchi si possono scrivere come

[1] Seduta del 5 gennaio 1902.

segue:

$$a_{pq,rr+1\,r+2} + a_{pq,r+2\,rr+1} + a_{pq,r+1\,r+2r} = 0$$

e per le precedenti assumono la forma

$$\sum_1^3{}_{uu'vv'} a^{(uu')} a^{(vv')} \varepsilon_{pqu}\, \alpha_{u'v'v} = 0\,;$$

o la equivalente

$$\sum_1^3{}_{vw} a^{(vw)} \alpha_{uvw} = 0\,.$$

Se poi (M, II, 1) si' introduce una tripla di riferimento [1], [2], [3] di sistemi coordinati covarianti $\lambda_{h/u}$ $(h, u = 1, 2, 3)$ e si pone

$$\alpha_{uv} = \sum_1^3{}_{hk} \omega_{hk}\, \lambda_{h/u}\, \lambda_{k/v} \tag{1}$$

$$\lambda_{h/uv} = \sum_1^3{}_{ij} \gamma_{hij}\, \lambda_{i/u}\, \lambda_{j/v}\,,$$

le formole di Bianchi per le varietà a tre dimensioni assumono la forma

$$\sum_1^3{}_k \left\{ \frac{\partial \omega_{hk}}{\partial s_k} + \sum_1^3{}_i (\omega_{hk}\, \gamma_{kii} - \omega_{ik}\, \gamma_{hki} \right\} = 0\,. \tag{2}$$

In particolare, se ci riferiamo ad una tripla principale per modo che le (1) assumano la forma

$$\alpha_{uv} = \sum_1^3{}_h \omega_h\, \lambda_{h/u}\, \lambda_{h/v}$$

le (2) ci danno

$$\frac{\partial \omega_h}{\partial s_h} = \sum_1^3{}_i (\omega_i - \omega_h)\, \gamma_{hii}\,.$$

Per $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$ da queste scende per $n = 3$ (come ha osservato il Bianchi per una varietà qualunque ad n dimensioni) un ben noto teorema di Schur. Nella ipotesi $\omega_2 = \omega_3 = \omega$, $\omega_1 \neq \omega$ si hanno invece le formole

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial s_1} + (\omega_1 - \omega)(\gamma_{122} + \gamma_{133}) = 0$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial s_2} + (\omega - \omega_1)\, \gamma_{211} = 0\,, \quad \frac{\partial \omega}{\partial s_3} + (\omega - \omega_1)\, \gamma_{311} = 0\,.$$

Se si suppone geodetica la congruenza [1], è $\gamma_{211} = \gamma_{311} = 0$ e però vale il teorema seguente:

« Se in una varietà V_3 due curvature riemanniane principali hanno lo « stesso valore ω e la terza ω_1 è diversa da ω, e se la congruenza princi- « pale corrispondente ad ω_1 è geodetica, ω varia soltanto lungo le linee di « questa congruenza.

« Se ω non è costante, la congruenza stessa è quindi geodetica e nor- « male, anzi il suo sistema coordinato covariante risulta dalle derivate di una « funzione rispetto alle coordinate di V_3 ».

2. Si supponga data in una V_n qualunque una famiglia di ∞^1 V_{n-1} per mezzo della congruenza delle sue traiettorie ortogonali. Indicando con $\lambda_r \equiv \lambda_{n/r}$ il sistema coordinato covariante di tale congruenza, perchè le V_{n-1} siano geodetiche occorre e basta che la equazione

$$\sum_1^n{}_r \, \lambda_{n/r} \, x'_r = 0$$

sia un integrale particolareggiato della equazione delle geodetiche di V_n. Considerando poi la congruenza data [n] come associata ad altre $n-1$ congruenze [1], [2], ... [$n-1$] costituenti con essa in V_n una ennupla ortogonale, quelle condizioni sono rappresentate (M, V, 2) dalle equazioni

$$\gamma_{nij} + \gamma_{nji} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \ldots n-1).$$

Ricordando altresì (M, II, 10) che le condizioni di normalità della congruenza [n] sono espresse dalle

$$\gamma_{nij} = \gamma_{nji}$$

si riconosce che le precedenti equivalgono alle

$$\gamma_{nij} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \ldots n-1). \tag{3}$$

Queste poi [1] per $j \neq i$ ci dicono che considerando le V_{n-1} come immerse in V_n, ogni linea tracciata sopra una V_{n-1} può riguardarsi come linea di curvatura di questa. Per $j = i$ esse ci dicono invece che le curvature principali delle V_{n-1} sono tutte nulle. Rimangono così estese alle superficie geodetiche di una varietà qualunque delle proprietà ben note dei piani dello spazio ordinario.

Le equazioni stabilite sopra ci dicono ancora che la famiglia di superficie ortogonale alla congruenza [n] fa parte di infiniti sistemi n^{upli} ortogonali di V_n. Si indichi con x_n un parametro della famiglia di superficie

[1] Cfr. Ricci, *Dei sistemi di congruenze ortogonali* ecc., nel vol. II, serie 5ª delle Memorie della Classe di scienze fisiche di questa R. Accademia.

ortogonali alla congruenza $[n]$; con $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ quelli di altre $n-1$ famiglie costituenti con essa in V_n una ennupla ortogonale e sia

$$ds^2 = H_1^2\, dx_1^2 + H_2^2\, dx_2^2 + \cdots + H_n^2\, dx_n^2$$

la corrispondente espressione del ds^2 di V_n. Le equazioni (3) assumono la forma

$$\frac{\partial H_1}{\partial x_n} = \frac{\partial H_2}{\partial x_n} = \cdots = \frac{\partial H_{n-1}}{\partial x_n} = 0 .$$

Data la espressione di un ds^2 in coordinate ortogonali, abbiamo così un criterio assai semplice per riconoscere se e quali delle famiglie coordinate risultano di superficie geodetiche.

3. Riprendiamo ora le considerazioni esposte nella mia Nota sulle *Formole fondamentali nella teoria delle varietà e della loro curvatura*. Considerando ancora una varietà V_{n+m} ed una V_n in essa contenuta siano

$$\psi = \sum_{1}^{n+m}{}_{uv}\, c_{uv}\, dy_u\, dy_v$$

$$\varphi = \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

le espressioni dei loro elementi lineari in coordinate generali. Sia poi ξ_u il sistema coordinato covariante di una congruenza di linee tracciate in V_{n+m} per modo che una sua linea passante per un punto qualunque di V_n giaccia tutta in V_n. Le linee di questa congruenza passanti per punti di V_n costituiranno una congruenza di V_n, di cui indicheremo con $\lambda^{(r)}$ il sistema coordinato controvariante. Varranno così le relazioni

$$\xi_u = \sum_{1}^{n}{}_{p}\, \lambda^{(p)} \sum_{1}^{n+m}{}_{v}\, c_{uv}\, y_{v/p} ,$$

le quali, derivate tenendo conto delle (II) della Nota citata, dànno

$$\frac{\partial \xi_u}{\partial x_r} - \sum_{1}^{n+m}{}_{vw}\, c_{uv,w}\, y_{v/r} = \sum_{1}^{m}{}_{\alpha}\, z_{\alpha/u} \sum_{1}^{n}{}_{s}\, \lambda^{(s)}\, b_{\alpha/rs} + \sum_{1}^{n}{}_{ps}\, \lambda^{(ps)}\, a_{rp} \sum_{1}^{n+m}{}_{v}\, c_{uv}\, y_{v/s} ;$$

e conseguentemente, indicando con ξ_{uv} il primo sistema derivato covariantemente secondo ψ dal sistema ξ_u,

$$\sum_{1}^{n+m}{}_{v}\, \xi^{(v)}\, \xi_{uv} = \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, \lambda^{(r)} \lambda^{(s)} \sum_{1}^{m}{}_{\alpha}\, z_{\alpha/u}\, b_{\alpha/rs} + \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, \lambda^{(rs)}\, \lambda_s \sum_{1}^{n+m}{}_{v}\, c_{uv}\, y_{v/r} .$$

Poichè

$$\sum_{1}^{n+m}{}_{v}\,\xi^{(v)}\,\xi_{uv}=0\,,\quad \sum_{1}^{n}{}_{s}\,\lambda^{(rs)}\,\lambda_s=0$$

sono rispettivamente per V_{n+m} e V_n le equazioni delle congruenze geodetiche, le formole stabilite ci permettono di concludere che

« Perchè una varietà V_n sia geodetica per V_{n+m} è necessario e basta « che siano soddisfatte le equazioni

$$b_{\alpha/rs}=0$$

« ovvero (N, (6)) le equivalenti

$$\omega_{\alpha hk}=0 \text{ »}.$$

Introducendo queste condizioni nelle equazioni (A), (B′), (C) e (D) della Nota più volte citata, queste assumono la forma

$$\text{(A)}\qquad y_{u/r}=\sum_{1}^{u}{}_{i}\,\xi_i^{(u)}\,\lambda_{i/r}$$

$$\text{(B)}\qquad \frac{\partial \xi_{h/u}}{\partial s_k}=-\sum_{1}^{n}{}_{i}\,\gamma_{ihk}\,\xi_{i/u}+\sum_{1}^{n+m}{}_{vw}\,c_{uv,w}\,\xi_h^{(w)}\,\xi_k^{(v)}$$

$$\text{(C)}\qquad \sum_{1}^{n+m}{}_{uu'vv'}\,c_{uu',vv'}\,\xi_h^{(u)}\,\xi_i^{(u')}\,\xi_j^{(v)}\,\xi_k^{(v')}=\sum_{1}^{n}{}_{pr,st}\,a_{pr,st}\,\lambda_h^{(p)}\,\lambda_i^{(r)}\,\lambda_j^{(s)}\,\lambda_k^{(t)}$$

$$\text{(D)}\qquad \sum_{1}^{n+m}{}_{uu'vv'}\,c_{uu',vv'}\,z_\alpha^{(u)}\,\xi_i^{(u')}\,\xi_j^{(v)}\,\xi_k^{(v')}=0.$$

$$(h\,,k\,,i\,,j=1\,,2\,,\ldots n\,;\quad \alpha=1\,,2\,,\ldots m).$$

Ne segue che, data intrinsecamente la varietà V_{n+m} per mezzo del suo ds^2, per determinare le varietà geodetiche V_n in essa contenute, converrà prima di tutto determinare tutte le forme φ ad n variabili, per le quali il sistema (A, B, C, D) risulta integrabile. Per ogni φ così determinata la integrazione di questo sistema darà poi tutte le superficie geodetiche V_n immerse in V_{n+m} ed aventi φ come espressione del proprio ds^2. Ricordiamo che, determinata φ, debbono riguardarsi come incognite le funzioni y_u, nonchè le $\xi_{1/u}\,,\xi_{2/u}\,,\ldots\xi_{n/u}$; e le $z_{1/u}\,,z_{2/u}\,,\ldots z_{m/u}$; e che al sistema ricordato sopra debbono considerarsi aggiunte le equazioni, cui debbono soddisfare le ξ e z testè ricordate perchè possano riguardarsi come sistemi coordinati covarianti di una $(n+m)^{\text{upla}}$ ortogonale di congruenze di V_{n+m}. Invece le $\lambda_{1/r}\,,\lambda_{2/r}\,,\ldots\lambda_{n/r}$ sono i sistemi coordinati covarianti di n congruenze costituenti in V_n una $n.^{\text{upla}}$ ortogonale e del resto qualunque. Ricordiamo ancora che le condizioni di integrabilità delle (A) e (B) sono contenute nelle (C) e (D) talchè noi dovremo preoccuparci soltanto di quelle di queste ultime equazioni.

4. Stabilite le equazioni del problema proposto in generale, proponiamoci in particolare di riconoscere per ogni varietà V_3 data intrinsecamente per mezzo del suo ds^2, se essa contiene delle superficie geodetiche V_2; e, nel caso affermativo, di determinare tutte queste V_2. Tenendo conto dei risultati del § 2, le quante volte noi riesciremo a determinare in una V_3 le traiettorie ortogonali di una possibile famiglia di ∞^1 superficie geodetiche, sapremo anche riconoscere se questa esista o non esista; nel caso affermativo poi il determinarne le equazioni in termini finiti dipenderà dalla risoluzione di un ben noto problema di calcolo integrale. Perciò, quando risulti determinato il sistema coordinato di quelle traiettorie, il problema potrà riguardarsi come risoluto per quanto riguarda la famiglia di superficie geodetiche ad esse normali, se una tale famiglia esista.

Premesso ciò, osserviamo che nel caso nostro, cioè per $m=1$ ed $n=2$, le equazioni (C) e (D) assumono rispettivamente la forma

$$\text{(C}'\text{)}\qquad \sum_{1}^{3}{}_{uv}\, \alpha^{(uv)} z_u z_v = \mathrm{K}$$

$$\text{(D}'\text{)}\qquad \sum_{1}^{3}{}_{uv}\, \alpha^{(uv)} z_u \xi_{i/v} = 0 \qquad (i=1\,,2)\,,$$

K essendo l'invariante di Gauss relativo a φ ed $\alpha^{(uv)}$ il sistema triplo controvariante, che, come ricordammo, per $n=3$ può essere sostituito ai simboli di Riemann.

Designando con ω una indeterminata, le (D') equivalgono alle

$$\sum_{1}^{3} \left(\alpha^{(uv)} - \omega c^{(uv)}\right) z_u = 0\,,$$

che sono le equazioni delle congruenze principali di V_3. Dunque

« Se in una V_3 esistono delle famiglie di ∞^1 superficie geodetiche, le « traiettorie ortogonali di una qualunque di queste famiglie costituiscono una congruenza principale di V_3 ».

Siano $\xi_{1/u}\,, \xi_{2/u}\,, \xi_{3/u}$ i sistemi coordinati di tre congruenze principali di V_3 fra loro ortogonali due a due, $\omega_1\,, \omega_2\,, \omega_3$ le corrispondenti curvature riemanniane principali di V_3, talchè si abbia

$$\alpha_{uv} = \sum_{1}^{3}{}_{i}\, \omega_i\, \xi_{i/u}\, \xi_{i/v}$$

e si ponga $z_u = \xi_{3/u}$. La (C') ci dà

$$K = \omega_3$$

e ci dice cosa già nota, perchè insita nel concetto di curvatura riemanniana, e cioè che per una direzione qualunque questa coincide colla curvatura gaussiana della superficie geodetica ad essa normale. Tenendo conto di questa proprietà, rimane senz'altro soddisfatta la (C'), come lo è la (D') assumendo come congruenza z_u delle traiettorie normali ad una famiglia di superficie geodetiche una congruenza principale di V_3.

5. Si supponga dapprima $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$. Pel teorema di Schur il valore comune delle tre curvature riemanniane principali di V_3 sarà costante e, designandolo con K, pel teorema del paragrafo precedente sarà pure eguale a K l'invariante di Gauss relativo al ds^2 di ogni superficie geodetica tracciata in V_3. Con ciò questo ds^2 rimane determinato a meno di trasformazioni puntuali e risulta identicamente soddisfatta la (C') e così pure la (D'), poichè ogni congruenza di V_3 può in questo caso assumersi come principale. Rimangono quindi da soddisfare le equazioni (A) e (B), le quali di per sè costituiscono un sistema completo. Il sistema integrale generale di tale sistema dipende da sei costanti arbitrarie, che possono determinarsi in modo che una superficie geodetica passi con orientazione arbitraria per un punto arbitrario di V_3. Ritroviamo così i risultati ben noti relativi allo spazio ordinario euclideo o no.

6. In secondo luogo si suppongano due curvature riemanniane principali eguali fra di loro e la terza distinta, talchè, posto

$$\omega_2 = \omega_3 = \omega\,;$$

sia $\omega_1 \neq \omega$ e si indichi con $\nu_u \equiv \nu_{1/u}$ la congruenza principale corrispondente ad ω_1.

Potremo riconoscere (§ 2) se esista una famiglia di ∞^1 superficie geodetiche, che taglino ortogonalmente la congruenza [1]. Ci rimane quindi da stabilire se e sotto quali condizioni esistano delle famiglie di superficie geodetiche, che taglino ortogonalmente una delle ∞^1 congruenze principali corrispondenti alla curvatura ω, le quali sono tutte e soltanto quelle normali alla (1). Indicando ancora con K l'invariante di Gauss relativo al ds^2 di una qualunque delle superficie geodetiche cercate, le equazioni (C') e (D') per le cose dette sopra, assumono la forma

$$(C_1) \qquad K = \omega$$

$$(D_1) \qquad \sum_{1}^{3}{}_u\, \nu^{(u)} z_u = 0\,.$$

Richiamiamo le espressioni delle $z_{u/r}$, le quali (N (4)) assumono nel nostro caso la forma

$$z_{u/r} = \sum_{1}^{3}{}_{vw}\, z^{(w)}\, c_{uv,w}\, y_{v/r}$$

e sostituiamole nelle equazioni, che scendono per derivazione dalle (D_1). Tenendo conto altresì delle (A) e indicando con γ una indeterminata perveniamo così alle

$$\text{(4)} \qquad \sum_{1}^{3}{}_{vw}\, \nu^{(vw)}\, c_{uw}\, z_v = \gamma z_u \,.$$

Se queste sono indipendenti dalla (D_1), esse determinano la congruenza delle traiettorie ortogonali di una possibile famiglia di superficie geodetiche. Prescindendo, per ragioni già dette, da questo caso, le (4) assumono la forma

$$\text{(4')} \qquad \nu_{uv} = -\gamma(c_{uv} - \nu_u \nu_v) \,.$$

Associamo alla congruenza $\nu_{1/u}$ altre due congruenze $\nu_{2/u}$ e $\nu_{3/u}$ costituenti con essa in V_3 una tripla ortogonale, poniamo

$$\nu_{i/uv} = \sum_{1}^{3}{}_{hk}\, \gamma'_{ihk}\, \nu_{h/u}\, \nu_{h/v} \qquad (1\,, u\,, v = 1\,, 2\,, 3)$$

e confrontiamo colle (4') le espressioni delle ν_{uv} date da queste per $i = 1$. Perveniamo così alle

$$\text{(5)} \qquad \gamma'_{123} = \gamma'_{132} = \gamma'_{121} = \gamma'_{131} = 0$$

$$\text{(6)} \qquad \gamma'_{122} = \gamma'_{133} = -\gamma \,.$$

Ricordiamo ancora (M, II, 4) che, indicando con s'_h l'arco delle linee della congruenza $[h]$, e ponendo

$$\gamma_{hi,kl} = \frac{\partial \gamma'_{hik}}{\partial s'_l} - \frac{\partial \gamma'_{hil}}{\partial s'_k} + \sum_{1}^{3}{}_j\, \gamma'_{hij}\,(\gamma'_{jkl} - \gamma'_{jlk}) + \sum_{1}^{3}{}_j\,(\gamma'_{ihl}\,\gamma'_{jik} - \gamma'_{jhk}\,\gamma'_{jil})$$

$$\gamma_{hk} = \gamma_{h+1h+2,k+1k+2}$$

valgono le relazioni

$$\gamma_{21} = \gamma_{31} = 0 \quad , \; \gamma_{22} = \gamma_{33} = \omega \,;$$

da cui seguono le

$$\text{(7)} \qquad \frac{\partial \gamma}{\partial s'_1} = \omega + \gamma^2 \;, \; \frac{\partial \gamma}{\partial s'_2} = \frac{\partial \gamma}{\partial s'_3} = 0 \,.$$

Le (5) ci dicono che la congruenza [1] deve essere geodetica; e che le ν_u sono le derivate di una funzione ν rispetto alle y_u e di più che due congruenze qualunque [2], [3] formanti in V_3 con la [1] una tripla ortogonale costituiscono rispetto ad essa un sistema canonico (M, II, 3); il che si esprime dicendo che la congruenza [1] è isotropa. Da questa proprietà della congruenza [1] segue poi la prima delle (6), la quale ci dice che sono eguali fra di loro le curvature principali delle superficie normali alla congruenza [1] considerate come contenute in V_3. Le (7) infine ci dicono che γ è funzione della sola ν, come lo è (§ 1) ω.

Dalla isotropia della congruenza [1] segue anche che in V_3 le superficie di parametro ν fanno parte di infiniti sistemi tripli ortogonali. Assumiamo in V_3 come coordinate x_1, x_2, x_3 uno di questi sistemi ortogonali prendendo $x_1 = \nu$. Il ds^2 di V_3 assumerà una espressione della forma

$$\psi = dx^2_1 + H^2_2\, dx^2_2 + H^2_3\, dx^2_3 .$$

Le (6) poi danno

$$\frac{\partial \log H_2}{\partial x_1} = \frac{\partial \log H_3}{\partial x_1} = -\gamma$$

e, assieme alla (7) ci dicono che la espressione di ψ si può ridurre alla forma

$$\psi = dx^2_1 + X\,\psi_1 ,$$

X essendo funzione della sola x_1 e ψ_1 un ds^2 a due variabili x_2 ed x_3. Questa espressione di ψ non differisce essenzialmente da quella del sig. Hadamard, e però possiamo concludere che le condizioni (5), quando si intendano soddisfatte per ogni dupla [2] [3] formante colla congruenza [1] una tripla ortogonale, sono necessarie e sufficienti perchè la varietà V_2 sia tale che per ogni suo punto passi una semplice infinità di superficie geodetiche.

7. A questi stessi risultati completandoli possiamo giungere fondandoci unicamente sulle formole stabilite nei paragrafi precedenti. Perciò osserviamo che, come risulta dalla equazione (D_1), la congruenza [1] è tale che ogni sua linea, la quale passi per un punto di una V_2, giace tutta in questa. Possiamo quindi assumere

$$(8)\qquad \begin{cases} \xi_{1/u} = \nu_{1/u} \\ \xi_{2/u} = \cos\vartheta\, \nu_{2/u} + \operatorname{sen}\vartheta\, \nu_{3/u} , \end{cases}$$

designando così con ϑ l'angolo delle linee della congruenza $\xi_{2/u}$ con quelle della $\nu_{2/u}$. Dovendo poi la congruenza z_u esser normale alle superficie V_2 e quindi tanto alla congruenza $\xi_{1/u}$ quanto alla $\xi_{2/u}$, avremo per le z_u le espressioni

$$z_u = -\operatorname{sen}\vartheta\, \nu_{2/u} + \cos\vartheta\, \nu_{2/u} .$$

Da queste la equazione (D_1) essendo identicamente soddisfatta, rimangono da soddisfare, oltre alla (C_1), le (A), che per le (8) assumono la forma

$$(A_1) \qquad y_{u/r} = \nu_1^{(u)} \lambda_{1/r} + (\cos\vartheta\, \nu_2^{(u)} + \operatorname{sen}\vartheta\, \nu_3^{(u)})\, \lambda_{2/r}$$

e le (B). Queste poi, tenuto conto ancora delle (8), ed indicando con s_1 ed s_2 gli archi delle linee delle congruenze $\xi_{1/u}$ e $\xi_{2/u}$, assumono la forma

$$(B') \qquad \gamma_{211} = 0$$

$$(B'') \qquad \gamma_{212} = \gamma$$

$$(B_1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\vartheta}{\partial s_1} = \gamma'_{321} \\[2ex] \dfrac{\partial\vartheta}{\partial s_2} = \gamma'_{322}\cos\vartheta + \gamma'_{323}\operatorname{sen}\vartheta\,. \end{cases}$$

Osserviamo che le condizioni di integrabilità delle (B_1) risultano soddisfatte, tenendo conto delle (5) (6) e (7); e che dalla (B') e dalle (7) segue la

$$(9) \qquad \frac{\partial\gamma_{122}}{\partial s_2} = 0\,.$$

8. La (B') e la (9) ci dicono che nelle varietà V_2 le linee [1] sono insieme geodetiche ed isoterme, dal che segue che queste varietà sono applicabili sopra superficie di rotazione e che le linee [1] e [2] sono in esse le deformate dei meridiani e dei paralleli.

Ricordando che ω e γ sono funzioni della sola ν, e avendo presente la (B'') si riconosce che, se si assumono nelle V_2 come coordinate le linee [1] di parametro ν e le loro traiettorie ortogonali [2], la espressione del ds^2 delle V_2 assume la forma

$$(\alpha) \qquad \varphi = d\nu^2 + G(\nu)\, dv^2\,.$$

essendo

$$(10) \qquad \frac{\partial \log\sqrt{G}}{\partial\nu} = -\gamma$$

e quindi

$$G = e^{2\int\gamma d\nu}\,.$$

Dunque φ è determinata a meno di trasformazioni puntuali e per conseguenza tutte le V_2 sono applicabili fra di loro.

Ritenendo ora φ espressa in coordinate generali $x_1\, x_2$, assumiamo come congruenza $\lambda_{1/r}$ quella di parametro ν, con che la equazione (B') sarà identicamente soddisfatta, e poniamo

$$(B_3) \qquad \nu(x_1\, x_2) = \nu(y_1\, y_2\, y_3)$$

Questa derivata, tenendo conto delle (A_1), ci dà le

$$\nu_r = \lambda_{1/r}.$$

che risultano identicamente soddisfatte per la espressione (a) di φ. Tenendo conto di questa, della (B_0) e della (10) risultano pure identicamente soddisfatte le (B'), (B'') e (C_1) ricordando, per ciò, che riguarda, quest'ultima, anche la prima delle (7) e la nota formola di Liouville applicata al sistema di coordinate ν e v. Il sistema completo da integrare per determinare le superficie geodetiche di V_3 corrispondenti alla curvatura principale ω, risulta dunque delle (A_1), delle (B_1) e della (B_0). Il suo sistema integrale generale è tale che per valori iniziali arbitrarî a_1 e b_1 di x_1 ed x_2, ϑ può assumere valori affatto arbitrarî, mentre i valori iniziali corrispondenti di $y_1\, y_2\, y_3$ debbono soddisfare alla equazione

$$(\nu y_1\, y_2\, y_3) \equiv \nu\,(a_1\, b_1).$$

Però, poichè si possono fissare i valori di a_1 e b_1 in modo che la superficie rappresentata da quest'ultima equazione passi per un punto arbitrario di V_3, è sempre possibile far passare per un tal punto una superficie geodetica V_2 la cui normale sia arbitrariamente orientata nella giacitura piana di V_3 normale alla congruenza [1].

Se si suppone ω costante, lo è pure K per la (C_1) e φ ammette ∞^3 trasformazioni in sè stessa, per le quali ogni punto P di V_2 si può portare nella posizione primitivamente occupata da un punto prefissato qualunque. Ciò significa che, fissati i valori a_1 e b_1 di x_1 ed x_2, noi possiamo ad essi far corrispondere un punto qualunque P di σ; dal che e dalle considerazioni fatte sopra, segue che, fissato un punto P_0 in V_3 ed un punto P in V_2, si può sempre far passare per P_0 una superficie V_2 in modo che P coincida con P_0. Se invece ω e quindi K sono variabili, fissato il punto P_0, i punti P di V_2, che possono farsi coincidere con P_0, costituiscono una semplice infinità.

Astronomia. — *Osservazioni dei pianetini LT ed LU Dugan 1903 fatte all'equatoriale di 39 cm. del R. Osservatorio del Collegio Romano.* Nota del Corrispondente E. MILLOSEVICH.

Il pianetino LT Dugan 1903 di 12ma, con probabilità, è identico a (392) Wihelmina scoperto da M. Wolf il 4 novembre 1894. L'accertamento dell'identità si avrà fra breve.