ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCC.

1903

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1903

Matematica. — *Ricerche gruppali relative alle equazioni della dinamica.* Nota I di GUIDO FUBINI, presentata dal Socio LUIGI BIANCHI.

Il presente lavoro consta di tre Note: la prima Nota studia in generale quei problemi dinamici, le cui forze ammettono un potenziale, e i cui fasci di traiettorie (insieme di traiettorie corrispondenti a uno stesso valore della costante delle forze vive) sono permutati tra loro da un gruppo di Lie; la seconda determina effettivamente quelli di questi problemi con tre coordinate libere; la terza studia i problemi dinamici, le cui equazioni differenziali di Lagrange (definenti i movimenti) ammettono un gruppo di Lie. Quest'ultimo problema è un caso particolare di quello che io ho già risoluto [1]; ma rientra proprio tra quei casi eccezionali che non ho lì considerato in generale. Di questi problemi e specialmente del primo già si occuparono Stäckel, Liouville, Painlevé nei Comptes Rendus (1890-95) e nei Leipziger Berichte (1893-97); ambedue queste ricerche e specialmente la seconda danno casi, in cui l'integrazione del problema stesso si può affrontare con i metodi di Lie.

La maggiore difficoltà (dice Painlevé) non è di trovare i problemi con un gruppo a un parametro, ma addirittura i problemi con gruppi a più parametri.

Lo Stäckel studia principalmente il primo dei problemi precedenti con mezzi, che a lui stesso sembrano lunghi e faticosi (Leip. Ber. 1897), nè in questa ricerca va più in là dei gruppi a due parametri. Nel presente lavoro con nuovi procedimenti di una grandissima semplicità e valendomi dei risultati e dei procedimenti di altri miei lavori indicherò come si possa procedere alla risoluzione completa dei due problemi precedenti. Nel primo di questi due problemi (unico che sia stato affrontato dallo Stäckel) lo Stäckel non considera il caso che i fasci di traiettorie coincidano, ossia che la funzione potenziale sia costante. Questo è infatti il caso più difficile, che richiede particolari artifizi e neppure noi ce ne occuperemo, perchè esso si trova completamente risoluto nella mia Memoria: *Sui gruppi di trasformazioni geodetiche* (Memorie dell'Accademia di Torino, 1903).

1. Cominciamo ora dal primo dei due problemi precedenti. Siano x_i $(i=1,2,\ldots,n)$ le coordinate libere, t il tempo, U la funzione potenziale, $\sum_1^n a_{ik}\frac{dx_i\,dx_k}{dt^2}$ la forza viva; la U e le a_{ik} non dipendano da t. Noi

[1] *Sui gruppi di trasformazioni geodetiche*. Memorie dell'Acc. di Torino, 1903.

indicheremo con $(\Sigma a_{ik}\, dx_i\, dx_k\, , \mathrm{U})$ il nostro problema dinamico; i fasci di traiettorie non sono che le geodetiche degli spazi di cui $(\mathrm{U}+h)\Sigma a_{ik}\, dx_i\, dx_k$ ($h = \mathrm{cost}$) è l'elemento lineare. Come dimostrò Painlevé (*Sur les transformations des équations de la Dynamique*. Journal de Mathématiques, 1894, pag. 77) se tra due problemi dinamici

$$(\Sigma a_{ik}\, dx_i\, dx_k\, , \mathrm{U}) \qquad (\Sigma b_{ik}\, dx_i\, dx_k\, , \mathrm{V})$$

si corrispondono i fasci di traiettorie allora si può passare dall'uno all'altro per mezzo di una trasformazione di Darboux, o, in altre parole, si hanno delle relazioni

$$(\alpha\delta - \beta\gamma \mp 0) \quad \mathrm{V} = \frac{\gamma \mathrm{U} + \delta}{\alpha \mathrm{U} + \beta} \qquad \Sigma b_{ik}\, dx_i\, dx_k = (\alpha \mathrm{U} + \beta)\, \Sigma a_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

dove α, β, γ sono costanti. Allora chiaramente il fascio di traiettorie ([1]) $(\mathrm{U}+h)\, \Sigma a_{ik}\, dx_i\, dx_k$ è identico col fascio di traiettorie $(\mathrm{V}+k)\, \Sigma b_{ik}\, dx_i\, dx_k$ relative al secondo problema, dove sia

$$h = \frac{\delta + k\beta}{\gamma + k\alpha} \quad \text{ossia} \quad -k = \frac{\delta - \gamma h}{\beta - \alpha h}.$$

Per esprimere perciò che una trasformazione infinitesima $\Sigma_r\, \xi_r \dfrac{\partial}{\partial x_r}$ trasforma in sè i fasci di traiettorie di un problema dinamico

$$(1) \qquad (ds^2 = \Sigma a_{ik}\, dx_i\, dx_k\, , \mathrm{U})$$

basta esprimere che lo muta in un suo trasformato di Darboux: e perciò in primo luogo che trasforma proiettivamente la U (ossia che trasformi le varietà $\mathrm{U} = \mathrm{cost}$ proiettivamente e imprimitivamente) e che trasforma in modo conforme la forma quadratica $\Sigma a_{ik}\, dx_i\, dx_k$. Anzi, poichè questa forma quadratica deve diventar moltiplicata per un'espressione $\alpha \mathrm{U} + \beta$ ($\alpha = \mathrm{cost}$, $\beta = \mathrm{cost}$) troveremo intanto:

$$\mathrm{X(U)} = \lambda + \mu \mathrm{U} + \nu \mathrm{U}^2 \;;\; \mathrm{X}(\Sigma a_{ik}\, dx_i\, dx_k) = (\tau \mathrm{U} + \sigma)\, \Sigma a_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

dove $\lambda, \mu, \nu, \tau, \sigma$ sono costanti. Di più si deve esprimere che se U è trasformato dalla $\begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ allora ds^2 resta moltiplicato proprio per $\alpha \mathrm{U} + \beta$. Basta a tale scopo esprimere che anche $\mathrm{U}ds^2$ resta moltiplicato per un fattore lineare in $\dfrac{1}{\mathrm{U}}$ ossia, indicando con ε, η due costanti che $\mathrm{X}(\mathrm{U}ds^2) = (\varepsilon \mathrm{U} + \eta)\, ds^2$;

([1]) Con questa notazione intendiamo chiaramente le geodetiche relative all'elemento lineare $(\mathrm{U}+h)\, \Sigma a_{ik}\, dx_i\, dx_k$.

poichè ora

$$X(U ds^2) = X(U)\, ds^2 + U\, X(ds^2) = [(\lambda + \mu U + \nu U^2) + U(\tau U + \sigma)]\, ds^2$$

se ne deduce $\tau = -\nu$. Abbiamo perciò le equazioni:

$$(2) \quad X(U) = \lambda + \mu V + \nu U^2 \qquad X(\Sigma a_{ik}\, dx_i\, dx_k) = -(\nu U + \sigma)\, \Sigma a_{ik}\, dx_i\, dx_k .$$

Sono queste le equazioni a cui deve soddisfare la X, equazioni tanto più semplici delle complicatissime equazioni dello Stäckel. Queste equazioni ci danno senz'altro i seguenti teoremi, che si possono dire i teoremi fondamentali per la risoluzione del nostro problema:

Le trasformazioni infinitesime del nostro gruppo che lasciano fisse le superficie equipotenziali ($U = \text{cost}$) [1] *sono trasformazioni simili per lo spazio, il cui elemento lineare è* $ds^2 = \Sigma a_{ik}\, dx_i\, dx_k$.

Questo teorema è senz'altro evidente per la $\nu = 0$.

Per trovare tutti i nostri problemi dinamici, basta determinare quegli elementi lineari $ds^2 = \Sigma a_{ik}\, dx_i\, dx_k$ *che ammettono un gruppo* G *conforme possedente un sistema di superficie* $U = \text{cost}$ *come sistema di superficie di imprimitività; quel sottogruppo* Γ *di* G *per cui sono soddisfatte le* (2) *è il gruppo corrispondente al problema* (ds^2, U); *in questo modo si trovano tutti i problemi cercati e i gruppi corrispondenti.*

Questo teorema è per la (2) pure evidente senz'altro; e dai risultati della mia Nota (*Sui gruppi conformi.* Atti dell'Accademia di Torino, 1903) si trae perciò subito:

La ricerca dei nostri problemi e dei gruppi corrispondenti sotto forma finita si sa eseguire con sole quadrature. Due trasformazioni infinitesime distinte del nostro gruppo hanno traiettorie distinte.

Se noi non consideriamo come distinti, ciò che pare opportuno fare nel nostro caso, due problemi dinamici, riconducibili l'uno all'altro con una trasformazione di Darboux, possiamo ancora dire:

I problemi dinamici (ds^2, U) *che ammettono una trasformazione infinitesima* X *coincidono con quei problemi per cui* ds^2 *ammette* X *come trasformazione simile e le varietà* $U = \text{cost}$ *sono trasformate imprimitivamente da una trasformazione lineare non fratta.*

Infatti con una trasformazione di Darboux, possiamo far sempre che le $U = \text{cost}$ vengano da X trasformate con una trasformazione non fratta, ossia che $\nu = 0$; allora X per le (2) sarà simile per gli spazi di cui ds^2 è l'elemento lineare.

Quest'ultimo teorema fu già enunciato da Stäckel, che però dice soltanto, meno completamente di quanto è qui fatto, che X deve essere per ds^2

[1] Ciò equivale a dire che per esse è $\lambda = \mu = \nu = 0$.

geodetica e conforme; e, per una svista, dimentica di dire che U deve essere trasformato da una sostituzione *non fratta*.

2. Nei precedenti teoremi si trova già risoluto il nostro problema; ma per indicare la via più rapida per la effettiva risoluzione, indicheremo un mezzo con cui si possono ancora semplificare le equazioni fondamentali. Poichè $U \neq \text{cost}$ prendiamo le varietà $U = \text{cost}$ come superficie coordinate $x_1 = \text{cost}$; sia $ds^2 = \Sigma a_{ik}\, dx_i\, dx_k$ il nostro solito elemento lineare. Nella metrica definita da questo elemento lineare consideriamo le traiettorie ortogonali delle varietà equipotenziali $x_1 = \text{cost}$; e scegliamo i parametri $x_2, x_3, \ldots, x_n$ in modo che queste traiettorie sieno precisamenle le $x_2 = \text{cost}, \ldots, x_n = \text{cost}$ [1]. Sarà perciò $a_{12} = a_{13} = \cdots = a_{1n} = 0$. Poichè di più, come sappiamo, il nostro gruppo è conforme per ds^2 e poichè le $x_1 = \text{cost}$ formano un sistema di imprimitività, anche queste traiettorie formano un sistema di imprimitività e perciò ogni trasformazione del nostro gruppo avrà la forma $\xi_1(x_1) \dfrac{\partial}{\partial x_1} + \sum\limits_2^n \xi_i(x_2, x_3, \ldots x_n) \dfrac{\partial}{\partial x_i}$. Poichè la x_1 è trasformata proiettivamente, avremo che ξ_1 è un polinomio di secondo grado in (x_1); per le (2) potremo scrivere che ogni trasformazione del nostro gruppo è del tipo:

$$\text{(3)} \qquad X = (\lambda + \mu x_1 + \nu x_1^2) \frac{\partial}{\partial x_1} + \sum_2^n \xi_i(x_2, \ldots x_n) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

mentre la forma quadratica è:

$$\text{(4)} \qquad ds^2 = a_{11}\, dx_1^2 + \sum_2^n a_{ik}\, dx_i\, dx_k .$$

E le equazioni fondamentali assumono la forma semplicissima:

$$\text{(5)} \qquad X(ds^2) = (-\nu x_1 + \sigma)\, ds^2$$

la quale, posto

$$\text{(6)} \qquad X(ds^2) = \Sigma a'_{ik}\, dx_i\, dx_k \quad \text{dove} \quad a'_{ik} = \Sigma_r \left(\xi_r \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_r} + a_{ir} \frac{\partial \xi_r}{\partial x_k} + a_{kr} \frac{\partial \xi_r}{\partial x_i} \right)$$

diventa:

$$\text{(7)} \qquad a'_{ik} = (-\nu x_1 + \sigma)\, a_{ik}$$

che noi chiameremo equazioni di Killing generalizzate. E troviamo così: *Per trovare tutti i nostri problemi, basta determinare tutti gli elementi lineari* (4), *e i gruppi formati da trasformazioni del tipo* (3), *per cui valgono le* (7).

Se G è il gruppo, esso conterrà un sottogruppo Γ che lascia fisse

[1] D'ora in poi, quando parleremo di proprietà metriche, intenderemo sempre di riferirci alla metrica definita dall'elemento lineare $ds^2 = \Sigma a_{ik}\, dx_i\, dx_k$.

le $x_1 = \cos t$ (e quindi anche i singoli fasci di traiettorie) e che per le (7) non è altro che un gruppo di similitudini (*eventualmente ridotto all'identità*) per gli spazi, il cui elemento lineare è

$$(8) \qquad ds^2{}_1 = \sum_2^n a_{ik}\, dx_i\, dx_k .$$

Trovati perciò tutti gli elementi lineari (8), che ammettono un gruppo Γ di similitudini generato da r trasformazioni $X_1, X_2, \ldots, X_{r-1}, X_r$ per cui valgano le $X_i(ds^2) = \varepsilon_i\, ds^2$ ($\varepsilon_i = \cos t$) basterà poi trovare a_{11}, in modo che $X_i(a_{11}) = \varepsilon_i\, a_{11}$ per aver così determinato tutti i problemi dinamici che ammettono un gruppo Γ; questa determinazione per i risultati della mia Nota citata si sa fare completamente. Per determinare poi i problemi, per cui G trasforma le $x_1 = \cos t$ a un parametro basta tra i precedenti cercare quelli che ammettono una trasformazione $X = x^\varepsilon{}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \sum_2^n \xi_i(x_2 \ldots x_n) \frac{\partial}{\partial x_i}$ ($\varepsilon = 0$ oppure $\varepsilon = 1$) perchè noi non consideriamo distinti due problemi trasformati di Darboux. Se vogliamo cercare quelli il cui gruppo G trasforma le $x_1 = \cos t$ a due parametri dobbiamo cercare quelli tra i precedenti che ammettono tanto una trasformazione X per cui $\varepsilon = 0$, quanto una per cui $\varepsilon = 1$. Quelli di questi, che ammettono anche una trasformazione $x^2{}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \sum_2^n \xi_i(x_2 \ldots x_n) \frac{\partial}{\partial x_i}$ sono quelli, il cui gruppo G trasforma le $x_1 = \cos t$ a tre parametri. Aggiungerò ora una facile osservazione:

Se Γ non è tutto composto di puri movimenti per $ds^2{}_1$ e se ha $r > 1$ parametri, quel suo sottogruppo Γ' a $r - 1$ parametri [1] *di puri movimenti per $ds^2{}_1$ è certamente intransitivo nelle moltiplicità $(x_2 \ldots x_n)$ su cui opera.* E infatti se $X_1 \ldots X_{r-1}$ sono le sue trasformazioni generatrici, X_r è l'ulteriore trasformazione generatrice di Γ, sarà $X_i(ds^2{}_1) = 0$ ($i = 1, 2, .., r-1$); $X_r(ds^2{}_1) = h ds^2{}_1$ ($h = \cos t$). E per le (7) sarà $X_i(a_{11}) = 0$ ($i = 1, .., r = 1$), $X_r(a_{11}) = h a_{11}$. Poichè X_r non è un movimento, è $h \neq 0$; se Γ' fosse transitivo, sarebbe per le precedenti equazioni a_{11} indipendente dalle $x_2 \ldots x_n$, cosicchè sarebbe $X_r(a_{11}) = 0$ contro il supposto.

[1] Cfr. la mia Memoria citata.