ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCC.

1903

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1903

Fisica matematica. — *Sulla legge elementare di Weber relativa alle azioni elettrodinamiche di due cariche elettriche in movimento.* Nota I di Tommaso Boggio, presentata dal Corrispondente Ricci.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sul moto d'un sistema olonomo di corpi rigidi.* Nota I del dott. M. Contarini, presentata dal Socio V. Volterra.

Nella V Nota *Sul problema generale della sismografia* (¹) accennava a un grave equivoco che m'era sfuggito nei miei lavori precedenti dedicati allo stesso argomento; e correggendo intanto l'errore che ne conseguiva in uno dei risultati finali, prometteva di pubblicare in breve tempo una rettifica.

A questa appunto doveva limitarsi il presente lavoro; senonchè, analizzando meglio il problema (²) che mi aveva condotto alla teoria dei varî strumenti sismici, trovai che anche nella sua generalità esso era facilmente suscettibile d'un più ampio svolgimento e che anzi da una trattazione più completa di tale problema la teoria matematica dei sismografi poteva scendere più direttamente, evitando in gran parte le considerazioni che la sola rettifica avrebbe richieste.

Prendo dunque a studiare in questa Nota il moto di un *sistema olonomo* di corpi rigidi. In un'altra, o in altre successive, ridurrò il sistema così generale alla *catena* di corpi considerata nel lavoro testè citato; e ritroverò per via diversa, ma più esatta, le equazioni differenziali che reggono il moto dei varî strumenti sismici, correggendo così implicitamente l'errore cui prima accennava.

Per non rimandare continuamente il lettore alle precedenti pubblicazioni ripeto qui brevemente il significato dei simboli che verranno usati.

1. Chiamo: C_h $(h = 1, 2, \dots n)$ uno qualunque di n corpi rigidi *posti comunque nello spazio*; $S_h (x_h\, y_h\, z_h)$ un sistema d'assi cartesiani ortogonali solidali con esso; x_{hi}, y_{hi}, z_{hi} le coordinate (costanti) di un punto generico P_{hi} appartenente a C_h, riferite allo stesso sistema; $\xi_{hi}, \eta_{hi}, \zeta_{hi}$ le coordinate (variabili) del medesimo punto rispetto a un sistema cartesiano immobile $\Omega(\xi\, \eta\, \zeta)$ al quale vien riferito il movimento dei corpi. Al valore *zero* del-

(¹) Rendic. Accad. Lincei, vol. XI, 2° sem., serie 5ª, fasc. 4°, pag. 182.
(²) Ibid., 1° sem., fasc. 9°, pag. 380.

l'indice i farò sempre corrispondere l'origine del sistema mobile S_h; così

$$\left.\begin{array}{l} P_{h0} \equiv S_h . \\ x_{h0} = y_{h0} = z_{h0} = 0 . \end{array}\right\} (h = 1 , 2 , \ldots h , \ldots n) .$$

Chiamati $\alpha_{h1}, \alpha_{h2}, \alpha_{h3}$ i coseni degli angoli che l'asse delle ξ fa con gli assi delle x_h, y_h, z_h, e β_{hs}, γ_{hs} $(s = 1, 2, 3)$ i coseni analoghi, relativi all'asse delle η e a quello delle ζ, e fatte le posizioni:

$$(a) \qquad a_{hi} = \alpha_{h1} x_{hi} + \alpha_{h2} y_{hi} + \alpha_{h3} z_{hi} ; \; b_{hi} = \text{ecc.},$$

si sa che il movimento più generale del corpo C_h è rappresentato dalle equazioni

$$(1) \qquad \xi_{hi} = \xi_{h0} + a_{hi} \; ; \; \eta_{hi} = \text{ecc.}$$

e che, ponendo come al solito

$$(2) \qquad \delta\pi_h = \sum_1^3{}_s \, \beta_{hs} \, \delta\gamma_{hs} = - \sum_1^3{}_s \, \gamma_{hs} \, \delta\beta_{hs} \; ; \; \delta\chi_h = \sum_1^3{}_s \, \gamma_{hs} \, \delta\alpha_{hs} = \text{ecc.},$$

per le componenti d'uno spostamento virtuale del punto generico P_{hi} si trovano le note espressioni:

$$\delta\xi_{hi} = \delta\xi_{h0} + \delta\chi_h (\zeta_{hi} - \zeta_{h0}) - \delta\varrho_h (\eta_{hi} - \eta_{h0}) , \; \text{ecc.} ;$$

ossia, ricordando che per le (1) risulta

$$(1') \qquad \left\{ \begin{array}{c} a_{hi} = \xi_{hi} - \xi_{h0} \; ; \; b_{hi} = \eta_{hi} - \eta_{h0} \; ; \; c_{hi} = \zeta_{hi} - \zeta_{h0} , \\ (i , h , \text{ qualunque}) \end{array} \right.$$

le espressioni

$$(3) \qquad \delta\xi_{hi} = \delta\xi_{h0} + \delta\chi_h \, c_{hi} - \delta\varrho_h \, b_{hi} \; \text{ ecc.};$$

queste espressioni sostituite nell'equazione simbolica dei lavori virtuali che regge il moto del corpo C_h

$$\sum_{C_h}{}_i \left\{ (\Xi_{hi} - m_{hi} \, \xi''_{hi}) \, \delta\xi_{hi} + \text{ecc.} \right\} = 0 ,$$

la mettono sotto la forma

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{c} X_h \, \delta\xi_{h0} + Y_h \, \delta\eta_{h0} + Z_h \, \delta\zeta_{h0} + X^{(h)} \, \delta\pi_h + Y^{(h)} \, \delta\chi_h + Z^{(h)} \, \delta\varrho_h = 0 , \\ (h = 1 , 2 , \ldots , h , \ldots n) . \end{array} \right.$$

avendo posto per brevità

$$(b) \qquad \left\{ \begin{array}{l} X_h = \sum_{C_h}{}_i \, (\Xi_{hi} - m_{hi} \, \xi''_{hi}) ; \; \text{ecc.}, \\ X^{(h)} = \sum_{C_h}{}_i \left\{ b_{hi} \, (Z_{hi} - m_{hi} \, \zeta''_{hi}) - c_{hi} \, (H_{hi} - m_{hi} \, \eta''_{hi}) \right\} ; \; \text{ecc.} \end{array} \right.$$

2. Come è ben noto i nove coseni direttori $\alpha_{h1}, \alpha_{h2}, \ldots, \gamma_{h3}$, che definiscono le *rotazioni* del corpo C_h, sono legati fra loro da sei relazioni fondamentali; essi dunque possono considerarsi come funzioni di tre sole variabili indipendenti che rappresenterò con $\varphi_h, \psi_h, \omega_h$. Chiamando poi $\delta\varphi_h, \delta\psi_h, \delta\omega_h$ le loro variazioni arbitrarie, ricordando le (2) e osservando che le variazioni $\delta\alpha_{h1}, \ldots$ dei coseni si possono esprimere in funzioni lineari e omogenee di $\delta\varphi_h, \ldots$, è naturale che anche le *caratteristiche* $\delta\pi_h, \ldots$ sono funzioni lineari di $\delta\varphi_h, \ldots$; e si può scrivere

$$(5) \qquad \delta\pi_h = p_{h1}\,\delta\varphi_h + p_{h2}\,\delta\psi_h + p_{h3}\,\delta\omega_h\,;\quad \delta\chi_h = q_{h1}\,\delta\varphi_h + \text{ecc.},$$

rappresentando con $p_{h1}, \ldots, r_{h3}$ certe funzioni dei parametri $\varphi_h, \ldots$, che si potranno ritenere note *quando sia fissata la natura dei parametri stessi* [1], ma che in ogni caso soddisfanno alla condizione fondamentale

$$(6) \qquad D_h \equiv (p_{h1}\, q_{h2}\, r_{h3}) \gtrless 0\,.$$

Essendo soddisfatta questa condizione, il sistema (5) si può risolvere rispetto alle variazioni $\delta\varphi_h, \ldots$, le quali così prendono la forma

$$(5') \qquad \delta\varphi_h = P_{h1}\,\delta\pi_h + Q_{h1}\,\delta\chi_h + R_{h1}\,\delta\varrho_h\,;\quad \delta\psi_h = P_{h2}\,\delta\pi_h + \text{ecc.}$$

Nella (4) in luogo di $\delta\pi_h, \ldots$ si possono sostituire i secondi membri delle (5): ponendo allora

$$(c) \qquad x^{(h)} = p_{h1}\,X^{(h)} + q_{h1}\,Y^{(h)} + r_{h1}\,Z^{(h)}\,;\quad y^{(h)} = p_{h2}\,X^{(h)} + \text{ecc.},$$

la (4) si trasforma nella

$$(4') \qquad \begin{cases} X_h\,\delta\xi_{h0} + Y_h\,\delta\eta_{h0} + Z_h\,\delta\zeta_{h0} + x^{(h)}\,\delta\varphi_h + y^{(h)}\,\delta\psi_h + z^{(h)}\,\delta\omega_h = 0\,. \\ (h = 1, 2, \ldots, h, \ldots n)\,. \end{cases}$$

3. Finora, ammettendo l'esistenza di n equazioni distinte (4) o (4'), si è implicitamente supposto che gli n corpi C_h siano indipendenti fra loro. Ma se fra i corpi esiste qualche relazione, cosicchè essi formino un *sistema*, per il principio di D'Alembert deve essere nulla la *somma* dei lavori virtuali *estesa a tutti i punti materiali del sistema*, cioè la somma di tutte le espressioni (4) o (4') corrispondenti ai singoli corpi C_h; dunque la equazione simbolica, dalla quale si potranno poi dedurre le equazioni effettive

[1] Non sarà inutile rintracciare l'origine dell'equivoco ricordato in principio. Nella I Nota sulla determinazione dei moti sismici aveva rappresentato i parametri relativi alla rotazione dei varî corpi [tre rotazioni infinitesime successive intorno agli assi delle ξ, η, ζ] coi simboli π, χ, ϱ: quindi le loro variazioni arbitrarie venivano rappresentate coi simboli $\delta\pi, \ldots$ *identici ai simboli delle caratteristiche* (2), facendomi implicitamente ritenere

$$p_{h1} = q_{h2} = r_{h3} = 1$$

e tutti gli altri coefficienti analoghi nulli.

che definiscono il moto del sistema di corpi, deve essere della forma

$$(7) \qquad \sum_{1}^{n}{}_{h} (X_h \, \delta\xi_{h0} + \cdots + X^{(h)} \, \delta\pi_h + \cdots) = 0 ,$$

oppure

$$(7') \qquad \sum_{1}^{n}{}_{h} (X_h \, \delta\xi_{h0} + \cdots + x^{(h)} \, \delta\varphi_h + \cdots) = 0 .$$

Considero prima il tipo più generale di legami che rendono *olonomo* il sistema di corpi rigidi, cioè quei legami che possono essere rappresentati in termini finiti da equazioni della forma

$$f_u(t, \xi_{10}, \ldots, \zeta_{n0}, \varphi_1, \ldots, \omega_n) = 0 :$$

se di queste equazioni ne esistono $6n - m$ indipendenti, le variazioni virtuali dei $6n$ parametri $\xi_{h0}, \ldots, \varphi_h \ldots (h = 1, 2, \ldots n)$ sono definite dal sistema di equazioni

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \sum_{1}^{n}{}_{h} (A_{uh} \, \delta\xi_{h0} + B_{uh} \, \delta\eta_{h0} + C_{uh} \, \delta\zeta_{h0}) + \\ & + \sum_{1}^{n}{}_{h} (A^{(uh)} \, \delta\varphi_h + B^{(uh)} \, \delta\psi_h + C^{(uh)} \, \delta\omega_h) = 0 , \quad (u = 1, 2, \ldots, n - m), \end{aligned} \right.$$

nelle quali per brevità si è posto

$$(d) \qquad A_{uh} = \frac{\partial f_u}{\partial \xi_{h0}} ; \text{ ecc.} ; \; A^{(uh)} = \frac{\partial f_u}{\partial \varphi_h} , \text{ ecc.} ;$$

cioè hanno le espressioni:

$$(8_1) \qquad \delta\xi_{h0} = \sum_{1}^{m}{}_{s} L_{hs} \, e_s , \quad \delta\eta_{h0} = \sum_{1}^{m}{}_{s} M_{hs} \, e_s , \quad \delta\zeta_{h0} = \sum_{1}^{m}{}_{s} N_{hs} \, e_s ;$$

$$(8_2) \qquad \delta\varphi_h = \sum_{1}^{m}{}_{s} L^{(hs)} \, e_s , \, \delta\psi_h = \sum_{1}^{m}{}_{s} M^{(hs)} \, e_s , \, \delta\omega_h = \sum_{1}^{m}{}_{s} N^{(hs)} \, e_s ,$$

dedotte risolvendo le (8). In queste espressioni le e_s sono m quantità arbitrarie e i coefficienti $L_{hs}, \ldots, N^{(hs)}$ sono *minori d'ordine* $6n - m$ della matrice che ha per elementi $A_{uh}, \ldots, C^{(uh)}$.

Per costruire ora le equazioni effettive del moto basta dare alle arbitrarie che compariscono nella equazione (7′) i valori (8_1), (8_2), raccogliere a fattori comuni le nuove arbitrarie e_s ed eguagliarne separatamente *a zero* i coefficienti: così facendo si ottengono le m equazioni differenziali

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_1^n {}_h (\mathrm{X}_h \mathrm{L}_{hs} + \mathrm{Y}_h \mathrm{M}_{hs} + \mathrm{Z}_h \mathrm{N}_{hs}) + \\ & + \sum_1^n {}_h (x^{(h)} \mathrm{L}^{(hs)} + y^{(h)} \mathrm{M}^{(hs)} + z^{(h)} \mathrm{N}^{(hs)}) = 0 . \quad (s = 1, 2, \ldots, s, \ldots, m). \end{aligned} \right.$$

4. Questo procedimento presuppone che la equazione simbolica dei lavori virtuali dalla forma originaria (7) sia stata ridotta alla forma (7′) mediante le (5), cioè che siano note le funzioni $p_{h1}, \ldots, r_{h3}$. Ma può darsi che dalle equazioni dei legami in termini finiti si possano dedurre direttamente altrettante equazioni fra le *traslazioni virtuali* $\delta\xi_{h0}, \ldots$ e le *caratteristiche* delle rotazioni $\delta\pi_h, \ldots$ Per chiarire meglio questo concetto, si suppongano dedotte dalle equazioni dei vincoli le equazioni (8); allora sostituendo alle $\delta\varphi_h, \ldots$ i loro valori (5′) e ponendo per brevità

$$(e)\quad a^{(uh)} = \mathrm{P}_{h1} \mathrm{A}^{(uh)} + \mathrm{P}_{h2} \mathrm{B}^{(uh)} + \mathrm{P}_{h3} \mathrm{C}^{(uh)}, \ b^{(uh)} \ \mathrm{Q}_{h1} \mathrm{A}^{(uh)} + \text{ecc.},$$

le (8) prendono la forma

$$(8')\quad \sum_1^n {}_h (\mathrm{A}_{uh}\, \delta\xi_{h0} + \cdots) + \sum_1^n {}_h (a^{(uh)}\, \delta\pi_h + b^{(uh)}\, \delta\chi_h + c^{(uh)}\, \delta\varrho_h) = 0 .$$

I legami che verranno considerati in seguito sono appunto tali che dalle equazioni che li rappresentano si calcolano *direttamente* i coefficienti $a^{(uh)}, \ldots$, senza bisogno di ricorrere alla trasformazione (5′), cioè senza che sia necessario prefissare la natura dei parametri $\varphi_h, \psi_h, \omega_h$. In tal caso le equazioni dinamiche si ottengono applicando al sistema (8′), (7) il procedimento ora seguito per il sistema (8), (7′). Cioè si risolvono le (8′) in modo da esprimere le arbitrarie $\delta\xi_{h0}, \ldots, \delta\varrho_h$ mediante m nuove arbitrarie $e_1, \ldots, e_s, \ldots, e_m$: i valori trovati si sostituiscono nella (7) e si eguagliano a zero i coefficienti delle e_s. Ma risolvendo le (8′) si devono trovare per le $\delta\xi_{h0}, \ldots$ i valori (8_1), giacchè la trasformazione eseguita per passare dal sistema (8) al sistema (8′) lasciava intatte le traslazioni virtuali; e per le caratteristiche $\delta\pi_h, \ldots$, sapendo ch'esse sono *sempre* legate alle variazioni $\delta\varphi_h, \ldots$ dalle relazioni (5), si devono trovare i valori

$$(8'_2)\quad \delta\pi_h = \sum_1^m {}_s\, l^{(hs)} e_s, \ \delta\chi_h = \sum_1^m {}_s\, m^{(hs)} e_s, \ \delta\varrho_h = \sum_1^m {}_s\, n^{(hs)} e_s,$$

ottenuti appunto dalle (5) sostituendovi a $\delta\varphi_h, \ldots$ i valori (8_2), e ponendo per brevità

$$(f)\quad l^{(hs)} = p_{h1} \mathrm{L}^{(hs)} + p_{h2} \mathrm{M}^{(hs)} + p_{h3} \mathrm{N}^{(hs)} \ ; \ m^{(hs)} = q_{h1} \mathrm{L}^{(hs)} + \text{ecc.}$$

Dunque in questo caso le equazioni del moto hanno la forma:

$$(9') \quad \begin{cases} \sum_1^n {}_h (X_h L_{hs} + \cdots) + \sum_1^n {}_h (X^{(h)} l^{(hs)} + Y^{(h)} m^{(hs)} + Z^{(h)} n^{(hs)}) = 0 . \\ (s = 1, 2, \ldots m). \end{cases}$$

Non sarà infine superfluo dimostrare l'identità dei due sistemi (9) e (9'). A questo scopo basta sostituire alle quantità $x^{(h)}, y^{(h)}, z^{(h)}$ che compariscono nelle (9) e alle $l^{(hs)}, m^{(hs)}, n^{(hs)}$ che compariscono nelle (9'), rispettivamente i valori (c) ed (f), perchè le somme

$$\sum_1^n {}_h (x^{(h)} L^{(hs)} + \cdots), \sum_1^n {}_h (X^{(h)} l^{(hs)} + \cdots),$$

e quindi anche le equazioni (9) e (9'), diventino esplicitamente identiche.

5. Sul problema algebrico, al quale è ridotta la ricerca delle equazioni differenziali (9) o (9'), è opportuno fare alcune considerazioni che saranno utili in seguito: per maggior comodità l'enuncio sotto questa forma alquanto più generica: « Alle quantità x_s che compariscono nella somma

$$(\mathrm{I}) \qquad S = \sum_1^N {}_s U_s x_s$$

sostituire i valori più generali compatibili con le condizioni

$$(\mathrm{II}) \qquad \sum_1^N {}_s a_{hs} x_s = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots p \; ; \; p \leq N) \text{ ».}$$

Se la soluzione generale delle (II) è

$$(\mathrm{II}') \qquad x_s = \sum_1^{N-p} {}_t A_{st} y_t ,$$

la (I) diventa

$$(\mathrm{I}_1) \qquad S = \sum_1^{N-p} {}_t \left(\sum_1^N {}_s U_s A_{st} \right) y_t .$$

Supponiamo ora che alle x_s siano imposte altre condizioni indipendenti e compatibili con le precedenti:

$$(\mathrm{III}) \qquad \sum_1^N {}_s b_{ks} x_s = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots q \; ; \; p + q \leq N) ;$$

poichè queste devono coesistere con le (II), ossia con le loro equivalenti (II′), si può: sostituire alle x_s i valori già trovati (II′) cosicchè queste diventano

$$(\mathrm{III}_1) \qquad \sum_{1}^{N-p}{}_t \left(\sum_{1}^{N}{}_s b_{ks} A_{st} \right) y_t = 0 \; ; \qquad (k = 1, 2, \ldots q)$$

risolvere questo sistema esprimendo le y in funzione di $(N - p) - q$ parametri nuovi

$$(\mathrm{III}') \qquad y_t = \sum_{1}^{N-p-q}{}_\tau B_{t\tau} z_\tau \; ;$$

eliminare le y_t fra queste equazioni e le (II′), ottenendo la soluzione generale ([1])

$$(\mathrm{II}'') \qquad x_s = \sum_{1}^{N-p}{}_t \sum_{1}^{N-p-q}{}_\tau A_{st} B_{t\tau} z_\tau \, .$$

Sostituendo infine nella somma (I) alle x_s i valori (II″), si ottiene

$$(\mathrm{I}_2) \qquad S = \sum_{1}^{N-p-q}{}_\tau \left(\sum_{1}^{N-p}{}_t \sum_{1}^{N}{}_s U_s A_{st} B_{t\tau} \right) z_\tau \, .$$

Ma è facilissimo verificare che all'identica espressione si arriva sostituendo nelle (I_1) in luogo delle y i valori (III′): infatti con tale sostituzione la (I_1) diventa

$$S = \sum_{1}^{N-p}{}_t \left(\sum_{1}^{N}{}_s U_s A_{st} \right) \sum_{1}^{N-p-q}{}_\tau B_{t\tau} z_\tau \, ,$$

la quale coincide con la (I_2) dopo semplici trasposizioni dei simboli $\sum$.

In modo analogo si può procedere se oltre alle (II) e (III) le x_s devono soddisfare alle condizioni

$$(\mathrm{IV}) \qquad \sum_{1}^{N}{}_s c_{is} x_s = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r \; ; \; p + q + r \leq N) \, ;$$

([1]) Che le (II″) siano effettivamente la soluzione generale delle (II), (III), si dimostra verificando che quei valori dèlle x_s soddisfano le equazioni (II) e (III) e osservando che i valori stessi dipendono da $N - (p + q)$ parametri arbitrari.

basta cioè sostituire in queste alle variabili x_s successivamente le y_t, z_τ mediante le (II′), (III′), risolvere il sistema risultante

$$(\mathrm{IV}_1) \qquad \sum_{1}^{N-p-q}{}_{\tau} \left(\sum_{1}^{N-p}{}_{t} \sum_{1}^{N}{}_{s} c_{is} \, A_{st} \, B_{t\tau} \right) z_\tau = 0$$

rispetto alle nuove incognite z, e sostituirne i valori

$$z_\tau = \sum_{1}^{N-p-q-r}{}_{l} C_{\tau l} \, u_l$$

nella somma (I_2), trasformandola in

$$(\mathrm{I}_3) \qquad s = \sum_{1}^{N-p-q-r}{}_{l} \left(\sum_{1}^{N-p-q}{}_{\tau} \sum_{1}^{N-p}{}_{t} \sum_{1}^{N}{}_{s} U_s \, A_{st} \, B_{t\tau} \, C_{\tau l} \right) u_l \, .$$

Queste osservazioni, di per sè abbastanza evidenti, non sono però superflue, perchè si possono riassumere in una regola praticamente importante: « Se da un sistema olonomo di corpi rigidi si passa ad un altro sistema meno generale mediante l'aggiunta di nuovi legami, non è necessario trasformare l'equazione simbolica dei lavori virtuali partendo dalla sua forma primitiva (7) o (7′) e tenendo conto *simultaneamente di tutte* le equazioni di condizione; ma si può partire dalla equazione simbolica *già trasformata* in virtù di legami precedenti ed eliminare i parametri arbitrari ch'essa contiene mediante la soluzione generale dei nuovi legami, *trasformati anch'essi* col metodo di sostituzione accennato poco fa ».

Quando poi le equazioni dei legami sono date o trasformate in modo che *alcune* delle quantità $\delta\xi_{10}, \dots, \delta\varrho_n$ siano espresse esplicitamente mediante funzioni lineari delle rimanenti, il sistema si può ritenere risoluto in generale, bastando perciò considerare come parametri arbitrari tutte le incognite che non compariscono nei primi membri delle equazioni stesse.

Infine se non esistono equazioni di condizione sono arbitrarie tutte le quantità $\delta\xi_{10}, \dots, \delta\varrho_n$.

6. Per concludere questa parte generale dello studio che mi sono proposto, esamino brevemente una specie di legami che più facilmente si realizzano in pratica. Essi consistono in ciò che « ciascun corpo può avere un punto o una retta costantemente in comune con un altro corpo del sistema ». Poichè l'esistenza di una retta in comune equivale all'esistenza in comune di due punti distinti, questa specie di legami si può rappresentare brevemente con tante eguaglianze simboliche

$$(10) \qquad P_{hi} \equiv P_{kj}$$

quanti sono i punti comuni a una coppia di corpi C_h, C_k. È facilissimo verificare che questa specie di legami gode appunto della proprietà accennata al n. 4.

Infatti per ogni identità (10) hanno luogo tre equazioni effettive in termini finiti

$$\xi_{kj} = \xi_{hi}\ ,\ \eta_{kj} = \eta_{hi}\ ,\ \zeta_{kj} = \zeta_{hi}\ , \tag{11}$$

dalle quali si ricava

$$\delta\xi_{kj} - \delta\xi_{hi} = \delta\eta_{kj} - \delta\eta_{hi} = \delta\zeta_{kj} - \delta\zeta_{hi} = 0\ ; \tag{11'}$$

e basta in queste ultime sostituire a $\delta\xi_{hi}, \ldots, \delta\zeta_{kj}$ i valori (3) perchè esse prendano la forma

$$\begin{aligned} \delta\xi_{ko} - \delta\xi_{ho} + \delta\chi_k\, c_{kj} - \delta\chi_h\, c_{hi} - \\ - \delta\varrho_k\, b_{kj} + \delta\varrho_h\, b_{hi} = 0 \text{ ecc.}\ ^{(1)} \end{aligned} \tag{12}$$

analoga alle (8) e indipendente dalla natura dei parametri $\varphi_h, \ldots \omega_k$.

Fisica. — *Sulla scarica per effluvio in seno ai gas.* Nota del dott. D. Pacini, presentata dal Socio Blaserna.

Chimica. — *Sulla riduzione elettrolitica delle soluzioni acide di anidride molibdica e su alcuni composti del triroclaruro di molibdeno.* Nota di A. Chilesotti, presentata dal Socio S. Cannizzaro.

Queste due Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Paleontologia. — *Il Clisiophyllum Thildae n. sp. nel Parà.* Nota di Gioacchino de Angelis d'Ossat, presentata dal Socio T. Taramelli.

Il chiaro prof. H. von Jhering, direttore del Museu Paulista di San Paulo nel Brasile, affidò gentilmente al mio studio un corallo fossile, raccolto nei dintorni di Itahituba, lungo il Rio Tabajoz (= Tapajoz = Tapajos) affluente del Rio delle Amazzoni.

Non è cosa facile formarsi un concetto chiaro della costituzione geologica di quelle lontane e poco conosciute regioni; tuttavia facendo tesoro di quanto è stato anteriormente scritto intorno alla geologia del Brasile in ge-

(1) Per la generalità della trattazione si può osservare che non è necessaria la costante coincidenza dei punti P_{hi}, P_{kj} perchè siano verificate le (12) ossia le (11'); ma anzi si può dimostrare che la condizione più generale sufficiente e necessaria è questa « *che il vettore $P_{hi}\,P_{kj}$ abbia una lunghezza e una direzione determinata per ogni istante* ».