ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCC.

1903

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XII.

1° Semestre.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1903

Matematica. — *Di un gruppo continuo di trasformazioni decomponibili finitamente.* Nota di G. FRATTINI, presentata dal Socio VOLTERRA.

Con la presente Nota si vuol mostrare l'esistenza di un gruppo continuo Γ di trasformazioni, dotato della seguente proprietà: *comunque una trasformazione del gruppo si decomponga in fattori (trasformazioni del gruppo stesso), il numero dei fattori è sempre finito.* Il caso del gruppo Γ, che è inoltre proiettivo e a un sol parametro, è da riguardarsi come singolarissimo nella teorica dei gruppi continui, e ciò per le seguenti considerazioni generali. Dato un gruppo di trasformazioni ad n parametri $a, b, c \ldots$, variabili senza limitazione alcuna (gruppo di *Lie* propriamente detto) (¹), ogni trasformazione del gruppo si potrà decomporre nel prodotto di due fattori, il primo dei quali, corrispondente ai valori $a_1, b_1, c_1 \ldots$ dei parametri, si potrà assegnare arbitrariamente. Risolvendo infatti un sistema di n equazioni con n incognite, si potranno determinare i valori parametrali $a_2, b_2, c_2, \ldots$ relativi al secondo fattore. Ciò mostra che la decomposizione delle trasformazioni di un gruppo di *Lie* propriamente detto in fattori può essere prolungata all'infinito. Il campo di variabilità dei parametri si supponga invece limitato. In questo caso, dovendo le incognite $a_2, b_2, c_2, \ldots$ (funzioni di $a_1, b_1, c_1 \ldots$ e dei parametri della trasformazione) essere contenute entro i limiti definiti dalla natura del gruppo, le quantità $a_1, b_1, c_1 \ldots$ e i detti parametri dovranno soggiacere, oltre che alle limitazioni loro proprie, anche ad un sistema di sotto-condizioni, esprimenti le limitazioni di $a_2, b_2, c_2 \ldots$. E qui due casi potranno verificarsi: O alle dette condizioni e sotto-condizioni si potrà soddisfare disponendo opportunamente delle sole $a_1, b_1, c_1 \ldots$; e anche in questo caso il primo fattore si potrà determinare in infiniti modi (sebbene non del tutto arbitrariamente), nè vi sarà limite assegnabile pel numero dei fattori (²). O si verificherà, come pel gruppo Γ, il fatto singolarissimo che dal sistema totale delle condizioni per $a_1, b_1, c_1 \ldots$ e i parametri della trasformazione da decomporre si possano eliminare $a_1, b_1, c_1 \ldots$, talchè resti un sistema di condizioni pei soli parametri anzidetti; e in tal caso tutte le trasformazioni i cui parametri non soddisfano quest'ultime condizioni saranno

(¹) V. Pascal, *I gruppi continui di trasformazioni*, Hoepli 1903, pag. 18.

(²) La mancanza delle trasformazioni inverse è dunque, per la decomponibilità finita, condizione necessaria, *ma non sufficiente*. Le trasformazioni del gruppo $z' = \varepsilon z$, qualora ε sia compresa fra 0 e 1, sono per esempio decomponibili all'infinito, malgrado il gruppo sia privo delle inverse.

indecomponibili. In quanto alle altre, potrà darsi che ciascuna ammetta un limite massimo pel numero de' suoi fattori, come le trasformazioni del gruppo Γ ne danno l'esempio.

Proprietà notevole del gruppo Γ e dei congeneri è quella di ammettere un unico sistema di trasformazioni generatrici. Tale sistema si compone delle sole trasformazioni indecomponibili, necessarie tutte per la generazione del gruppo. Le altre, cioè le trasformazioni decomponibili, formano un sottogruppo, che potrebbe dirsi il *sottogruppo contingente*, in quanto le sue trasformazioni sono inutili per la generazione del gruppo totale (¹).

Decomponendo le trasformazioni del sottogruppo contingente in fattori appartenenti al sottogruppo medesimo, la decomposizione avrà pure un termine. Si giungerà così ai *fattori primi*, che peraltro saranno tali nel campo del sottogruppo contingente, e saranno invece *composti*, riferiti a più vasto campo, qual è quello del gruppo principale Γ (²).

Il gruppo parametrico di Γ, e a questo isomorfo, è un gruppo continuo di numeri la decomposizione dei quali ha sempre un limite, malgrado la condizione di continuità. Generalmente ciò non accade, anche limitando il campo di variabilità del sistema continuo (serva d'esempio il gruppo dei numeri compresi fra 0 e 1).

1. Sia D un numero intero e positivo; sia ω la sua radice quadrata a meno di un' unità ed r il resto dell' estrazione di detta radice. La trasformazione

$$\frac{\mu z + \mathrm{D}}{z + \mu} \tag{1}$$

operante sulla variabile z è una trasformazione proiettiva a un sol parametro μ. Le trasformazioni della detta forma sono permutabili tra loro e formano un gruppo, come si vede dal prodotto operativo

$$\left(\frac{\mu_1 z + \mathrm{D}}{z + \mu_1}\right)\left(\frac{\mu_2 z + \mathrm{D}}{z + \mu_2}\right) = \frac{z\,\dfrac{\mu_1\mu_2 + \mathrm{D}}{\mu_1 + \mu_2} + \mathrm{D}}{z + \dfrac{\mu_1\mu_2 + \mathrm{D}}{\mu_1 + \mu_2}},$$

che non muta per lo scambio degl' indici 1 e 2, e conserva inoltre la forma de' suoi fattori.

(¹) Del sottogruppo delle operazioni che non possono utilmente concorrere alla generazione di un gruppo dato ebbi già ad occuparmi in una breve Nota dal titolo: *Intorno alla generazione dei gruppi di operazioni*, inserita in questi Rendiconti (aprile 1885).

(²) Il gruppo delle cause che presiedono ai fenomeni naturali non somiglierebbe al nostro sottogruppo contingente? Se il paragone cade a proposito, analizzando i fenomeni naturali, si potrebbe bensì giungere alla conoscenza dei loro fattori elementari o primi nella cerchia del sensibile. Ma nessuno di tali fattori sarebbe primo per rispetto al gruppo universale delle cause, gli elementi del quale si asconderebbero nella sfera *ove non cerchia uman compasso*.

Il gruppo parametrico relativo al gruppo delle (1) è quello dei binomî irrazionali

$$p + q\sqrt{D},$$

qualora a ciascuna trasformazione si facciano corrispondere tutti que' binomî che hanno il *rapporto caratteristico* $\frac{p}{q}$ eguale al parametro della trasformazione medesima [1].

Affinchè due prodotti di trasformazioni (1) siano eguali, è necessario e sufficiente che siano eguali i rapporti caratteristici dei relativi binomî irrazionali.

2. Ai valori del parametro μ s' imponga ora la condizione di essere non minori di ω nè maggiori di $\omega + 1$. Le (1) in tal modo condizionate seguiteranno a formare un gruppo. Si esamini infatti il quoziente

$$\frac{\mu_1 \mu_2 + D}{\mu_1 + \mu_2},$$

parametro del prodotto di due trasformazioni sopra eseguito. Si vedrà che anch'esso è compreso fra ω e $\omega + 1$. Infatti, essendo μ_1 e μ_2 compresi fra questi limiti, si potrà porre: $\mu_1 = \omega + \lambda_1$; $\mu_2 = \omega + \lambda_2$, intendendo per λ_1 e λ_2 due numeri compresi fra 0 e 1. Si avrà pertanto:

$$\frac{\mu_1 \mu_2 + D}{\mu_1 + \mu_2} = \omega + \frac{r + \lambda_1 \lambda_2}{2\omega + \lambda_1 + \lambda_2}.$$

E poichè

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \geq 2$$

o anche

$$\lambda_1 + \lambda_2 \geq 2\lambda_1 \lambda_2,$$

e d'altra parte

$$2\omega \geq r,$$

sommando verrà:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + 2\omega \geq r + 2\lambda_1 \lambda_2 \geq r + \lambda_1 \lambda_2;$$

e ciò dimostra l'asserto. *Il gruppo composto delle sole* (1) *nelle quali il parametro non è minore di* ω *nè maggiore di* $\omega + 1$ *è quello che si vuol qui considerare e che fu sopra indicato con la lettera* Γ [2].

(1) Essendosi pertanto asserito che i binomî del gruppo parametrico di Γ sono anch'essi decomponibili finitamente, fu sottintesa la convenzione di stimare eguali fra loro tutti i binomî che hanno il medesimo rapporto caratteristico.

(2) Si può domandare se il parametro, variabile fra limiti, non possa, mediante una sostituzione di variabile, essere surrogato da un altro, libero da limiti. Ma che ciò si possa non è provato; come dice il chiaro prof. Pascal nel già citato suo libro (pag. 17,

3. Passiamo ora a ricercare se la trasformazione (μ), e con questo segno indicherò una trasformazione di parametro μ e appartenente al gruppo Γ, si può sempre decomporre in due fattori, trasformazioni del gruppo stesso, o se per ciò bisognano delle condizioni, e quali. Siano μ_1 e μ_2 i parametri dei fattori, e si ponga

$$\mu = \omega + \lambda \ , \ \mu_1 = \omega + \lambda_1 \ , \ \mu_2 = \omega + \lambda_2 \ ,$$

(λ compresa fra 0 e 1). Esprimendo la condizione affinchè la trasformazione (μ) e il prodotto $(\mu_1) . (\mu_2)$ abbiano eguali i rapporti caratteristici, si avrà facilmente l'equazione

$$\lambda_1 = \frac{2\omega\lambda + \lambda\lambda_2 - r}{\lambda_2 - \lambda} \ , \tag{2}$$

cui si dovrà soddisfare con λ_1 e λ_2 entrambe comprese fra 0 e 1. Fatte le due ipotesi

$$\lambda_2 \gtrless \lambda \ ,$$

dovrà rispondentemente aversi:

$$\lambda_2 \gtrless \frac{r - 2\omega\lambda}{\lambda} \ ,$$

affinchè λ_1 sia positiva. E affinchè essa sia minore dell'unità:

$$\lambda_2 \gtrless \frac{(2\omega + 1)\lambda - r}{1 - \lambda} \ .$$

Due casi saranno dunque possibili: che cioè λ_2 sia o maggiore o minore di tutti e tre i numeri:

$$\lambda , \ \frac{r - 2\omega\lambda}{\lambda} , \ \frac{(2\omega + 1)\lambda - r}{1 - \lambda} \ . \tag{3}$$

Ma, dovendo λ_2 esser compresa al tempo stesso fra 0 e 1, non potrà verificarsi il primo caso se non quando i suddetti numeri saranno tutti minori dell'unità; nè potrà verificarsi il secondo, se non quando essi saranno tutti positivi. Ne derivano per λ le seguenti limitazioni:

$$\lambda > \frac{r}{2\omega + 1} \quad \text{e contemporaneamente} \quad \lambda < \frac{r + 1}{2\omega + 2}$$

oppure

$$\lambda > \frac{r}{2\omega + 1} \quad , \quad \lambda < \frac{r}{2\omega} \ .$$

linee 28, 29 e 30). E quand'anche si potesse, non per ciò verrebbe meno la distinzione tra gruppi continui di trasformazioni decomponibili all'infinito, oppure finitamente: distinzione che, avendo fondamento nel fatto, non può ridursi a una semplice questione di forma.

Conseguentemente:

$$\mu > \omega + \frac{r}{2\omega + 1} \quad \text{e contemporaneamente} \quad \mu < \omega + \frac{r+1}{2\omega + 2}$$

oppure

$$\mu > \omega + \frac{r}{2\omega + 1} \quad " \quad \mu < \omega + \frac{r}{2\omega}.$$

Si osservi che queste due coppie hanno comune la limitazione inferiore; epperò ad esse si potrà sostituire un' unica coppia; quella le cui limitazioni sono più distanti fra loro. Tale coppia è la prima, se $r < \omega$; la seconda se $r > \omega$; l' una o l'altra delle due, se $r = \omega$.

Affinchè una trasformazione del gruppo Γ sia decomponibile in due fattori, è dunque necessario e sufficiente che il suo parametro sia compreso fra le due limitazioni dianzi stabilite [1]. Ciò verificandosi, si potrà infatti fissare λ_2, senz'altra condizione fuorchè quella di essere positiva e, o maggiore o minore dei limiti (3) precedentemente trovati; e poi, mediante la (2), determinare λ_1.

Per generalizzare il risultato precedente, giova dare alla sua espressione una forma alquanto diversa, ed è la seguente: Affinchè una trasformazione del gruppo Γ sia decomponibile in due fattori, è necessario e sufficiente che il parametro della trasformazione sia compreso fra l' una e l'altra delle coppie di valori che per $z = \omega$ e $z = \omega + 1$ assume ciascuno dei due quozienti

$$\frac{\omega z + \mathrm{D}}{z + \omega} \qquad \frac{(\omega + 1) z + \mathrm{D}}{z + (\omega + 1)}. \tag{4}$$

4. Ciò premesso, passiamo alla ricerca della condizione affinchè una trasformazione (μ) sia decomponibile in più di due fattori, per esempio in 3: (μ_1), (μ_2), (μ_3). Bisognerà per ciò che il prodotto di (μ) per l' inversa di (μ_3) sia eguale al prodotto di due trasformazioni del gruppo Γ: chè cioè il rapporto caratteristico del prodotto

$$(\omega + \lambda + \sqrt{\mathrm{D}})\,(\omega + \lambda_3 - \sqrt{\mathrm{D}}),$$

diminuito di ω, sia compreso fra i limiti l ed l', già trovati per la λ delle trasformazioni decomponibili in 2 fattori. Ragionando come al n. 3, si conclude che la nuova λ dev' essere compresa fra

$$\frac{r}{(\omega + l) + \omega} \quad \text{ed} \quad \frac{r}{(\omega + l') + \omega}$$

oppure fra

$$\frac{r + l}{(\omega + l) + (\omega + 1)} \quad \text{ed} \quad \frac{r + l'}{(\omega + l') + (\omega + 1)};$$

[1] Potrebbe anche essere eguale all' una o all' altra limitazione, come è facile vedere.

epperò μ (che è uguale ad $\omega + \lambda$) dovrà essere compresa tra

$$\frac{\omega \mathrm{L} + \mathrm{D}}{\mathrm{L} + \omega} \quad \text{ed} \quad \frac{\omega \mathrm{L}' + \mathrm{D}}{\mathrm{L}' + \omega}$$

oppure tra

$$\frac{(\omega + 1)\mathrm{L} + \mathrm{D}}{\mathrm{L} + (\omega + 1)} \quad \text{ed} \quad \frac{(\omega + 1)\mathrm{L}' + \mathrm{D}}{\mathrm{L}' + (\omega + 1)},$$

dove L ed L′ sono i limiti già trovati per la μ delle trasformazioni decomponibili in 2 fattori. Ciò equivale a dire che μ dev' essere compresa fra l' una o l'altra delle coppie di valori che per $z = \mathrm{L}$ e $z = \mathrm{L}'$ assume ciascuno dei quozienti (4). Combinando questo risultato con quello già ottenuto in proposito di L e di L′ alla fine del numero precedente, si conclude che μ dev' essere compresa fra i valori che per $z = \omega$ e $z = \omega + 1$ prende uno qualsiasi dei tre prodotti operativi contenuti nella formola

$$\left(\frac{\omega z + \mathrm{D}}{z + \omega}\right)^{\alpha} \left[\frac{(\omega + 1) z + \mathrm{D}}{z + (\omega + 1)}\right]^{\beta},$$

estesa alle partizioni del 2 in due numeri interi α e β, positivi o nulli.

Ma questo risultato si semplifica, potendosi verificare che il minimo dei limiti inferiori, come anche il massimo dei limiti superiori di μ che in tal modo si ottengono, corrispondono al caso dei fattori eguali fra loro; e di più eguali ad

$$\frac{(\omega + 1) z + \mathrm{D}}{z + (\omega + 1)},$$

se $r < \omega$; ad

$$\frac{\omega z + \mathrm{D}}{z + \omega},$$

se $r > \omega$; all' una o all' altra delle due espressioni, se $r = \omega$. Di qui il teorema che è scopo principale del presente scritto, e che, generalizzato ed esteso al caso di n fattori, si enuncia così: *Affinchè una trasformazione del gruppo Γ sia decomponibile in n fattori, è necessario e sufficiente che il suo parametro sia compreso tra i valori che per $z = \omega$ e $z = \omega + 1$ assume una delle due potenze operative*

$$\left(\frac{\omega z + \mathrm{D}}{z + \omega}\right)^{n-1}; \qquad \left[\frac{(\omega + 1) z + \mathrm{D}}{z + (\omega + 1)}\right]^{n-1};$$

e precisamente, la prima, se $r > \omega$; la seconda, se $r < \omega$; l'una o l'altra, se $r = \omega$.

5. L'enunciazione del teorema testè dimostrato può essere modificata e resa più perspicua come segue: Se $r \geq \omega$ (e similmente è a dirsi se $r \leq \omega$), si ponga

$$(\omega + \sqrt{\mathrm{D}})^{n-1} = \mathrm{P}_{n-1} + \mathrm{Q}_{n-1}\sqrt{\mathrm{D}}.$$

Sarà altresì

$$\left(\frac{\omega z + D}{z + \omega}\right)^{n-1} = \frac{P_{n-1}\, z + D Q_{n-1}}{Q_{n-1}\, z + P_{n-1}}.$$

Se una trasformazione è decomponibile in n fattori, il suo parametro μ dovrà, come già fu detto, essere compreso tra

$$\frac{\omega P_{n-1} + D Q_{n-1}}{\omega Q_{n-1} + P_{n-1}} \text{ e } \frac{(\omega + 1) P_{n-1} + D Q_{n-1}}{(\omega + 1) Q_{n-1} + P_{n-1}}.$$

Ne segue che il rapporto

$$\frac{\mu P_{n-1} - D Q_{n-1}}{P_{n-1} - \mu Q_{n-1}}$$

dovrà essere compreso fra ω e $\omega + 1$. Ma esso è il rapporto caratteristico relativo al prodotto

$$(\mu + \sqrt{D})(P_{n-1} - Q_{n-1}\sqrt{D}) = (\mu + \sqrt{D})(\omega - \sqrt{D})^{n-1},$$

o all'altro

$$(\mu + \sqrt{D})(\sqrt{D} - \omega)^{n-1};$$

quest'ultimo prodotto, ridotto a forma di binomio irrazionale, apparterrà dunque al gruppo parametrico di Γ. Di qui il teorema: *Affinchè una trasformazione di parametro μ sia decomponibile in n fattori, è necessario e sufficiente che il prodotto*

$$(\mu + \sqrt{D})(\sqrt{D} - \omega)^{n-1},$$

se $r \geq \omega$, oppure il prodotto

$$(\mu + \sqrt{D})(\omega + 1 - \sqrt{D})^{n-1},$$

se $r \leq \omega$, ridotti a forma di binomio irrazionale, appartengano al gruppo parametrico di Γ.

Corollario. — *Il massimo numero di fattori in cui è decomponibile una trasformazione di parametro μ eguaglia il minimo valore che bisogna dare all'esponente k affinchè il prodotto*

$$(\mu + \sqrt{D})(\sqrt{D} - \omega)^{k},$$

se $r \geq \omega$, oppure l'altro

$$(\mu + \sqrt{D})(\omega + 1 - \sqrt{D})^{k},$$

se $r \leq \omega$, che per $k = 0$ appartengono al gruppo parametrico, cessino di appartenervi.

Esempio. — Sia $D = 11$, $\omega = 3$, $r = 2$. La trasformazione

$$\frac{1257z + 4169}{379z + 1257},$$

il cui parametro è $\frac{1257}{379}$, sarà decomponibile in 6 fattori e non più di 6. Infatti

$$\begin{aligned}
(1257+379\sqrt{11})(4-\sqrt{11}) &= 859+259\sqrt{11}\\
(859+259\sqrt{11})(4-\sqrt{11}) &= 587+177\sqrt{11}\\
(587+177\sqrt{11})(4-\sqrt{11}) &= 401+121\sqrt{11}\\
(401+121\sqrt{11})(4-\sqrt{11}) &= 273+\ 83\sqrt{11}\\
(273+\ 83\sqrt{11})(4-\sqrt{11}) &= 179+\ 59\sqrt{11}\\
(179+\ 59\sqrt{11})(4-\sqrt{11}) &= \ 67+\ 57\sqrt{11}.
\end{aligned}$$

Ora quest' ultimo prodotto è il primo che cessa di appartenere al gruppo parametrico, perchè il suo rapporto caratteristico non è compreso fra 3 e 4. In quanto alle decomposizioni effettive di detta trasformazione in 6 fattori, una ne otterremo decomponendo prima il binomio $1257+376\sqrt{11}$ nel prodotto di 6 binomî del gruppo parametrico. A ciò serviranno le prime 5 delle precedenti eguaglianze, le quali danno

$$1257+379\sqrt{11}=\left(\frac{4+\sqrt{11}}{5}\right)^5(179+59\sqrt{11}).$$

Per isomorfismo si avrà poi:

$$\left(\frac{1257z+4169}{379z+1257}\right)=\left(\frac{4z+11}{z+4}\right)^5\left(\frac{179z+649}{59z+179}\right).$$

6. *Sottogruppo Γ'*. È facile verificare che quelle trasformazioni del gruppo Γ nelle quali il valore del parametro non supera $\frac{\mathrm{D}}{\omega}$ formano un sottogruppo Γ'. Tale sottogruppo coincide col gruppo totale, quando $r \geq \omega$. Il seguente teorema ribadisce la decomponibilità finita, già dimostrata per le trasformazioni del gruppo Γ. *Affinchè una trasformazione del sottogruppo Γ' sia decomponibile in n fattori, è necessario che il suo parametro sia compreso fra la ridotta n^{ma} e la ridotta $(n-1)^{ma}$ di $\sqrt{\mathrm{D}}$.* Lo spazio concessomi non mi permette di esporre la dimostrazione di questo teorema: dirò solo che la ottenni generalizzando il metodo, che, per lo sviluppo delle potenze della sostituzione $\frac{\omega z+\mathrm{D}}{z+\omega}$ in frazione continua, esposi già nel Periodico di matematica per l' insegnamento secondario (¹); e dimostrando che, se Π_n è il prodotto di n trasformazioni del gruppo Γ', e se $a_1, a_2, a_3, \ldots$

(¹) Vol. XVIII, luglio-agosto 1902.

indicano i quozienti incompleti consecutivi di $\sqrt{D}$, si ha

$$\Pi_n = \left(a_1, a_2, a_3, \dots a_n, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right),$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ positivi e $\alpha > \gamma$. Ponendo in questa eguaglianza $z = \infty$, si ottiene facilmente il teorema sopra enunciato.

Corollario. — Se i numeri $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_n$ *sono non minori di* ω *nè maggiori di* $\frac{D}{\omega}$, *e se si pone*

$$(\mu_1 + \sqrt{D})(\mu_2 + \sqrt{D}) \dots \dots (\mu_n + \sqrt{D}) = A_n + B_n \sqrt{D},$$

il rapporto $\frac{A_n}{B_n}$ *è compreso fra le ridotte* n^{ma} *ed* $(n-1)^{ma}$ *di* $\sqrt{D}$ (1). Ponendo $\mu_1 = \mu_2 \dots = \mu_n = \omega$, si ottiene come caso particolare il teorema che fu argomento di una mia Nota inserita nel Periodico di matematica sopra citato (2).

Zoologia — *Sull'adattamento degli Infusorî marini alla vita nell'acqua dolce* (3). Nota di Paolo Enriques, presentata dal Socio Emery.

Ebbi recentemente ad occuparmi delle reazioni osmotiche che gli Infusorî presentano, per le variazioni del loro ambiente (4); studiai specialmente Infusorî di acqua dolce, o che vivono in ambienti poco salati. L'importanza di tali questioni per ciò che riguarda la biologia dei Protozoi, mi destò il desiderio di proseguire le ricerche, servendomi di Infusorî marini, e con

(1) Poichè i numeri non minori di ω nè maggiori di $\frac{D}{\omega}$ sono quelli contenuti nella formola

$$\frac{\omega\theta^2 + D}{\theta^2 + \omega},$$

dove θ varia da $-\infty$ a $+\infty$, questo teorema rende possibile la formazione di una funzione di n variabili $\theta_1, \theta_2, \dots \theta_n$, compresa fra le ridotte n^{ma} ed $(n-1)^{ma}$ di $\sqrt{D}$, *per tutti i valori reali delle variabili.* Con facile calcolo si trova che tale funzione è

$$\sqrt{D}\,\frac{1 + \left(\frac{\omega - \sqrt{D}}{\omega + \sqrt{D}}\right)^n \prod_{x=1}^{x=n} \frac{\theta_x^2 - \sqrt{D}}{\theta_x^2 + \sqrt{D}}}{1 - \left(\frac{\omega - \sqrt{D}}{\omega + \sqrt{D}}\right)^n \prod_{x=1}^{x=n} \frac{\theta_x^2 - \sqrt{D}}{\theta_x^2 + \sqrt{D}}}.$$

(2) Vol. XVII, settembre-ott., 1901.

(3) Queste ricerche sono state eseguite nella Stazione Zoologica di Napoli.

(4) Enriques P., *Ricerche osmotiche sugli Infusorî; Ricerche osmotiche sui Protozoi delle infusioni; Ricerche osmotiche sulla Limnaea stagnalis; Osmosi ed assorbimento nelle reazioni a soluzioni anisotoniche.* Rendiconti Accademia Lincei Vol. XI (5), pag. 340-347, 392-397, 440-448, 495-499.