ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCC.

1903

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1903

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia sino al 16 agosto 1903.

Matematica. — *Ricerche gruppali sulle equazioni della dinamica.* Nota III di Guido Fubini, presentata dal Socio Luigi Bianchi.

4. Passerò ora alla trattazione di quei problemi, le cui equazioni differenziali ammettono un gruppo continuo. E userò le notazioni della mia Memoria citata sui gruppi geodetici. Ossia se $\Sigma a_{ik}\, dx_i\, dx_k$ è una forma quadratica e X una trasformazione geodetica, indicherò con $\Sigma(a_{ik}+\varepsilon a'_{ik})\, dx_i\, dx_k$ (dove ε è una costante infinitesima) la forma $\Sigma a_{ik}\, dx_i\, dx_k+\varepsilon \mathrm{X}(\Sigma a_{ik}\, dx_i\, dx_k)$. Indicherò con A_{ik} i complementi algebrici di a_{ik} in $|a_{ik}|$ divisi per $|a_{ik}|$, con $\begin{Bmatrix} ik \\ l \end{Bmatrix}$ i simboli di Christoffel di seconda specie, con $\mathrm{A}_{ik}+\varepsilon \mathrm{A}'_{ik}$, $\begin{Bmatrix} ik \\ l \end{Bmatrix}+\varepsilon \begin{Bmatrix} ik \\ l \end{Bmatrix}'$ le quantità analoghe per $\Sigma(a_{ik}+\varepsilon a'_{ik})\, dx_i\, dx_k$. Se $\mathrm{X}=\Sigma \xi_r \frac{\partial}{\partial x_r}$ è (cfr. Mem. cit.):

$$(10)\quad \begin{Bmatrix} ik \\ l \end{Bmatrix}'=\frac{\partial^2 \xi_l}{\partial x_i\, \partial x_k}+\sum_r\left(\xi_r \frac{\partial}{\partial x_r}\begin{Bmatrix} ik \\ l \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} ir \\ l \end{Bmatrix}\frac{\partial \xi_r}{\partial x_k}+\begin{Bmatrix} kr \\ l \end{Bmatrix}\frac{\partial \xi_r}{\partial x_i}-\begin{Bmatrix} ik \\ r \end{Bmatrix}\frac{\partial \xi_l}{\partial x_r}\right).$$

Se con $\Sigma b_{ik}\, dx_i\, dx_k$ indico un'altra forma quadratica, indicherò per distinguere con un indice « b » le quantità analoghe per questa forma. Con $(\Sigma a_{ik}\, dx_i\, dx_k, \mathrm{A}_i)$ indico un problema dinamico di cui $\Sigma a_{ik} \frac{dx_i\, dx_k}{dt^2}$ è la forza viva, A_i sono le forze impresse. Sia $(\Sigma b_{ik}\, dx_i\, dx_k\, , B_i)$ un altro problema dinamico che con esso abbia comune le equazioni dei movimenti (cfr. Painlevé, loc. cit.); siano B_{ik} le quantità analoghe alle A_{ik} per questo secondo problema; le equazioni dei movimenti sono rispettivamente, per i due problemi:

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} + \sum_{r,s} \begin{Bmatrix} rs \\ i \end{Bmatrix} \frac{dx_r\, dx_s}{dt^2} = \sum_r A_{ir} A_r \; ; \quad \frac{d^2 x_i}{dt^2} + \sum_{r,s} \begin{Bmatrix} rs \\ i \end{Bmatrix}_b \frac{dx_r\, dx_s}{dt^2} = \sum_r B_{ir} B_r \, .$$

Quindi $\begin{Bmatrix} rs \\ i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} rs \\ i \end{Bmatrix}_b$ e perciò (cfr. la mia Mem. cit.) saranno identiche le geodetiche relative alle due forme quadratiche; di più poichè $\frac{\partial \log \sqrt{|a_{ik}|}}{\partial x_l} = \sum_r \begin{Bmatrix} rl \\ l \end{Bmatrix} = \sum_r \begin{Bmatrix} r \\ l \end{Bmatrix}_b = \frac{\partial \log \sqrt{|b_{ik}|}}{\partial x_l}$ i discriminanti delle due forme differiranno per un fattore costante. Sono ben noti i tipi di spazii (¹) su cui si corrispondono le geodetiche. Basta ora tra questi scegliere quelli, i discriminanti dei quali differiscono solo per un fattore costante. Troviamo così subito che due tali spazii sono riducibili al tipo

$$(11)\; ds^2 = \sum_1^{n_1} a_{ik}^{(1)}\, dx_i\, dx_k + \sum_{n_1+1}^{n_2} a_{ik}^{(2)}\, dx_i\, dx_k + \cdots + \sum_{n_{m-1}+1}^{n_m} a_{ik}^{(m)}\, dx_i\, dx_k .$$

$$(12)\; ds^2 = C_1 \sum_1^{n_1} a_{ik}^{(1)}\, dx_i\, dx_k + C_2 \sum_{n_1+1}^{n_2} a_{ik}^{(2)}\, dx_i\, dx_k + \cdots + C_m \sum_{n_{m-1}+1}^{n_m} a_{ik}^{(m)}\, dx_i\, dx_k .$$

dove $C_1, C_2, \ldots C_m$ sono costanti, $n_1, n_2, \ldots n_m$ sono interi e le $a_{ik}^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots m)$ dipendono sono dalle x_r $(r = n_{i-1} + 1, n_{i-1} + 2, \ldots, n_i)$. (Si intende che $n_0 = 0$). Il numero intero m può essere uguale a 1. Se $m > 1$ diremo che l'elemento lineare (11) è spezzabile: la $\sum_{n_i+1}^{n_{i+1}} a_{rs}^{(i+1)}\, dx_r\, dx_s$ sarà detta l'elemento parziale « $i + 1$ »$^{\text{esimo}}$ anche se $n_{i+1} - n_i = 1$. E abbiamo con questo linguaggio: che *se l'elemento lineare* B *corrispondente a un problema dinamico non è spezzabile neppure con un cambiamento di variabili, allora a quei problemi dinamici che hanno comuni con questo le equazioni dei movimenti corrispondono elementi lineari simili all'elemento* B.

Chiaramente possiamo supporre che ciascuno degli elementi parziali non sia spezzabile in elementi parziali neppure con un cambiamento di variabili, perchè se così fosse e p. es. l'elemento parziale « i »$^{\text{esimo}}$ si potesse con un cambiamento di variabili $x_{n_{i-1}+1}, x_{n_{i-1}+2}, \ldots, x_{n_i}$ ridurre alla somma S di altri elementi lineari, sostituiremmo in (11) al posto di detto elemento, la somma S a cui esso equivale. Le variabili dell' i^{esimo} elemento parziale si diranno di specie i.

(¹) Levi-Civita (Annali di Matematica, 1896).

Notiamo di più che le A_{ik} per l'elemento (11) se $m > 1$, ed i, k sono di specie differenti sono nulle, le $\left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\}$ se $m > 1$ e i, k, l non sono della stessa specie sono pure nulle. Di più se i, k, l sono della stessa specie per es. della r^{esima} le A_{ik}, $\left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\}$ sono identiche tanto calcolate rispetto all'elemento totale, quanto rispetto all'elemento parziale r^{esimo}. Se noi prendiamo un elemento lineare $B = \sum_{n_{r-1}+1}^{n_r} b_{ik}(x_{n_{r-1}+1}, x_{n_{r-1}+2}, \ldots, x_{n_r})\, dx_i\, dx_k$ tale che i simboli relativi $\left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\}$ siano identici ai simboli corrispondenti per l'elemento (11), avremo perciò per un'osservazione precedente e poichè l'elemento parziale r^{esimo} non è spezzabile, che B è simile a questo elemento parziale.

Se noi vogliamo esprimere che il problema (ds^2, A_i) dove ds^2 ha il valore (11), e A_i sono le forze, è tale che le equazioni differenziali corrispondenti ammettono il gruppo generato da $X = \sum_1^{n_m} \xi_r \frac{\partial}{\partial x_r}$, troviamo subito le condizioni $\left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\}' = 0$ $(i, k, l = 1, 2, \ldots, n_m)$ insieme all'altra condizione (che scriveremo più tardi) che il sistema covariante delle A_i sia invariante per il nostro gruppo. Studiamo ora dapprima il sistema delle $\left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\}' = 0$. Se i, k, l sono di una stessa specie, p. es. della specie r^{esima}, si riconosce subito dalle (11) per le osservazioni fatte poc'anzi che queste ultime equazioni non mutano per nulla se invece di scriverle per la X e per l'elemento totale le scriviamo per la $Y^{(r)} = \sum_{n_{r-1}+1}^{n_r} \xi_t \frac{\partial}{\partial x_t}$ (che chiameremo la r^{esima} trasformazione parziale) e per l' « r »^{esimo} elemento lineare parziale. Per questo elemento la $Y^{(r)}$ è perciò geodetica, ossia ne trasforma in sè le geodetiche; di più la $Y^{(r)}$ ne moltiplica il discriminante per una costante. *Ma poichè per ipotesi detto elemento lineare non è spezzabile, la* $Y^{(r)}$ *sarà per questo elemento una trasformazione simile* per un teorema poco fa enunciato. Studiamo ora le equazioni $\left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\}' = 0$, quando i, k, l non appartengano alla stessa specie. Siano i, k, l simboli di specie differenti; questa equazione si riduce alla

$$\frac{\partial^2 \xi_l}{\partial x_i\, \partial x_k} = 0 \tag{12}$$

(specie di « l » $\neq$ specie di $i \neq$ specie di $k \neq$ specie di l).

Siano invece i, k di una stessa specie distinta dalla specie di l. L' equazione $\left\{ \begin{smallmatrix} ik \\ l \end{smallmatrix} \right\}' = 0$ diventa:

$$(13) \qquad \frac{\partial^2 \xi_l}{\partial x_i \, \partial x_k} - \sum_t \left\{ \begin{matrix} ik \\ t \end{matrix} \right\} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_t} = 0$$

$$(\text{specie } t = \text{specie } i = \text{specie } k \neq \text{specie di } l)$$

dove la t prende successivamente i valori dei simboli della specie di i, k.

Infine se i, l sono di una stessa specie differente dalla specie di k, la $\left\{ \begin{smallmatrix} ik \\ l \end{smallmatrix} \right\}' = 0$ diventa:

$$\frac{\partial^2 \xi_l}{\partial x_i \, \partial x_k} + \sum_t \left\{ \begin{matrix} it \\ l \end{matrix} \right\} \frac{\partial \xi_t}{\partial x_k} = 0$$

$$(\text{specie } t = \text{specie di } i = \text{specie di } l \neq \text{specie di } k)$$

le quali ultime ci danno

$$(14) \qquad \frac{\partial \xi_l}{\partial x_i} + \sum_t \left\{ \begin{matrix} it \\ l \end{matrix} \right\} \xi_t = \varphi_{li} \quad (\text{specie } t = \text{specie } i = \text{specie di } l)$$

dove φ_{li} è funzione delle sole variabili della specie degli indici i, t, l. Notiamo che se i, t, l sono di specie r^{esima}, le equazioni che dicono essere la r^{esima} trasformazione parziale un puro movimento per l' r^{esimo} elemento parziale si possono scrivere

$$\sum_v (a_{iv}^{(r)} \varphi_{vk} + a_{kv}^{(r)} \varphi_{vi}) = 0 \quad (r = \text{specie } i = \text{specie } v = \text{specie } k) \, .$$

Infatti per le (14) queste equazioni equivalgono alle equazioni di Killing.

In particolare perciò se le φ_{ik} (r = specie i = specie k) sono tutte nulle per una trasformazione infinitesima Y che operi soltanto sulle variabili di specie r, la Y è un movimento per l' r^{esimo} elemento parziale; i movimenti di questo tipo per una forma quadratica si diranno da noi movimenti speciali. Per semplicità indichiamo con $(ds^2)_r$ l' r^{esimo} elemento parziale; e se con X_i indichiamo una trasformazione infinitesima, indichiamo con $X_i^{(r)}$ la corrispondente r^{esima} trasformazione parziale; sia ora X una trasformazione infinitesima che trasformi in sè le equazioni dei movimenti; siano $Y_1^{(r)} Y_2^{(r)} \ldots Y_{t_r}^{(r)}$ tutte le trasformazioni simili ammesse dall'elemento parziale r^{esimo}; anzi, poichè un gruppo di similitudini a t_r parametri o è tutto formato di puri movimenti o contiene un sottogruppo a « $t_r - 1$ » parametri tutto formato di movimenti, noi potremo supporre che *al più* una sola delle Y precedenti, per es. la $Y_1^{(r)}$ sia una similitudine effettiva e che le altre siano puri movimenti. Allora poichè la trasformazione parziale $X^{(r)}$ è pure una similitudine per $(ds^2)_r$, sarà $X^{(r)} = \sum_{i=1}^{tr} \varphi_i \, Y_i^{(r)}$ dove le φ_i saranno funzioni delle variabili x, che non sono di specie r^{esima}. Di più se la $Y_1^{(r)}$ non fosse un puro movimento, ma una similitudine propria, la φ_1 dovrebbe essere una costante. Se ora esistono almeno tre specie distinte e se m, n sono due indici di specie distinta tra di loro e della specie r^{esima}, sarà per le (12)

$$\sum_{i=1}^{tr} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_m \, \partial x_n} Y_i^{(r)} = 0$$

ossia, poichè le $Y_i^{(r)}$ sono linearmente indipendenti, $\dfrac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_m \, \partial x_n} = 0$. Cioè le funzioni φ_i saranno somma di una funzione delle variabili di I^a specie, di una funzione delle variabili di II^a specie ecc. Ricordando però che le φ_i non contengono le variabili di specie r^{esima}, potremo perciò porre

$$\varphi_i = \psi_i^{(1)} + \cdots + \psi_i^{(r-1)} + \psi_i^{(r+1)} + \cdots + \psi_i^{(m)}$$

dove con $\psi_i^{(t)}$ indichiamo una funzione delle variabili di specie t^{esima} e dove, se $Y_1^{(r)}$ fosse una similitudine propria per $(ds^2)_r$ le $\psi_1^{(t)}$ sarebbero altrettante costanti.

Sostituendo nelle (13) e ricordando che le $Y_i^{(r)}$ sono linearmente indipendenti, troviamo subito che le $\psi_i^{(t)}$ che sono funzioni soltanto delle variabili di specie t^{esima}, hanno rispetto $(ds^2)_t$ nulle tutte le derivate seconde covarianti; ma è facile riconoscere, usando di una osservazione del professore Levi-Civita (cfr. Ricci, *Sui gruppi continui di movimenti* ecc. Società dei XL 1899, pag. 77-78) che se una funzione u ha le derivate seconde covarianti nulle rispetto a una forma $\sum a_{ik}\, dx_i\, dx_k$, allora

$$Z = \sum_{r,s} A_{tr} \frac{\partial u}{\partial x_t} \frac{\partial}{\partial x_r}$$

è per la forma un movimento infinitesimo. Infatti, anche senza usare del calcolo assoluto, notiamo che le condizioni affinchè Z sia un movimento per la forma sono le:

$$\sum_{r,s} \left[A_{rs} \frac{\partial u}{\partial x_s} \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_r} + a_{ir} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(A_{rs} \frac{\partial u}{\partial x_s}\right) + a_{kr} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{rs} \frac{\partial u}{\partial x_s}\right) \right] = 0$$

ossia

$$2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_k} + \sum_s \frac{\partial u}{\partial x_s} \left\{ \sum_r A_{sr} \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_r} + a_{ir} \frac{\partial A_{rs}}{\partial x_k} + a_{kr} \frac{\partial A_{rs}}{\partial x_i} \right\} = 0$$

ossia

$$2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_k} + \sum_s \frac{\partial u}{\partial x_s} \left\{ \sum_t A_{st} \left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_t} - \frac{\partial a_{it}}{\partial x_k} - \frac{\partial a_{kt}}{\partial x_i} \right) \right\} = 0$$

ossia

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_k} - \sum_s \begin{Bmatrix} ik \\ s \end{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_s} = 0 \qquad \text{c. d. d.}$$

Se perciò di una forma quadratica conosciamo il gruppo completo dei movimenti, potremo con sole quadrature determinare le *eventuali* funzioni corrispondenti a derivate seconde covarianti nulle.

Esaminiamo ora infine le (14). Se noi in esse al posto delle ξ_i sostituiamo successivamente i coefficienti di $Y_1^{(r)}, Y_2^{(r)} \ldots Y_{tr}^{(r)}$ e indichiamo $\varphi_{ti}^{(s)}$ $(s = 1, 2, \ldots, t_r)$, i risultati corrispondenti, queste equazioni diventano

$$(15) \qquad \sum_s \varphi_s \, \varphi_{ti}^{(s)} = \varphi_{ti} \qquad (r = \text{specie } t = \text{specie } i)$$

dove le φ_{ti} sono funzioni delle variabili della specie r^{esima}. Per il risultato generale che abbiamo in vista è inutile studiare più particolarmente queste equazioni. Ora notiamo che se X_i sono le forze impresse, è $\sum X_i \, \delta x_i$ la loro potenza per un atto di movimento virtuale δx_i; le X_i sono perciò un sistema covariante e perciò le $\sum_s A_{rs} X_s = X^{(s)}$ formano un sistema controvariante. Se indichiamo ora con $X_{r_1 r_2 \ldots r_m}$, $X^{r_1 r_2 \ldots r_m}$ rispettivamente due sistemi uno covariante e uno controvariante e con $\overline{X}_{r_1 \ldots r_m}$, $\overline{X}^{r_1 \ldots r_m}$ le loro variazioni per una trasformazione $X = \sum_r \xi_r \frac{\partial}{\partial x_r}$, si ha (cfr. mia Mem. cit.)

$$\overline{X}_{r_1 \ldots r_m} = X(X_{r_1 \ldots r_m}) + \sum_t \left(X_{t r_2 \ldots r_m} \frac{\partial \xi_t}{\partial x_{r_1}} + X_{r_1 t r_3 \ldots r_m} \frac{\partial \xi_t}{\partial x_{r_2}} + \ldots \right)$$

$$\overline{X}^{r_1 \ldots r_m} = X(X^{r_1 \ldots r_m}) - \sum_t \left(X^{t r_2 \ldots r_m} \frac{\partial \xi_{r_1}}{\partial x_t} + X^{r_1 t r_3 \ldots r_m} \frac{\partial \xi_{r_2}}{\partial x_t} + \ldots \right).$$

Nel nostro caso avremo perciò ancora le equazioni

$$0 = \overline{X}_i = \sum_r \left(\xi_r \frac{\partial X_i}{\partial x_r} + X_r \frac{\partial \xi_r}{\partial x_i} \right)$$

o le equivalenti:

$$0 = \overline{X}^i = \sum_r \left(\xi_r \frac{\partial X^i}{\partial x_r} - X^r \frac{\partial \xi_i}{\partial x_r} \right)$$

o ciò ch'è lo stesso la trasformazione infinitesima $\sum X^{(r)} \frac{\partial}{\partial x_r}$ è permutabile con la $\sum \xi_r \frac{\partial}{\partial x_r}$.

Otteniamo così finalmente:

Per costruire tutti quei problemi dinamici tali che le equazioni differenziali dei corrispondenti movimenti ammettono un gruppo continuo indipendente dal tempo, e la cui forza viva è pure indipendente dal tempo *si proceda nel modo seguente: Si costruiscano le forme quadratiche del tipo* (11), *dove ciascuna delle forme parziali (supposte p. es. non ulteriormente spezzabili) ammette un gruppo di similitudini (ridotto per qualcuna eventualmente all'identità); ciò che per i risultati dei miei lavori citati sappiamo fare con sole quadrature; per ciascuna di queste forme parziali si determinino le eventuali funzioni non costanti a derivate seconde covarianti nulle, ciò che abbiamo pure visto effettuabile con sole quadrature, perchè di ciascuna di queste forme conosciamo il gruppo completo di movimenti. Siano* $X_1^{(i)} \dots X_{m_i}^{(i)}$ *i movimenti infinitesimi della « i »*^{esima} *forma parziale,* $\varphi_1^{(i)} \dots \varphi_{n_i}^{(i)}$ *le funzioni corrispondenti a derivate seconde covarianti nulle* (per qualche valore di i potrà essere $n_i = 0$ oppure $m_i = 0$) *e siano* $Y_1 \dots Y_\sigma$ *le eventuali trasformazioni simili ammesse da qualcuna di queste forme. Consideriamo il gruppo generato dalle* Y, *dalle* X *e da quelle trasformazioni infinitesime*

$$\sum_{\rho, l} \varphi_\rho^{(j)} X_l^{(i)} \text{ dove } i, j = 1, 2, \dots, m, (i \neq j)$$

(se m sono le forme parziali) $(\varrho = 1, 2, \dots, n_j)$, $(l = 1, 2, \dots, m_i)$ *che soddisfanno alle* (14). *Sia* Γ *o questo gruppo o un suo sottogruppo qualsiasi e sia* $\sum X^{(l)} \frac{\partial}{\partial x_l}$ *una trasformazione infinitesima permutabile con ogni trasformazione di* Γ *(eventualmente identicamente nulla). I problemi dinamici* (ds^2, X_l) *dove* ds^2 *è la forma* (11), $X_l = \sum_v a_{lv} X^{(v)}$ *sono tali che le corrispondenti equazioni differenziali ammettono il gruppo* Γ *e sono anzi i più generali problemi di questo tipo.*

I risultati precedenti non cambiano sostanzialmente (come è agevole verificare) *se una delle forme parziali si riduce a una forma su una sola variabile, ossia al quadrato del differenziale di una sola variabile.*

È ora chiaro senz'altro, come ci attestano i metodi di Lie, che l'integrazione dei problemi precedenti deve presentare notevoli particolarità: particolarità che non è per nulla difficile rilevare e di cui per ora io non mi occuperò, per non allungare il presente lavoro.