ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCC.

1903

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XII.

2° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1903

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia sino al 6 settembre 1903.

Matematica. — *Sulle trasformazioni infinitesime che lasciano invariata una forma o un'equazione ai differenziali totali.* Nota V del Corrispondente ERNESTO PASCAL.

In questa Nota ci proponiamo di stabilire i teoremi pei casi in cui la trasformazione infinitesima, che lasci invariata la equazione $X^{(r)}=0$ (¹), abbia eguali a zero l'invariante $\mathcal{A}$ o i covarianti C, e indi studiare quelle altre trasformazioni infinitesime più generali che applicate alla $X^{(r)}$ danno per risultato, oltre la $X^{(r)}$ medesima moltiplicata per un fattore, un differenziale r^{mo} esatto, ovvero una somma di differenziali esatti di ordini diversi, e di esaminarne il legame intimo colle matrici a caratteristiche invarianti cui abbiamo già accennato nelle Note precedenti. Alcune di queste trasformazioni infinitesime sono precisamente quelle la cui esistenza, come dimostreremo in altra Nota, corrisponde all'esistenza di trasformazioni finite che diminuiscono, in un modo o in un altro, il numero delle variabili nella forma differenziale data, ed è ciò appunto che costituisce la loro notevole importanza.

1. *Notazione per le matrici a caratteristica invariante.* — Prima di procedere oltre è bene stabilire una notazione uniforme per designare le varie matrici a caratteristica invariante contenute nella matrice totale (31) della Nota precedente (²).

(¹) V. questi Rendiconti (5), t. XII, 1903, 1° sem. pp. 41-53.

(²) Vedi anche la Nota di Sinigallia in Rend. Ist. Lomb. (2), t. 36, 1903, pp. 650-668.

Porremo:

$$\| X_{j_1 \dots j_\rho} \,,\, (j_1 \dots j_\rho 1) \cdots\cdots (j_1 \dots j_\rho n) \| \equiv (M)_\rho$$
$$\| X_{j_1 \dots j_\rho} \,,\, \}j_1 \dots j_\rho 1\{ \cdots\cdots \}j_1 \dots j_\rho n\{ \| \equiv \}M\{_\rho$$

dove ai primi membri di questa formola si intendono le matrici le cui linee si ottengono dando a ciascuno degli indici $j_1 \dots j_\rho$ tutti i valori $1, 2, \dots n$, ma lasciando fisso ϱ; similmente indicheremo invece con $(M')_\rho$ e $\}M'\{_\rho$ le medesime matrici ma prive della prima colonna. Indicheremo inoltre con M la sola prima linea di (31) e con M′ la medesima ma senza il primo elemento. Queste matrici le chiameremo *elementari*. Infine le matrici ottenute ponendo le une sotto le altre le linee di varie matrici elementari le rappresenteremo colla *somma simbolica* dei simboli relativi alle varie componenti.

Il Sinigallia ha fatto vedere, nella Nota succitata, che sono invarianti le caratteristiche delle matrici

$$\varepsilon M + \sum_{\rho=1}^{s} [(M)_\rho + \}M\{_\rho] + (M)_{s+1} + \}M\{_{s+2} + \cdots$$

$$\varepsilon M + \sum_{\rho=1}^{s} [(M)_\rho + \}M\{_\rho] + \}M\{_{s+1} + (M)_{s+2} + \cdots$$

dove s è un numero qualunque, ε può essere zero o 1, e il numero dei termini dopo l' $s+1^{mo}$ è arbitrario, ma naturalmente scelto in modo che l' ultimo termine non abbia indice maggiore di r, almenochè esso non sia $(M)_r$. Sono inoltre ancora invarianti le caratteristiche delle altre matrici formate in modo simile colle M′, (M′), }M′{. La matrice (31) della Nota precedente, che comprende tutte le matrici elementari, resta così indicata con

$$M + \sum_{\rho=1}^{r-1} [(M)_\rho + \}M\{_\rho] + (M)_r \,.$$

Di queste notazioni faremo utilmente uso nel paragrafo 5, mentre nel paragrafo quì seguente, dovendo spesso indicare quest' ultima matrice, la indicheremo meglio per brevità con la sola lettera E.

2. *Trasformazioni infinitesime che lasciano invariata* $X^{(r)} = 0$ *e per le quali è* $C^{(r-1)} = 0$. — Se è $C^{(r-1)} = 0$, saranno zero anche tutte le $C^{(s)}$ per $s = 1, 2, \dots r-2$, è perciò la formola (10) della Nota precedente diventa:

(1) $$\Xi X^{(r)} = d^r \mathcal{A} + L^{(r)}$$

e la (23):

(2) $$L^{(r)} = \mu X^{(r)} - d^r \mathcal{A}$$

mentre le equazioni a derivate parziali cui deve soddisfare l'invariante A si riducono a:

$$\zeta_0 A - \sum_{\rho=1}^{r-1} \sum_{j_1 \dots j_\rho} \left(\zeta_{j_1 \dots j_\rho} + \zeta^{(1)}_{j_1 \dots j_\rho}\right) \frac{\partial^\rho A}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_\rho}} - \sum_{j_1 \dots j_r} \zeta_{j_1 \dots j_r} \frac{\partial^r A}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_r}} = 0 \tag{3}$$

in cui le ζ devono soddisfare alle (32) (33) della Nota precedente, se la Ξ deve lasciare invariata *l'equazione* $X^{(r)} = 0$, e devono invece soddisfare alle sole (33) se deve essere $\mu = 0$, cioè se la Ξ deve lasciare invariata *la forma* $X^{(r)}$.

Se A deve essere *costante diverso da zero*, bisogna che $\zeta_0 = 0$ sia una conseguenza delle (32) (33) nel primo caso, e sia una conseguenza delle sole (33) nel secondo caso. Ora chiamando, per brevità, E la matrice (31), $E_{1,0}$ quella ottenuta da (31) sopprimendo la prima linea, $E_{0,1}$ quella ottenuta sopprimendo la prima colonna, e $E_{1,1}$ quella ottenuta sopprimendo la prima linea e la prima colonna, perchè si abbia quanto abbiamo detto è necessario e basta che E e $E_{1,0}$ *non* abbiano la stessa caratteristica, ovvero (nel secondo caso) che $E_{0,1}$ e $E_{1,1}$ *non* abbiano la stessa caratteristica.

Abbiamo perciò:

Perchè esista una trasformazione infinitesima che lasci invariata la equazione $X^{(r)} = 0$ (*ovvero rispettivamente la forma* $X^{(r)}$) *e per la quale sia il covariante* $C^{(r-1)} = 0$, *mentre* A *non sia costante, è necessario e basta che esista una soluzione comune* A *di tutte le equazioni a derivate parziali* (3), *i cui coefficienti* ζ *rappresentino tutti i possibili sistemi di soluzioni delle equazioni lineari* (32) *e* (33) *della Nota precedente* (*ovvero rispettivamente solo* (33)).

Se poi deve essere $C^{(r-1)} = 0$ *e* $A = cost.$ *ma diversa da zero, allora per l'esistenza della trasformazione infinitesima è necessario e basta che* E *e* $E_{1,0}$ *non abbiano la stessa caratteristica* (*ovvero rispettivamente che* $E_{0,1}$ *e* $E_{1,1}$ *non abbiano la stessa caratteristica*). *Ciò porta intanto che* $E_{1,0}$ (*rispettivamente* $E_{1,1}$) *deve essere zero, non potendo* E *avere caratteristica maggiore di* $n+1$, *e quindi dovendo* $E_{1,0}$ *avere al più caratteristica eguale ad* n.

La trattazione che di questo teorema abbiamo fatta nella Nota: *Trasformazioni infinitesime e forme ai differenziali di 2º ordine*, pubblicata l'anno scorso in questi medesimi Rendiconti [(5), t. XI, 1902, 2º sem., pp. 167-173, vedi pp. 171-172] è da modificarsi laddove si pone per condizione la *completa integrabilità* della $X^{(2)} = 0$; ciò perchè è da osservassi che A soddisfa *in generale* solo ad *alcune* ma non a *tutte* le equazioni del *sistema aggiunto* alla $X^{(2)} = 0$. Di quel teorema del resto non abbiamo mai, nè in quell'occasione nè in altra, fatto alcun uso. C'è però effettivamente un caso in cui interviene la completa integrabilità, caso tanto più notevole in quanto non si presenta per $r=1$ cioè per le ordinarie equazioni pfaffiane; ed è di esso che ora vogliamo trattare.

Supponiamo che $\xi_0 = 0$ *sia una conseguenza delle equazioni* (32) (33), cioè che E e $E_{1,0}$ non abbiano la stessa caratteristica (e quindi $E_{1,0}$ sia zero).

Poniamo:

$$\zeta_{j_1 \dots j_\rho} + \zeta^{(1)}_{j_1 \dots j_\rho} = \zeta'_{j_1 \dots j_\rho} \qquad (\varrho = 1, 2, \dots r-1)$$

$$\zeta_{j_1 \dots j_r} = \zeta'_{j_1 \dots j_r}$$

in modo che le equazioni (32) (33) si riducono facilmente a:

$$\sum_{\rho=1}^{r} \sum_{j_1 \dots j_\rho} X_{j_1 \dots j_\rho} \zeta'_{j_1 \dots j_\rho} = 0 \tag{4}$$

$$\sum_{\rho=1}^{r} \sum_{j_1 \dots j_\rho} (j_1 \dots j_\rho\, i)\, \zeta'_{j_1 \dots j_\rho} + 2 \sum_{\rho=1}^{r-1} \sum_{j_1 \dots j_\rho} ((i, j_1 \dots j_\rho))\, \zeta^{(1)}_{j_1 \dots j_\rho} = 0 \tag{5}$$

mentre la (3) diventa

$$\sum_{\rho=1}^{r} \sum_{j_1 \dots j_\rho} \zeta'_{j_1 \dots j_\rho} \frac{\partial^\rho A}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_\rho}} = 0. \tag{6}$$

Nella equazione lineare (4) non compariscono le incognite $\zeta^{(1)}$, e nella (6) non compariscono che solo le ζ'. *Se quindi si ammette che per* QUALUNQUE *sistema di valori ζ' che soddisfacciano la* (4) *si trovano sempre valori $\zeta^{(1)}$ che soddisfacciano la* (5), allora A soddisferà a *tutte* le equazioni a derivate parziali del *sistema* cosiddetto *aggiunto* alla equazione $X^{(r)} = 0$ (¹), e quindi le equazioni del sistema aggiunto ammettendo una soluzione comune, la $X^{(r)} = 0$ sarà *completamente integrabile*, e la $X^{(r)}$ sarà propriamente il prodotto di un fattore finito per il differenziale r^{mo} di A (²). Abbiamo dunque

(¹) Per la nozione di *sistema aggiunto* vedi la mia Memoria negli Annali di Matematica (3), t. VII, ovvero la Nota di Sinigallia [in Rend. Ist. Lomb. (2), t. 35, 1902, p. 749.

(²) Questa ultima deduzione risulta immediatamente da quanto si sa sui sistemi aggiunti, ma può anche dimostrarsi subito nel seguente modo: Se la (6) deve essere soddisfatta per tutti i sistemi di valori delle ζ' che soddisfanno la (4), i coefficienti di (4) e (6) devono essere proporzionali e quindi

$$X_{j_1 \dots j_\rho} = \sigma \,.\, \frac{\partial^\rho A}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_\rho}}$$

donde

$$X^{(r)} = \sigma\, d^r A\,.$$

che *nel caso indicato, per l'esistenza della trasformazione infinitesima* Ξ *che lasci invariata* $X^{(r)}=0$ *è necessario che* $X^{(r)}=0$ *sia completamente integrabile, e allora per la ricerca di* Ξ, *basta assumere per funzione* $\varDelta$ *l'integrale di* $X^{(r)}=0$.

È da notarsi che per $r=1$ le variabili $\zeta^{(1)}$ spariscono, e quindi allora le sole ζ' devono soddisfare le (4) e le (5), e perciò le (6) non rappresentano più *tutte* le equazioni del sistema aggiunto. Quindi è solo per $r>1$ che vale il precedente teorema.

3. *Caso in cui è anche* $\varDelta=0$. — Facilmente possiamo ora stabilire il teorema per il caso in cui sia $C^{(r-1)}=\varDelta=0$; caso che è specialmente per noi interessante perchè sono le trasformazioni infinitesime ad esso relative che si presentano per uno dei problemi di riduzione di Pfaff.

In tal caso le equazioni cui devono soddisfare la ξ sono tutte omogenee, e si ha:

Condizione necessaria e sufficiente perchè esista una trasformazione infinitesima che lasci invariata $X^{(r)}=0$ (*ovvero rispettivamente la forma* $X^{(r)}$) *e per cui sieno zero il covariante* $C^{(r-1)}$, *e l'invariante* $\varDelta$, *è che sia zero la matrice* E (*ovvero rispettivamente la matrice* $E_{0,1}$).

E dopo di ciò passiamo ad una categoria più generale di trasformazioni infinitesime.

4. *Trasformazioni infinitesime che lasciano invariata la equazione* $X^{(r)}=0$ *a meno di differenziali esatti.* — Una categoria di trasformazioni infinitesime che ci è necessaria di considerare per le applicazioni che dovremo farne in seguito e che è più generale della precedente, è quella delle trasformazioni che applicate alla $X^{(r)}$ danno per risultato, oltre che la forma stessa moltiplicata per un fattore, una somma di differenziali esatti di vari ordini, e propriamente:

$$\Xi X^{(r)}=\mu X^{(r)}+d^r V+\sum_{\mu=1}^{r-1}(-1)^{\mu}\binom{r}{\mu}d^{r-\mu}V^{(\mu)} \tag{7}$$

dove V sia una funzione finita delle x, e $V^{(1)}\ldots V^{(r-1)}$ sieno delle forme differenziali di ordini $1,2,\ldots r-1$ formanti una successione di quelle che abbiamo chiamate *canoniche* nella Nota precedente, cioè tali che i coefficienti a $1,2,\ldots\mu-1$ indici di $V^{(\mu)}$ sieno tutti quelli che compaiono in $V^{(\mu-1)}$.

Diremo che *tali trasformazioni infinitesime lasciano invariata la equazione* $X^{(r)}=0$ *a meno di differenziali esatti.* Se $\mu=0$ allora diremo invece che *esse lasciano invariata la forma a meno di differenziali esatti.*

È necessario però, prima di procedere oltre, illustrare la ragione per la quale, dovendo scegliere una somma di differenziali esatti, abbiamo scelto precisamente una combinazione del tipo del secondo membro di (7), che è in apparenza di un tipo abbastanza speciale.

L'idea di ciò ci è stata naturalmente suggerita dall'osservare il modo con cui è fatto il secondo membro della formola che dà il risultato dell'applicazione di una Ξ su $X^{(r)}$ (v. formola (10) della Nota precedente); noi osserviamo che il secondo membro della (7) può solo porsi eguale ad un' espressione che sia del *medesimo* tipo delle forme differenziali $X^{(r)}$, e ciò perchè nella Nota precedente abbiamo appunto fatto vedere che tale proprietà deve avere in ogni caso il secondo membro di (7). Ora nella stessa Nota abbiamo anche dimostrato, servendoci di formole precedentemente ottenute, che una combinazione come il sommatorio che figura nel secondo membro di (7) è una forma differenziale del tipo $X^{(r)}$, ed è questa la ragione per la quale siamo indotti a porre la (7).

Mediante la (10) della Nota precedente la (7) dà:

$$L^{(r)} = \mu X^{(r)} + d^r (V - \mathcal{A}) + \sum_{\mu=1}^{r-1} (-1)^\mu \binom{r}{\mu} d^{r-\mu} (V^{(\mu)} - C^{(\mu)}) \tag{8}$$

donde ricaveremo le equazioni lineari cui devono soddisfare le ξ, e la μ.

Ponendo

$$\left\{ \begin{aligned} & V - \mathcal{A} = -F \\ & V^{(\rho)} - C^{(\rho)} = -F^{(\rho)} \end{aligned} \right. \tag{9}$$

osservando che $F^{(\rho)}$ è una forma differenziale di ordine ϱ i cui coefficienti sono tutti la differenza di quelli analoghi in $C^{(\rho)}$ e $V^{(\rho)}$, e tenendo presenti tutti gli sviluppi eseguiti nella Nota IV, ricaviamo che le suddette equazioni lineari si ottengono dalle (24) (25) già trovate nella medesima Nota, ponendovi in luogo di $\mathcal{A}$ e di $C^{(\rho)}$ le espressioni F e $F^{(\rho)}$.

Si hanno così le equazioni:

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_i (j_1 \dots j_r\, i)\, \xi_i = \mu X_{j_1 \dots j_r} - \frac{\partial^r F}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_r}} + [[j_1 \dots j_r]]_F + 2 F_{j_1 \dots j_r} \\ & \sum_i \}j_1 \dots j_{r-1}\, i\{\, \xi_i = \mu X_{j_1 \dots j_{r-1}} - \frac{\partial^{r-1} F}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_{r-1}}} + [[j_1 \dots j_{r-1}]]_F + 2 F_{j_1 \dots j_{r-1}} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \sum_i \}j_1\, i\{\, \xi_i = \mu X_j - \frac{\partial F}{\partial x_{j_1}} + 2 F_{j_1} \end{aligned} \right. \tag{10}$$

per il caso di r pari, e

$$
(11)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\sum_i (j_1 \dots j_r\, i)\, \xi_i = \mu\, X_{j_1 \cdots j_r} - \frac{\partial^r F}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_r}} + [[j_1 \dots j_r]]_F \\
&\sum_i \}j_1 \dots j_{r-1}\, i\{\, \xi_i = \mu\, X_{j_1 \cdots j_{r-1}} - \frac{\partial^{r-1} F}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_{r-1}}} + [[j_1 \dots j_{r-1}]]_F \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\sum_i (j_1\, i)\, \xi_i = \mu\, X_{j_1} - \frac{\partial F}{\partial x_{j_1}}
\end{aligned}
\right.
$$

per r dispari.

La matrice dei coefficienti delle ξ in queste equazioni lineari non è più la matrice E, ma quella che colle notazioni del paragrafo 1, resta rappresentata con

$$
(12)\qquad (M)_r + \}M\{_{r-1} + (M)_{r-2} + \cdots
$$

Formando ora il sistema di $n+1$ equazioni:

$$
(13)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\sum_{\rho=1}^{r} \sum_{j_1 \cdots j_\rho} X_{j_1 \cdots j_\rho}\, \zeta_{j_1 \cdots j_\rho} = 0 \\
&\sum_{j_1 \cdots j_r} (j_1 \dots j_r\, i)\, \zeta_{j_1 \cdots j_r} + \sum_{j_1 \cdots j_{r-1}} \}j_1 \dots j_{r-1}\, i\{\, \zeta_{j_1 \cdots j_{r-1}} + \cdots\cdots = 0 \\
&\qquad\qquad (i = 1, 2, \dots n)
\end{aligned}
\right.
$$

si riconosce che *per l'esistenza della trasformazione infinitesima della indicata specie è necessario e basta che la funzione* F *e i coefficienti delle varie* $F^{(\mu)}$ *soddisfacciano al sistema di equazioni a derivate parziali:*

$$
(14)\qquad \sum_{\rho=1}^{r} \sum_{j_1 \cdots j_\rho} \zeta_{j_1 \cdots j_\rho} \frac{\partial^\rho F}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_\rho}} - \sum_{\rho=2}^{r} \sum_{j_1 \cdots j_\rho} \zeta_{j_1 \cdots j_\rho} [[j_1 \dots j_\rho]]_F -
$$
$$
- 2 \sum_{\rho=1}^{r} \sum_{j_1 \cdots j_\rho} \zeta_{j_1 \cdots j_\rho} F_{j_1 \cdots j_\rho} = 0
$$

se r è pari (ovvero ad un sistema di analoghe equazioni, ma prive dell'ultima parte, se r è dispari), in cui le ξ rappresentino un qualunque sistema di soluzioni delle (13); *o, in altri termini, è necessario e basta che esistano delle* F *soddisfacenti a tutte queste equazioni a derivate parziali. Se poi in* (7) *deve essere $\mu = 0$, cioè se la Ξ deve lasciare invariata, a meno di differenziali esatti, la forma, non l'equazione, allora fra le* (13) *bisogna sopprimere la prima.*

5. *Caso in cui tutte le* F *sono zero. Legame fra l'esistenza di trasformazioni infinitesime di tale specie e l'annullarsi di matrici a caratteristica invariante.* — Si possono ora studiare i casi in cui le F sono zero ovvero quelli in cui sono zero le V, ma fra tutti i casi che potrebbero così presentarsi considereremo solo quello pel quale tutte le F sono zero, cioè

$$(15)\qquad \begin{cases} \mathrm{V} = \varLambda \\ \mathrm{V}^{(\varrho)} = \mathrm{C}^{(\varrho)} \qquad (\varrho = 1\,,2\,,\ldots r-1) \end{cases}$$

caso che, se $\mu = 0$, corrisponde a quello in cui *è zero il covariante simultaneo* $\mathrm{L}^{(r)}$ *della forma data e della trasformazione infinitesima*, come si riconosce immediatamente dalle (8), ovvero, se μ è diverso da zero, corrisponde a quello in cui *il covariante* $\mathrm{L}^{(r)}$ *coincide, a meno di un fattore, colla forma originaria.*

La Ξ applicata alla forma dà in questo caso:

$$(16)\qquad \Xi\,\mathrm{X}^{(r)} = \mu\,\mathrm{X}^{(r)} + d^r \varLambda + \sum_{\varrho=1}^{r-1} (-1)^\varrho \binom{r}{\varrho} d^{r-\varrho}\,\mathrm{C}^{(\varrho)}$$

e le equazioni lineari (10) o (11) diventano omogenee.

Poniamoci ora da un punto di vista generale. Supponiamo che sia $\mathrm{C}^{(s)} = 0$ $(s \leq r-1)$ e quindi che sieno anche zero tutte le $\mathrm{C}^{(1)}\,\mathrm{C}^{(2)} \ldots \mathrm{C}^{(s-1)}$.

Allora alle (10) o (11) rese omogenee bisogna ancora aggregare le

$$(22)\qquad \sum_i ((i\,,j_1 \ldots j_\varrho))\,\xi_i = 0 = \mathrm{C}_{j_1 \cdots j_\varrho} \begin{pmatrix} \varrho = 1\,,2\,,\ldots s \\ j_1 \ldots j_\varrho = 1\,,2\,,\ldots n \end{pmatrix}$$

e a queste cogli stessi procedimenti tenuti nel paragrafo 3 della Nota precedente, possono sostituirsi le altre:

$$(18)\qquad \left(\begin{array}{l} \sum_i (j_1\, i)\,\xi_i = \mu\,\mathrm{X}_{j_1} \\ \sum_i \}j_1\, j_2\, i\{\,\xi_i = \mu\,\mathrm{X}_{j_1 j_2} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \sum_i \}j_1 \ldots j_s\, i\{\,\xi_i = \mu\,\mathrm{X}_{j_1 \cdots j_s} \end{array}\right) \text{ se } r \text{ è pari ed } s \text{ pari}$$

ovvero

$$(19)\qquad \left(\begin{array}{l} \sum_i (j_1\, i)\,\xi_i = \mu\,\mathrm{X}_{j_1} \\ \sum_i \}j_1\, j_2\, i\{\,\xi_i = \mu\,\mathrm{X}_{j_1 j_2} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \sum_i (j_1 \ldots j_s\, i)\,\xi_i = \mu\,\mathrm{X}_{j_1 \cdots j_s} \end{array}\right) \text{ se } r \text{ è pari ed } s \text{ dispari}$$

e così di seguito.

Se poi si vuole che anche $\varDelta$ sia zero, bisogna ancora considerare la equazione

$$\sum_i X_i \xi_i = 0. \tag{20}$$

La matrice dei coefficienti di tutte le equazioni lineari così ottenute è precisamente una di quelle considerate nel paragrafo 1, e quindi possiamo infine stabilire la seguente corrispondenza generale fra l'esistenza di trasformazioni infinitesime che lasciano invariata la equazione $X^{(r)} = 0$, (ovvero la forma $X^{(r)}$) a meno di differenziali esatti dell'invariante $\varDelta$ e dei covarianti C, e le matrici a caratteristiche invarianti:

All'annullarsi della matrice

$$\varepsilon M + \sum_{\rho=1}^{s} [(M)_\rho + \}M\{_\rho] + \}M\{_{s+1} + (M)_{s+2} + \cdots + (M)_r$$

(se $r-s$ è pari)

ovvero

$$\varepsilon M + \sum_{\rho=1}^{s} [(M)_\rho + \}M\{_\rho] + (M)_{s+1} + \}M\{_{s+2} + \cdots + (M)_r$$

(se $r-s$ è dispari)

in cui ε è zero o 1, corrisponde l'esistenza di trasformazioni infinitesime Ξ per le quali è zero il covariante $C^{(s)}$, *ed è o no zero l'invariante $\varDelta$ secondochè $\varepsilon = 1$ ovvero $\varepsilon = 0$, e che lasciano invariata l'equazione* $X^{(r)} = 0$ *a meno dell'espressione*

$$(1-\varepsilon)\, d^r \varDelta + \sum_{\rho=s+1}^{r-1} (-1)^\rho \binom{r}{\rho} d^{r-\rho} C^{(\rho)}.$$

Se quella matrice ha caratteristica σ, di tali trasformazioni ve n'è ∞^σ.

Se poi in luogo delle precedenti matrici si considerano quelle rappresentate colle M' *si ha l'analogo teorema, ma relativo alla forma* $X^{(r)}$, *anzichè all'equazione* $X^{(r)} = 0$.

Per $s = r-1$ ed $\varepsilon = 1$ si ha il teorema ottenuto direttamente nel paragrafo 3.

All'esistenza di siffatte trasformazioni infinitesime corrisponde poi, come abbiamo già detto e come dimostreremo nella prossima Nota, l'esistenza di trasformazioni finite che diminuiscono il numero delle variabili nella forma data, a meno di differenziali esatti.

6. *Forme differenziali di 1° ordine e r^{mo} grado.* — Come già altre volte, stabiliamo ora brevemente anche i teoremi relativi alle forme di 1° ordine e r^{mo} grado (vedi Nota II, § 5 e Nota III, § 5).

In tal caso è $\mathit{\Lambda} = 0$, $L^{(r)}$ è dato dalla formola (23) della Nota III, e delle C è diversa da zero solo la $C^{(r-1)}$ che è

$$C^{(r-1)} = (-1)^{r-1} \sum_i \sum_j \xi_i \, X_{j_1 \cdots j_{r-1} \, i} \, \delta^{(r-1)}_{j_1 \cdots j_{r-1}} . \tag{21}$$

La formola (10) della Nota precedente si riduce a:

$$\Xi X^{(r)} = r \, d \, C^{(r-1)} + L^{(r)} . \tag{22}$$

Delle matrici (M) e $\}M\{$ non esistono in questo caso che la $\}M\{_{r-1}$ e la $(M)_r$ che sono rispettivamente:

$$\}M\{_{r-1} \equiv \| \, 0 \;,\; X_{j_1 \cdots j_{r-1} 1} \, \ldots\ldots \, X_{j_1 \cdots j_{r-1} n} \, \|$$

$$(M)_r \equiv \left\| \, X_{j_1 \cdots j_r} \;,\; \begin{bmatrix} j_1 \ldots j_r \\ 1 \end{bmatrix} \ldots\ldots \begin{bmatrix} j_1 \ldots j_r \\ n \end{bmatrix} \right\| .$$

Se si pone $L^{(r)} = \mu X^{(r)}$, si riconosce subito che, a differenza che nel caso generale, in questo caso si ha l'annullarsi identico di $C^{(r-1)}$, perchè devono allora essere zero i termini di $L^{(r)}$ contenenti i $\delta^{(r)}_{j_1 \cdots j_{r-1}}$ non essendo tali termini contenuti in $\mu X^{(r)}$; cioè: *non esistono trasformazioni infinitesime che lasciano invariata la* $X^{(r)} = 0$, *a meno del differenziale del covariante* $C^{(r-1)}$, *ma esistono solo quelle per le quali è contemporaneamente nullo anche* $C^{(r-1)}$. *Per l'esistenza di tali trasformazioni infinitesime è poi necessario e sufficiente l'annullarsi della matrice* $\}M\{_{r-1} + (M)_r$.

Fisica. — *Sul detector magneto-elastico.* Nota di A. Sella, presentata dal Socio P. Blaserna.

1. G. B. Gerosa ha pubblicato nell'anno 1891 una serie di ricerche molto interessanti da lui eseguite con alcuni suoi collaboratori [1], intorno all'influenza di certe azioni elettromagnetiche sopra l'isteresi dei metalli magnetici. Ricorderò qui solo i risultati che si riferiscono alla presente ricerca e che malgrado la loro importanza sono forse sfuggiti all'attenzione generale (nello stesso trattato dell'Ewing, Magnetic Induction in Iron, 1900, le ricerche del Gerosa sono riferite molto incompletamente).

Un fascio di fili di ferro, p. e., è sottoposto ad un campo magnetico esterno, che si fa variare fra dati limiti; un magnetometro permette di costruire il diagramma di magnetizzazione del fascio. Il campo esterno è generato da una corrente che circola in una bobina concentrica al fascio e

[1] Rendiconti dell'Istituto Lombardo, serie II, vol. 24, 1891.