ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCC.

1903

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1903

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia sino al 4 ottobre 1903.

Matematica. — *La estensione dei problemi di riduzione di Pfaff-Grassmann e Jacobi.* Nota VI del Corrispondente ERNESTO PASCAL.

Le considerazioni svolte nelle precedenti cinque Note [1] ci pongono in grado di proporci e risolvere i problemi di riduzione che sono da considerarsi estensione, per le forme differenziali di ordine r, di quei problemi che per le forme di primo ordine vanno sotto il nome di Pfaff-Grassmann e Jacobi.

Il primo di questi è:

I. *Trovare le condizioni perchè esistano trasformazioni di variabili per cui la forma* $X^{(r)}$ *si riduca a* $\mu T^{(r)}$ *dove* μ *sia un fattore finito con tutte le variabili e* $T^{(r)}$ *sia una forma differenziale contenente una variabile di meno; e indi trovare tutte le trasformazioni di tale natura.*

Per enunciare il secondo premettiamo le seguenti considerazioni: Sieno $Z^{(1)}, Z^{(2)}, \ldots$ le forme di una *successione canonica* (v. Nota IV) e costruiamo la forma differenziale:

$$(1)\qquad -\tfrac{1}{r}\sum_{\rho=1}^{r-1}(-1)^{\rho}\binom{r}{\rho}d^{r-\rho}Z^{(\rho)}$$

i cui termini sono tutti differenziali di varî ordini; una siffatta espressione noi l'abbiamo varie volte incontrata nelle precedenti ricerche nelle quali ha

[1] Tutte contenute nel volume del 1903 (1° e 2° sem.) di questi Rendiconti.

compiuto un ufficio importante. Essa evidentemente è un differenziale esatto almeno di primo ordine di una espressione di ordine inferiore ad r, perchè può scriversi

$$-\tfrac{1}{2}\, d\left[\sum_{\rho=1}^{r-1}(-1)^{\rho}\binom{r}{\rho}\, d^{r-1-\rho}\, Z^{(\rho)}\right],$$

dove però è da notare che la espressione sotto il segno d non è in generale una *forma* del tipo solito considerato in tutte queste ricerche, cioè del tipo delle $X^{(r)}$, mentre abbiamo dimostrato nella Nota IV che tutta la (1) è invece di tal tipo.

Se $Z^{(r-1)}$ è il differenziale $(r-1)^{mo}$ di una funzione f e quindi tutte le precedenti $Z^{(1)}, Z^{(2)}, \ldots$ sono i differenziali $1^{o}, 2^{o} \ldots$ di f, *la* (1) *diventa il differenziale* r^{mo} *di* f *se* r *è pari, e diventa invece zero se* r *è dispari.*

Se r è *pari* diremo, per brevità, che (1) è un *differenziale canonico.*

Se poi r è *dispari* assumeremo come *differenziale canonico* la espressione:

$$(2)\qquad \tfrac{1}{2}\sum_{\rho=1}^{r-1}(-1)^{\rho}\binom{r}{\rho}\, d^{r-\rho}\, Z^{(\rho)} - \tfrac{1}{2}\, d\,.\sum_{\rho=1}^{r-2}(-1)^{\rho}\binom{r-1}{\rho}\, d^{r-1-\rho}\, Z^{(\rho)}$$

ammesso che le Z *soddisfacciano a tali relazioni che la* (2) *sia una forma differenziale del solito tipo fondamentale,* il che, se è sempre verificato per il primo termine e per la quantità sottoposta al d nel secondo termine, non sarà tuttavia verificato *in generale* per tutta la (2). Troveremo più tardi le condizioni a ciò. È da osservare che *la* (2) *diventa anch'essa il differenziale* r^{mo} *esatto di* f *quando le* $Z^{(\rho)}$ *diventano i differenziali dei diversi ordini della medesima* f.

Di questi *differenziali canonici* dimostreremo in seguito alcune proprietà comuni, a proposito specialmente delle matrici a caratteristica invariante ad essi relative, e dei loro covarianti evidenti.

Ciò premesso enunceremo il secondo problema nel seguente modo:

II. *Trovare le condizioni perchè esistano trasformazioni di variabili per cui la forma* $X^{(r)}$ *si riduca a* $T^{(r)} + Z^{(r)}$ *dove* $T^{(r)}$ *contenga una variabile di meno, e* $Z^{(r)}$ *sia un differenziale* c a n o n i c o *contenente tutte le variabili; indi trovare tutte le trasformazioni di tale natura.*

Se la $Z^{(r)}$ diventa un differenziale r^{mo}, si ha come caso particolare il problema *di ridurre* $X^{(r)}$ *a* $T^{(r)} + d^{r}f$, *in cui* $T^{(r)}$ *contenga una variabile di meno.*

La risoluzione di questi problemi (che per $r=2$ già trattammo in una Nota pubblicata in questi medesimi Rendiconti [1]) può farsi con due me-

[1] 1903, 1° sem., pp. 31-41.

todi, di cui uno è fondato sulla teoria delle trasformazioni infinitesime e sui risultati ottenuti nelle Note IV e V, mentre l'altro è più diretto, ed è fondato sulle formole di trasformazione dei simboli a carattere invariantivo da noi trovate nella Nota II.

Del secondo metodo tratteremo in una delle Note seguenti.

1. *Soluzione del problema I col metodo delle trasformazioni infinitesime.* — Sia Ξ una trasformazione infinitesima di quelle considerate nel § 3 della Nota V, cioè di quelle che lasciano invariata la $X^{(r)}=0$, e per cui sieno zero $\mathit{\Delta}$ e $C^{(r-1)}$. Formando la equazione a derivate parziali lineare omogenea di primo ordine

$$\Xi f=0,$$

sieno

$$y_1=\varphi_1(x), \ldots\ldots \; y_{n-1}=\varphi_{n-1}(x) \tag{3}$$

i suoi $n-1$ integrali indipendenti, e alle (3) aggreghiamo una nuova arbitraria funzione delle x

$$y_n=\varphi_n(x), \tag{3'}$$

colla sola condizione che le (3) (3') sieno indipendenti.

Dico che *la trasformazione rappresentata dalle formole* (3) (3') *risolve il problema, e ogni trasformazione che risolve il problema deve essere di questo tipo.*

Per modo che si ha anche:

Il problema I è solubile o no secondochè esistono o no trasformazioni infinitesime per le quali il covariante $L^{(r)}$ *sia eguale ad* $X^{(r)}$ *stessa moltiplicata per un fattore finito, e per le quali sieno zero l'invariante* $\mathit{\Delta}$ *e il covariante* $C^{(r-1)}$. *Perciò la condizione per l'esistenza di tale* Ξ *(condizione già trovata nella Nota V) è la condizione per la risolubilità del problema I, e tutte le trasformazioni che risolvono il problema si trovano col metodo suindicato.*

La dimostrazione di questo elegante teorema è delle più semplici.

Trasformando la Ξ nelle variabili y, essa si riduce a

$$Y=\eta_n\frac{\partial}{\partial y_n} \tag{4}$$

e se devono essere zero l'invariante $\mathit{\Delta}$ e il covariante $C^{(r-1)}$ trasformati, si hanno le equazioni:

$$\left\{\begin{array}{l} Y_n=0 \\ ((n\,,j_1))_Y=0 \\ ((n\,,j_1 j_2))_Y=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ ((n\,,j_1\ldots j_{r-1}))_Y=0 \end{array}\right. \tag{5}$$

se con Y si rappresentano i coefficienti della forma trasformata di $X^{(r)}$ che si indichi con $Y^{(r)}$.

Dalle (5) si deducono le

$$Y_n = 0 \ , \ Y_{nj_1} = 0 \ , \ Y_{nj_1j_2} = 0 \ldots\ldots \ldots\ldots Y_{nj_1\cdots j_{r-1}} = 0 \tag{6}$$

cioè la $Y^{(r)}$ non contiene mai la variabile y_n sotto forma differenziale. Dico che inoltre negli altri coefficienti si può sempre separare un fattore *comune* contenente y_n, mentre l'altro fattore ne resta indipendente. Giacchè dovendo il risultato della (4) sulla $Y^{(r)}$ essere eguale ad un fattore finito σ moltiplicato per $Y^{(r)}$ stessa (proprietà che naturalmente deve conservarsi colla trasformazione), deve aversi

$$\eta_n \frac{\partial Y_{j_1\cdots j_m}}{\partial y_n} = \sigma Y_{j_1\cdots j_m} \tag{7}$$

perchè, per effetto delle (6), la variabile y_n non figura in $Y^{(r)}$ che solo nei coefficienti; ora da (7) si ha

$$Y_{i_1\cdots i_\rho} \frac{\partial Y_{j_1\cdots j_m}}{\partial y_n} - Y_{j_1\cdots j_m} \frac{\partial Y_{i_1\cdots i_\rho}}{\partial y_n} = 0$$

cioè

$$\frac{\partial}{\partial y_n} \frac{Y_{i_1\cdots i_m}}{Y_{j_1\cdots j_\rho}} = 0 \tag{8}$$

il che prova che il rapporto di due coefficienti qualunque di $Y^{(r)}$ è indipendente da y_n. Dunque si ha:

$$Y^{(r)} = \mu T^{(r)} \tag{9}$$

in cui $T^{(r)}$ non contiene y_n.

D'altra parte supponiamo che esista una trasformazione delle x nelle y per cui la $Y^{(r)}$ acquisti la forma (9). Se noi formiamo la trasformazione infinitesima (4), si vede che sussistendo le (6) sussisteranno le (5), e quindi per essa la $C^{(r-1)}$ e $\varDelta$ sono zero. Inoltre sussistendo (8) sussiste (7) e quindi la detta trasformazione infinitesima lascia invariata l'equazione $Y^{(r)} = 0$. Essendo invariantive tutte queste proprietà, ne risulta che la trasformata nelle x della (4) avrà, in rapporto a $X^{(r)}$, le medesime proprietà, e quindi resta dimostrato che ogni trasformazione che risolve il problema corrisponde ad una Ξ avente le proprietà indicate.

Operando (4) sul secondo membro di (9) si ha

$$\eta_n \frac{\partial \mu}{\partial y_n} \cdot T^{(r)} ,$$

e questo risultato, per la (7), deve essere eguale a $\sigma Y^{(r)}$ cioè $\sigma \mu T^{(r)}$, onde

$$\eta_n \frac{\partial \log \mu}{\partial y_n} = \sigma \qquad \mu = e^{\int \frac{\sigma}{\eta_n} dy_n} .$$

Per $\sigma = 0$ si ha $\mu = 1$; cioè:

La condizione necessaria e sufficiente perchè si possa trasformare $X^{(r)}$, *senza fattore, in una forma con una variabile di meno, è che esista una trasformazione infinitesima, per cui sia* $\Delta = C^{(r-1)} = 0$, *e che applicata a* $X^{(r)}$ *dia per risultato zero. La condizione a ciò è poi che la matrice*:

$$M' + \sum_{\rho=1}^{r-1} \left[(M')_\rho + \{M'\}_\rho \right] + (M')_r$$

sia zero.

Possiamo facilmente completare il teorema principale. Ricordiamo intanto che: *La condizione per l'esistenza della* Ξ *è che la matrice indicata con* E *nella Nota precedente, cioè*

$$E \equiv M + \sum_{\rho=1}^{r-1} \left[(M)_\rho + \{M\}_\rho \right] + (M)_r$$

abbia caratteristica $\nu < n + 1$.

Se ora è anche $\nu < n$, possiamo riapplicare il medesimo teorema sulla forma $T^{(r)}$ che ha solo $n - 1$ variabili. Giacchè si può far facilmente vedere nello stesso modo con cui abbiamo proceduto nel caso del secondo ordine ([1]), che la caratteristica della E relativa alla $Y^{(r)}$ è la stessa di quella della E relativa alla $T^{(r)}$ che differisce per un fattore dalla $Y^{(r)}$, e questa è quindi la stessa di quella della E costruita per la $X^{(r)}$, perchè la E è a caratteristica invariante. Ora la E costruita per la $T^{(r)}$ ha solo n colonne perchè manca di quella colonna che corrisponde all'indice n, come manca di quelle linee che dipendono dal medesimo indice. Di qui ne viene che è zero anche la E relativa a $T^{(r)}$, e che quindi si può similmente trasformare $T^{(r)}$ in $\mu' U^{(r)}$ dove $U^{(r)}$ contenga solo $n - 2$ variabili. Così seguitando si vede che:

Se è ν *la caratteristica di* E *relativa ad* $X^{(r)}$, *si può sempre trasformare la equazione* $X^{(r)} = 0$ *in una contenente al più* $\nu - 1$ *variabili.*

2. *Alcuni lemmi per la soluzione del problema II.* — Per ragioni di chiarezza sarà bene premettere alcuni lemmi che ci serviranno per la trattazione del problema II, di cui tratteremo nelle Note seguenti.

In primo luogo, supponiamo che le variabili siano indicate con $y_1 \dots y_n$ e che si ponga:

$$Y_{j_1 \dots j_\rho} = T_{j_1 \dots j_\rho} + Z_{j_1 \dots j_\rho} \tag{10}$$

dove le T *non* contengano la variabile y_n e quelle fra esse per cui uno degli indici è n siano zero.

([1]) Vedi la mia Nota: *Estensione di alcuni teoremi di Frobenius.* Rend. Ist. Lomb. (2), t. 35, 1902, pp. 875-882.

Supponiamo inoltre che le Y soddisfacciano le

$$
(11)\qquad \left\{\begin{array}{l}
(j_1 \dots j_r\, n)_Y = 0 \\
\}j_1 \dots j_{r-1}\, n\{_Y = 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots \\
(j_1\, n)_Y = 0
\end{array}\right.
$$

se r è pari, ovvero

$$
(11')\qquad \left\{\begin{array}{l}
(j_1 \dots j_r\, n)_Y = 0 \\
\}j_1 \dots j_{r-1}\, n)_Y = 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots \\
(j_1\, n)_Y = 0
\end{array}\right.
$$

se r è dispari.

Ciò posto passiamo a trovare una formola cui soddisfa ogni simbolo principale.

Sia questo per es.

$$
(12)\qquad ((j_1 \dots j_s\, ,\, i)) + ((i\, ,\, j_1 \dots j_s))
$$

che è $(j_1 \dots j_s i)$ se s è pari, e $\}j_1 \dots j_s i\{$ se s è dispari.

Sviluppando ciascuno dei due termini di (12) colle formole del § 1 della Nota II, e sommando, possiamo scrivere:

$$
(13)\qquad \left.\begin{array}{l}(j_1 \dots j_s i) \\ \}j_1 \dots j_s i\{\end{array}\right\} = \frac{\partial^{s-1}}{\partial y_{j_1} \dots \partial y_{j_{s-1}}} \}i\, j_s\{ - \mathrm{S}_{j_1} \frac{\partial^{s-2}}{\partial y_{j_2} \dots \partial y_{j_{s-1}}} (i\, j_1 j_s) +
$$

$$
+ \mathrm{S}_{j_1 j_2} \frac{\partial^{s-3}}{\partial y_{j_3} \dots \partial y_{j_{s-1}}} \}i\, j_1 j_2 j_s\{ - \dots \dots + \left\{\begin{array}{ll} -(i\, j_1 \dots j_s) & \text{per } s \text{ pari} \\ +\}i\, j_1 \dots j_s) & \text{per } s \text{ dispari}. \end{array}\right.
$$

Se invece di (12) consideriamo

$$
(12')\qquad ((j_1 \dots j_s\, ,\, i)) - ((i\, ,\, j_1 \dots j_s))
$$

si ha:

$$
(13')\qquad \left.\begin{array}{l}(j_1 \dots j_s i) \\ \}j_1 \dots j_s i\{\end{array}\right\} = -\frac{\partial^{s-1}}{\partial y_{j_1} \dots \partial y_{j_{s-1}}} (i\, j_s) + \mathrm{S}j_1 \frac{\partial^{s-2}}{\partial y_{j_2} \dots \partial y_{j_{s-1}}} \}i\, j_1 j_s\{ -
$$

$$
- \mathrm{S}_{j_1 j_2} \frac{\partial^{s-3}}{\partial y_{j_3} \dots \partial y_{j_{s-1}}} (i\, j_1 j_2 j_s) - \dots \dots + \left\{\begin{array}{ll} -(i\, j_1 \dots j_s) & \text{per } s \text{ dispari} \\ +\}i\, j_1 \dots j_s\{ & \text{per } s \text{ pari} \end{array}\right.
$$

dove le S hanno lo stesso significato che nella succitata Nota II.

Da queste formole apparisce intanto immediatamente, facendo $i_s = n$, che: *dalla sussistenza di tutte le relazioni* (11) o (11′) *risulta quella delle altre dello stesso tipo, ma in cui l'indice n invece di occupare l'ultimo posto, occupa un altro posto qualunque; cioè le Y soddisfanno anche a tutte le*

$$
(14)\qquad \left\{\begin{array}{l}
(n\, j_1 \dots j_r)_Y = 0 \\
\}n\, j_1 \dots j_{r-1}\{_Y = 0 \\
\\
\}n\, j_1\{_Y = 0
\end{array}\right.
$$

se r è pari; ovvero:

$$(14') \qquad \left\{\begin{array}{l} (n j_1 \dots j_r)_Y = 0 \\ \}n j_1 \dots j_{r-1}\{_Y = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ (n j_1)_Y = 0 \end{array}\right.$$

se r è dispari.

Inoltre immaginando in (13) s pari e in (13′) s dispari e trasportando al primo membro l'ultimo termine della formola (13) o (13′), risulta:

La somma di due simboli principali di prima specie del tipo

$$(15) \qquad (j_1 \dots j_s i) + (i j_1 \dots j_s)$$

(di cui cioè il secondo termine si ottiene dal primo scambiando solo l'ultimo indice con uno dei precedenti) è sempre esprimibile mediante derivate di simboli di prima e seconda specie ma contenenti un numero minore di indici.

Immaginiamo ora nella formola (13) che s sia pari ($= 2\varrho + 2$); inoltre scambiate $j_{2\varrho+2}$ con $j_{2\varrho+1}$, sommate le due formole così ottenute, indi posto $j_{2\varrho+1} \equiv h$, $j_{2\varrho+2} \equiv k$, e infine sostituito alla somma

$$(i h j_1 \dots j_{2\varrho} k) + (i k j_1 \dots j_{2\varrho} h),$$

che è del tipo di quelle considerate nel teorema precedente (perchè il secondo termine si ottiene dal primo scambiando h con k), il suo valore dato dal medesimo teorema precedente. Similmente immaginiamo in (13′) che s sia dispari $= 2\varrho + 3$, posto $j_{2\varrho+2} \equiv h$, $j_{2\varrho+3} \equiv k$, scambiato h con k, sommate le due formole così ottenute, e infine sostituito alla somma

$$(i h j_1 \dots j_{2\varrho+1} k) - (i k j_1 \dots j_{2\varrho+1} h)$$

il suo valore dato dal teorema precedente.

Osservando che, cogli scambi fatti, il primo membro di (13) o (13′) resta inalterato, *si ha una formola colla quale*

$$(h k j_1 \dots j_{2\varrho}\, i) \quad \textit{ovvero} \quad (h k j_1 \dots j_{2\varrho+1}\, i)$$

si esprime mediante derivate di simboli principali ad un numero minore di indici.

Conviene scrivere questa formola per poterne poi fare delle applicazioni; e per ciò indichiamo con D^μ, applicata ad un simbolo principale contenente $2\varrho - \mu + 3$ degli indici $i h k j_1 \dots j_{2\varrho}$, l'operazione del derivare rispetto alle y i cui indici sieno esattamente i μ mancanti nel simbolo. Si ha allora:

$$(16) \quad \begin{aligned} (h k j_1 \dots j_{2\varrho}\, i) = {} & \tfrac{1}{2} D^{2\varrho+1} \}i h\{ + \tfrac{1}{2} D^{2\varrho+1} \}i k\{ - \tfrac{1}{2} D^{2\varrho+1} \}h k\{ - \\ & - \tfrac{1}{2} S_{kj} D^{2\varrho} (i j_1 h) - \tfrac{1}{2} S_{hj} D^{2\varrho} (i j_1 k) + \tfrac{1}{2} S_{ij} D^{2\varrho} (h j_1 k) + \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + \tfrac{1}{2} S_{kj} D \}i j_1 \dots j_{2\varrho} h\{ + \tfrac{1}{2} S_{hj} D \}i j_1 \dots j_{2\varrho} k\{ - \tfrac{1}{2} S_{ij} D \}h j_1 \dots j_{2\varrho} k\{ \end{aligned}$$

dove con S_{kj} si intende l'operazione del sommare tutti i risultati che si ottengono permutando fra loro gli indici $kj_1 \ldots j_{2\rho}$, e propriamente considerando tutte le loro combinazioni a 1 a 1 se si tratti dei termini della 2ª riga, le loro combinazioni a 2 a 2 se si tratti della 3ª riga, e così di seguito; e analogo significato hanno S_{hj}, S_{ij}.

In modo simile da (13′) si ha la formola:

$$
\begin{aligned}
(16') \quad (hkj_1 \ldots j_{2\rho+1} i) = & -\tfrac{1}{2} D^{2\rho+2}(ih) - \tfrac{1}{2} D^{2\rho+2}(ik) + \tfrac{1}{2} D^{2\rho+2}(hk) + \\
& + \tfrac{1}{2} S_{kj} D^{2\rho+1} \}ij_1h\{ + \tfrac{1}{2} S_{hj} D^{2\rho+1} \}ij_1k\{ - \tfrac{1}{2} S_{ij} D^{2\rho+1} \}hj_1k\{ - \\
& - \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\
& + \tfrac{1}{2} S_{kj} D \}ij_1 \ldots j_{2\rho+1} h\{ + \tfrac{1}{2} S_{hj} D \}ij_1 \ldots j_{2\rho+1} k\{ - \tfrac{1}{2} S_{ij} D \}hj_1 \ldots j_{2\rho+1} k\{
\end{aligned}
$$

Da queste formole ne ricaviamo altre.

Facciamo $i \equiv n$, intendiamo calcolata la (16) o (16′) per le Y, e osserviamo che sussistendo tutte le (14), o (14′), tutti i termini delle due prime colonne di (16) o (16′) sono zero, mentre dei termini della terza colonna sono diversi da zero solo quelli nei quali l'indice $i \equiv n$ *non* comparisce come interno al simbolo, e cioè quei termini nei quali comparisce la derivata rispetto ad y_n. Ora *ammettiamo che sussistano le relazioni*

$$(17) \qquad \}hk\{_Z = 0 \quad (hj_1k)_Z = 0 \quad \ldots\ldots \quad (hj \ldots j_{2\rho-1} k)_Z = 0$$

ovvero

$$(17') \qquad \}hk\{_Z = 0 \quad \}hj_1k\{_Z = 0 \quad \ldots\ldots \quad (hj_1 \ldots j_{2\rho} k)_Z = 0$$

per qualunque sistema di indici $hkj_1j_2 \ldots\ldots$

Osservando che differendo le Z dalle Y (formola (10)) solamente per termini indipendenti da y_n, la derivata rispetto ad y_n di un simbolo formato colle Y è eguale a quella del medesimo simbolo ma formato colle Z, e che perciò i termini restanti dell'ultima colonna di (16) o di (16′) si possono intendere calcolati per le Z, si ha che, ammesse le (17) o (17′), il secondo membro della formola (16) o (16′) si riduce ad un termine solo, e cioè all'ultimo

$$-\tfrac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y_n} \}hj_1 \ldots j_{2\rho} k\{_Y \quad \text{ovvero} \quad -\tfrac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y_n} \}hj_1 \ldots j_{2\rho+1} k\{_Y .$$

Onde possiamo conchiudere:

Supposto che le Z verifichino le (17) *o* (17′) *e le Y le* (11) *o* (11′), *si otterrà in generale per qualunque s pari o dispari* ($= 2\rho$ ovvero $= 2\rho + 1$):

$$(18) \qquad (hkj_1 \ldots j_s n)_Y = -\tfrac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y_n} \}hj_1 \ldots j_s k\{_Y$$

dove al secondo membro può naturalmente porsi per indice Y o Z a piacere, e ciò per effetto della derivazione rispetto a y_n.

Se poi si ammette che è anche, oltre (17) o (17′),

$$(19) \qquad \}hj_1 \dots j_s k\{_z = 0 \qquad (s = 2\varrho \ \text{ovvero} \ = 2\varrho + 1)$$

ne risulta l'annullarsi di ogni simbolo principale di prima specie a $s + 3$ *indici, calcolato per le* Z; giacchè basta applicare di nuovo la (16) o (16′), intendendovi i termini calcolati per le Z, e allora, osservando che al secondo membro vi sono sempre simboli a meno indici che nel primo, resta provato l'assunto.

Da (17) o (17′) e da (19) risulta così l'annullarsi del termine immediatamente seguente nella successione costruita colla medesima legge.

Dimostriamo infine che *se le* Z *soddisfanno a*

$$(20) \qquad \}j_1 j_2\{_z = 0 \ , \ (j_1 j_2 j_3)_z = 0 \ , \ \dots . \ (j_1 \dots j_{r+1})_z = 0$$

se r è pari, ovvero

$$(20') \qquad (j_1 j_2)_z = 0 \ , \ \}j_1 j_2 j_3\{_z = 0 \ , \ \dots . \ (j_1 \dots j_{r+1})_z = 0$$

se r è dispari, soddisferanno anche più generalmente a

$$(21) \qquad ((i_1 \dots i_\nu \,, j_1 \dots j_\mu)) + ((j_1 \dots j_\mu \,, i_1 \dots i_\nu)) = 0$$

ovvero rispettivamente a

$$(21') \qquad ((i_1 \dots i_\nu \,, j_1 \dots j_\mu)) - ((j_1 \dots j_\mu \,, i_1 \dots i_\nu)) = 0 \,.$$

Infatti applicando le solite identità dimostrate nella Nota II, il primo membro di (21) o (21′) può scriversi:

$$\frac{\partial^{\mu-1}}{\partial y_{j_1} \dots \partial y_{j_{\mu-1}}} \Big[((i_1 \dots i_\nu \,, j_\mu))_z \pm ((j_\mu \,, i_1 \dots i_\nu))_z \Big] -$$
$$- \mathrm{S}_{j^1} \frac{\partial^{\mu-2}}{\partial y_{j_1} \dots \partial y_{j_{\mu-1}}} \Big[((i_1 \dots i_\nu j_1 \,, j_\mu))_z \pm ((j_\mu \,, i_1 \dots i_\nu j_1)) \Big] +$$
$$+ \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ .$$

e ciascuna delle somme o differenza del secondo membro è del tipo (20) o rispettivamente (20′), e quindi è zero.