ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCC.

1903

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1903

Matematica. — *Sulla deficienza della serie caratteristica di un sistema lineare di curve appartenente ad una superficie algebrica*. Nota di F. Severi, presentata dal Socio C. Segre.

Nella Memoria: *Alcune proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve tracciati sopra una superficie algebrica* (1) il prof. Castelnuovo dimostrò che sopra una superficie di generi P_g, P_a, la deficienza della serie caratteristica di un sistema lineare completo non supera $P_g - P_a$, e come conseguenza immediata di questa proporzione stabilì in modo esauriente il teorema di Riemann-Roch per le superficie.

Lo scopo di questa mia Nota è di dare una nuova dimostrazione molto semplice del teorema di Castelnuovo e conseguentemente del teorema di Riemann-Roch.

Dirò subito che tra le proposizioni di geometria sopra una superficie, sulle quali si fonda la mia dimostrazione, quelle che hanno carattere più elevato, si riferiscono alla *proprietà fondamentale dell'aggiunzione* e alla dimensione del sistema lineare segato sopra una superficie F dello spazio ordinario dalle aggiunte di un ordine abbastanza alto; la qual dimensione, com' è noto, può calcolarsi direttamente con le formole di postulazione nel caso delle singolarità ordinarie, oppure, prescindendo dalla natura delle singolarità di F, nel modo indicato dal prof. Enriques al n. 40 della sua *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche* (2).

Esporrò qui le linee generali della dimostrazione sviluppata in questa Nota.

Assunto come modello proiettivo dell'ente ∞^2 una superficie d'ordine n, priva di punti multipli in uno spazio S_r, dopo averla proiettata genericamente sullo spazio ordinario in una superficie F, con linea doppia e punti tripli, della quale sia $|C|$ il sistema delle sezioni piane, deduco anzitutto dalla dimensione effettiva del sistema di curve segato su F dalle superficie aggiunte di un ordine k abbastanza alto, un limite inferiore per la dimensione del sistema completo $|kC|$. Dimostro poi che sopra la curva D, sezione di F con una superficie K d'ordine k, le superficie di un ordine *qualunque* passanti pei punti doppî della D segano, fuori di questi, una serie lineare completa.

Da ciò si rileva immediatamente che se k è abbastanza grande, le superficie d'ordine $n-4$ aggiunte ad F (supposte esistenti), segano sopra

(1) Annali di Matematica (2), t. 25 (1897).
(2) Memorie dei XL (3), t. 10 (1896).

una curva kC una serie completa: basta infatti scegliere $k > n - 4$, perchè accada che ogni superficie d'ordine $n - 4$ passante pei punti doppî di D, contenga in conseguenza la linea doppia, e quindi sia aggiunta ad F. Così trovasi che la dimensione della serie completa residua della serie caratteristica g_{n_k} rispetto alla serie canonica di kC, è uguale a $P_g - 1$.

D'altronde questa dimensione si può anche calcolare in funzione dei caratteri della serie g_{n_k} profittando del teorema di Riemann-Roch, relativo alle serie lineari sopra una curva. Confrontando l'uguaglianza che in tal modo si ottiene, con la disuguaglianza a cui soddisfa la dimensione di $|kC|$, si trova che la deficienza di g_{n_k} non supera $P_g - P_a$.

Stabilito ciò, si scelga k così grande che $|kC|$ seghi su C una serie completa e che al sistema residuo, $|(k-1)C|$, si possano applicare tutte le considerazioni precedenti. Allora con un semplice ragionamento che trovasi al n. 30 della citata Memoria di Castelnuovo (1), si dimostra che la deficienza δ della serie caratteristica di C, non supera quella della serie caratteristica di $(k-1)C$, e quindi che $\delta \leq P_g - P_a$.

Una volta dimostrata questa proprietà pel sistema $|C|$, facilmente si estende ad ogni altro sistema.

In questo riassunto, per semplificare, mi son limitato al caso $P_g > 0$. Nel caso $P_g = 0$ la dimostrazione non è sostanzialmente differente.

1. Data una superficie d'ordine n, priva di punti multipli, indichiamo con F una sua proiezione generica sullo spazio ordinario, la quale sarà dotata soltanto di una linea doppia e di punti tripli, che lo sono anche per questa linea.

Diciamo $|C|$ il sistema delle sezioni piane di F, che sieno di genere π, ed r'_k la dimensione del sistema completo $|(kC)'|$ aggiunto al sistema $|kC|$, di grado n_k, genere π_k, multiplo secondo k del sistema $|C|$.

Poichè, allorquando k è abbastanza grande, $|(kC)'|$ sega su kC una serie canonica avente la deficienza $P_g - P_a$ (2), sarà:

$$r'_k - (\pi_k - 1 - P_g + P_a) - 1$$

la dimensione del sistema residuo $|(kC)' - kC|$. Ma questa dimensione è uguale a $P_g - 1$, perchè il sistema residuo suddetto differisce al più dal sistema canonico per componenti fisse, dunque avremo:

$$r'_k = \pi_k - 1 + P_a.$$

(1) Questo ragionamento, come avverte il prof. Castelnuovo, gli fu suggerito da un paragrafo (IV, 1) delle *Ricerche di geometria...*, del prof. Enriques (Memorie di Torino, 1893).

(2) Enriques, *Introduzione*, n. 40.

Ciò posto dimostriamo che, quando k è abbastanza grande, il sistema completo $|kC|$ ha la dimensione:

$$r_k \geq n_k - \pi_k + P_a + 1 .$$

Si consideri perciò il sistema $|C'|$ aggiunto a $|C|$ (o il sistema aggiunto ad un multiplo di $|C|$, quando non esistesse $|C'|$) e si scelga k così grande che la dimensione del sistema $|C' + kC|$, aggiunto a $|(k+1)C|$, sia espressa dalla formola:

$$r'_{k+1} = \pi_{k+1} - 1 + P_a ,$$

e che inoltre esso seghi sopra una C' una serie non speciale. Indicando con n', π il grado e il genere di $|C'|$, avremo che una C' imporrà al più $k(2\pi - 2) + n' - \pi' + 1$ condizioni alle $C' + kC$ obbligate a contenerla, e quindi il sistema residuo $|C' + kC - C'| = |kC|$, avrà almeno la dimensione:

$$(1) \quad r'_{k+1} - k(2\pi - 2) - n' + \pi' - 1 = \pi_{k+1} - k(2\pi - 2) - n' + \pi' + P_a - 2.$$

Ora si osservi che:

$$\pi_{k+1} = \pi_k + \pi + nk - 1 , \qquad \pi_k = n\tbinom{k}{2} + k(\pi - 1) + 1 ,$$

e che:

$$n' - \pi' = \pi - 2 ,$$

come si rileva calcolando il numero delle intersezioni di una curva del sistema $|C + C'|$ con una curva del sistema aggiunto $|2C'|$ (¹). Sostituendo nella espressione (1) avremo appunto:

$$(2) \quad r_k \geq n_k - \pi_k + P_a + 1 .$$

2. Passiamo ora a dimostrare che *sulla curva* D, *sezione di* F *con una superficie generica* K, *d'ordine k, le superficie di un dato ordine passanti pei punti doppi della* D (che cadono nelle intersezioni di K con la linea doppia di F) *segano, fuori di quei punti doppi, una serie lineare completa.*

Per brevità nel seguito le superficie passanti pei punti doppî di D, si diranno *aggiunte* a questa curva, e quelle d'ordine l, s'indicheranno con Φ^l.

Il teorema che si tratta di stabilire è vero per le Φ di un ordine abbastanza alto (²); e quindi sarà dimostrata la sua validità in ogni caso, allorquando dal fatto che le Φ di un certo ordine l segano su D una serie completa, avremo dedotto che anche le Φ^{l-1} segano una serie completa.

(¹) Enriques, *Introduzione*, n. 41.

(²) Cfr. Castelnuovo, *Sui multipli di una serie lineare*... (Rendiconti di Palermo, t. VII).

Le superficie Φ^l sieno ∞^x e ve ne sieno ∞^y passanti per D, per modo che la dimensione della serie completa $g^\rho{}_\nu$, segata da esse sulla D, sia espressa da

$$\rho = x - y - 1.$$

Se con $kn - z_l$ ($z_l \geq 0$) s'indica il numero delle condizioni imposte alle Φ^l (o ciò che è lo stesso ai gruppi di $g^\rho{}_\nu$) dalla sezione G di D con un piano α, avremo che la dimensione della serie completa residua di G rispetto a $g^\rho{}_\nu$, sarà data da:

$$\rho - kn + z_l.$$

Sia $\binom{l+2}{2} - 1 - \theta_l$ ($\theta_l \geq 0$) la dimensione del sistema lineare segato sul piano α dalle Φ^l, e sia $kn - \zeta_l$ ($\zeta_l \geq 0$) il numero delle condizioni che presentano i punti del gruppo G alle curve d'ordine l, del piano α, obbligate a contenerli.

Le superficie Φ^l spezzate in superficie Φ^{l-1} e nel piano α, saranno $\infty^{x-\binom{l+2}{2}+\theta_l}$, e le superficie Φ^{l-1} passanti per D costituiranno un sistema $y - \binom{l+2}{2} + kn - \zeta_l$ volte esteso, perchè le Φ^l contenenti D segano su α il sistema Σ di *tutte* le curve d'ordine l passanti pel gruppo G (1), ossia un sistema di dimensione $\binom{l+2}{2} - 1 - kn + \zeta_l$.

Sicchè la dimensione della serie segata su D dalle Φ^{l-1} sarà:

$$\left\{x - \binom{l+2}{2} + \theta_l\right\} - \left\{y - \binom{l+2}{2} + kn - \zeta_l\right\} - 1 = \rho - kn + \theta_l + \zeta_l.$$

(1) Ved. l'osservazione al n. 14 della mia Nota: *Su alcune questioni di postulazione* (Rendiconti di Palermo, t. XVII, 1903). Per comodità del lettore riporterò qui l'osservazione di cui si tratta. Assunto il piano α come piano $x_0 = 0$ di un sistema di coordinate proiettive, sieno $F(x_0\, x_1\, x_2\, x_3) = 0$, $K(x_0\, x_1\, x_2\, x_3) = 0$ le equazioni di F, K, e $\varphi(x_1\, x_2\, x_3) = 0$ l'equazione di una curva d'ordine l passante per G. Indichiamo con $Q(x_0\, x_1\, x_2\, x_3) = 0$ l'equazione di una superficie d'ordine l, non contenente il piano α, e passante per φ, cosicchè sarà $Q(0\, x_1\, x_2\, x_3) \equiv \varphi(x_1\, x_2\, x_3)$. Allora pel Fundamentalsatz di Nöther avremo:

$$Q(0\, x_1\, x_2\, x_3) \equiv A(x_1\, x_2\, x_3)\, F(0\, x_1\, x_2\, x_3) + B(x_1\, x_2\, x_3)\, K(0\, x_1\, x_2\, x_3),$$

donde si trae:

$$Q(x_0\, x_1\, x_2\, x_3) \equiv A(x_1\, x_2\, x_3)\, F(x_0\, x_1\, x_2\, x_3) + B(x_1\, x_2\, x_3)\, K(x_0\, x_1\, x_2\, x_3) + x_0 H,$$

ove H è una forma di ordine $l - 1$. La superficie $Q - x_0 H = 0$ passa per D, per φ, e non contiene α. Dunque è vero che una qualunque φ^l per G è segnata su α da una Φ^l per D.

Proviamo ora che:

$$\theta_l + \zeta_l = z_l ,$$

e quindi che le Φ^{l-1} segano su D, fuori dei punti doppî, la serie *completa* $g^\rho{}_\nu - G$.

Poichè di Φ^l per G ve ne sono ∞^{x-kn+z_l} e di Φ^l contenenti α ve ne sono $\infty^{x-\binom{l+2}{2}+\theta_l}$, le Φ^l per G segheranno su α un sistema Σ' di dimensione

$$\left\{x - kn + z_l\right\} - \left\{x - \binom{l+2}{2} + \theta_l\right\} - 1 = \binom{l+2}{2} - 1 - kn + z_l - \theta_l .$$

Ora questo sistema deve contenere quello segato sul piano α dalle Φ^l passanti per D; ma siccome queste Φ^l, come abbiamo osservato, tagliano su α il sistema di tutte le curve d'ordine l per G, Σ' coinciderà con Σ e quindi sarà $z_l - \theta_l = \zeta_l$.

Osservazione. Si noti che dal ragionamento precedente segue pure che se esiste la serie $g^\rho{}_\nu - G$, esistono certo superficie Φ^{l-1} non contenenti D (quelle che segnano la serie stessa).

3. Dalle proposizioni stabilite al n. 2, si traggono le due seguenti:

a) Quando $P_g > 0$ *e* k *è abbastanza grande, le superficie di ordine* $n - 4$ *aggiunte ad* F *segano sopra una curva* kC *una serie completa.*

b) Quando $P_g = 0$ *e* k *è abbastanza grande, la serie caratteristica del sistema* $|k\mathrm{C}|$ *è non speciale.*

Per dimostrare la *a*) si osservi che le superficie di ordine $n - 4$ aggiunte alla sezione D di F con una superficie d'ordine $k > n - 4$ (le quali segano su D una serie completa), passano in conseguenza per la linea doppia di F, ossia sono aggiunte ad F.

Per dimostrare la *b*) si rammenti che le superficie d'ordine $n - 4$ aggiunte a D, supposte esistenti, segano sulla curva stessa, fuori dei punti doppî, gruppi della serie $g_{2\pi_k - 2 - n_k}$ residua della serie caratteristica g_{n_k} rispetto alla serie canonica di D (1), e che viceversa, in forza dell'*Osservazione* con la quale si chiude il n. precedente, allorquando esiste la serie residua suddetta, esistono superficie d'ordine $n - 4$ aggiunte alla D. Da ciò segue che se $k > n - 4$ non può esistere la serie $g_{2\pi_k - 2 - n_k}$, ossia la serie g_{n_k} non può essere speciale, perchè altrimenti esisterebbero superficie d'ordine $n - 4$ aggiunte a D, le quali sarebbero di conseguenza aggiunte ad F: il che contraddice all'ipotesi $P_g = 0$.

4. Dimostriamo ora che *la deficienza della serie caratteristica del sistema completo* $|\mathrm{C}|$, *contenente totalmente le sezioni piane di* F, *non supera* $P_g - P_a$.

(1) Enriques, *Introduzione*, n. 38.

Supponiamo dapprima $P_g > 0$. Sia k così grande che la dimensione di $|kC|$ soddisfaccia alla (2) e che inoltre le aggiunte ad F di ordine $n-4$, seghino su kC una serie completa. Siccome questa serie è residua della serie caratteristica $g_{n_k}^{r_k-1}$ rispetto alla serie canonica di kC, in base al teorema di Riemann-Roch ne possiamo calcolare la dimensione ϱ, in funzione dell'ordine n_k e della dimensione $r_k + \delta_k - 1$ della serie completa che contiene $g_{n_k}^{r_k-1}$. Così trovasi:

$$\varrho = \pi_k - n_k + r_k + \delta_k - 2 .$$

D'altra parte è anche:

$$\varrho = P_g - 1 ,$$

perchè se k è abbastanza grande, la curva kC non è contenuta in nessuna aggiunta ad F, di ordine $n-4$, onde avremo:

$$\pi_k - n_k + r_k + \delta_k - 2 = P_g - 1 ,$$

che confrontata con la (2) porge:

$$\delta_k \leq P_g - P_a . \tag{3}$$

Supponiamo ora $P_g = 0$ e scegliamo k così grande che la dimensione di $|kC|$ soddisfaccia alla (2), e che inoltre la sua serie caratteristica sia non speciale. Dicendo δ_k la deficienza di questa serie, avremo:

$$r_k = n_k - \pi_k - \delta_k + 1 ,$$

la quale, confrontata con la (2), dà:

$$\delta_k \leq - P_a .$$

Dunque in ogni caso la deficienza della serie caratteristica di $|kC|$ non supera $P_g - P_a$.

Ora si ricordi che la nostra superficie F è projezione generica di una superficie F_1, priva di punti multipli e normale in uno spazio S_r. Poichè sopra una sezione iperpiana generica di F_1 le forme di un ordine k abbastanza alto ($\geq n-2$) segano una serie lineare completa (non speciale) (¹), il sistema completo $|kC|$ taglierà sopra una sezione piana generica C di F una serie completa. Fissiamo una curva del sistema $|(k-1)C|$ e per brevità indichiamola con D. Sarà anche completa la serie segata su C dalle kC che passano pei punti comuni a C, D, e se questi punti presentano $\varepsilon \leq (k-1)n$ condizioni alle kC obbligate a contenerli, la serie suddetta sarà una $g_n^{r_k - r_{k-1} - \varepsilon - 1}$, la quale conterrà la serie caratteristica g_n^{r-1} del sistema completo $|C|$. Dunque

(¹) Castelnuovo, *Sui multipli di una serie lineare* ecc.

la deficienza δ di quest'ultima serie sarà espressa da:

$$\delta = r_k - r_{k-1} - r - \varepsilon .$$

Similmente la serie segata su D dalle kC che passano pei punti comuni a C, D, è una $g_{(k-1)^2 n}^{r_k - r - \varepsilon - 1}$, e siccome questa serie contiene la serie caratteristica di D, dicendo δ_{k-1} la deficienza di quest'ultima, avremo:

$$\delta_{k-1} \geq r_k - r_{k-1} - r - \varepsilon ,$$

ossia:

$$\delta_{k-1} \geq \delta . \tag{4}$$

Se k fu scelto abbastanza grande, sarà:

$$\delta_{k-1} \leq P_g - P_a ,$$

e quindi avremo:

$$\delta \leq P_g - P_a$$ c. d. d.

5. Passiamo ad estendere la proposizione dimostrata ad un sistema qualsiasi (irriducibile e almeno ∞^1).

Prendiamo perciò come modello projettivo dell'ente ∞^2 la superficie F_1 priva di punti multipli, normale nello spazio S_r, e sia $|C_1|$ un sistema completo irriducibile, almeno ∞^1, privo di punti base su F_1. Le forme (varietà ad $r-1$ dimensioni) di ordine k, passanti per una C_1, segano su F_1, fuori di questa curva, un sistema $|C_2|$ che, se k è abbastanza grande, si può supporre privo di gruppi neutri di un numero finito o infinito di punti (cioè di gruppi che impongono *una* condizione alle C_2 obbligate a contenerli); e quindi si può riguardare come il sistema rappresentativo di una superficie F_2, priva di punti multipli, riferita birazionalmente ad F_1. Elevando, se occorre, il valore di k, si può esigere che le sezioni D di F_1 con le forme di ordine k, seghino sulla curva C_1 (che è priva di punti multipli) una serie completa. Applicando ancora il ragionamento (di Castelnuovo) con cui al n. precedente si pervenne alla (4), avremo:

$$\delta_1 \leq \delta_2$$

ove δ_1 è la deficienza della serie caratteristica di $|C_1|$ e δ_2 quella della serie caratteristica di $|C_2|$, reso completo, ove non lo sia. Ma in virtù della proposizione dimostrata al n. 4, si ha:

$$\delta_2 \leq P_g - P_a ;$$

dunque sarà:

$$\delta_1 \leq P_g - P_a .$$

Se il sistema $|C_1|$ ha punti base su F_1, assegnati con molteplicità virtuale uguale all'effettiva, la cosa potrà stabilirsi considerando invece delle curve D, di cui sopra, le sezioni di F_1 con forme di ordine k assoggettate a convenienti condizioni nei punti base di $|C_1|$; e invece delle C_2, le sezioni di F_1 con quelle tra le forme suddette, che passano per C_1; oppure si trarrà profitto del fatto che la F_1 si può mutare birazionalmente in una superficie F_1^*, priva di punti multipli, in guisa che a $|C_1|$ risponda un sistema $|C_1^*|$, senza punti base.

Per estendere la proposizione ad un sistema dotato di punti base accidentali, occorre adottare opportune convenzioni, ma su ciò non crediamo d'insistere.

Concludendo, potremo enunciare:

La deficienza della serie caratteristica di ogni sistema lineare irreducibile, almeno ∞^1, *appartenente ad una superficie di generi* P_g, P_a, *non supera* $P_g - P_a$.

Da questa proposizione segue subito il *teorema di Riemann-Roch per le superficie*, come può vedersi al n. 34 della Memoria di Castelnuovo.

Matematica. — *Sulle serie di funzioni analitiche.* Nota del dott. Carlo Severini, presentata dal Socio L. Bianchi.

In questa breve Nota io do una dimostrazione elementare, semplicissima del seguente teorema [1]:

Se la serie:

$$\sum_{0}^{\infty} {}_n\, \varphi_n(x),$$

i cui termini sono funzioni ad un valore, analitiche, regolari in un'area Γ *finita, connessa del piano della variabile complessa* x, *converge nei punti di un insieme uniformemente denso in* Γ (*che può in particolare essere numerabile*), *e se, per i punti di questo insieme* (*e quindi di* Γ), *si ha, qualunque sia* n:

$$\left|\sum_{0}^{n} {}_n\, \varphi_n(x)\right| \leqq G, \tag{1}$$

ove G *indica una costante positiva, finita, la serie converge in egual grado in tutti i punti di ogni area interna a* Γ, *e però ivi rap-*

[1] Cfr. la *Note on the functions defined by infinite series whose terms are analytic functions of a complex variable*, ecc. del sig. Osgood (Annals of Mathematics, Second Series, vol. 3°, n. 1, October 1901) e la mia Memoria: *Sulle serie di funzioni analitiche* (Foggia, Stab. Tipo-Litogr. De Nido Franc. Paolo, 1903). — Per altre citazioni cfr. la mia Nota: *Sulle serie di funzioni analitiche* in questi Rendiconti, vol. XII, 2° sem., serie 5ª, fasc 3°.