ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCC.

1903

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1903

convenienti condizioni nei punti base di $|C_1|$; e invece delle C_2, le sezioni di F_1 con quelle tra le forme suddette, che passano per C_1; oppure si trarrà profitto del fatto che la F_1 si può mutare birazionalmente in una superficie F_1^*, priva di punti multipli, in guisa che a $|C_1|$ risponda un sistema $|C_1^*|$, senza punti base.

Per estendere la proposizione ad un sistema dotato di punti base accidentali, occorre adottare opportune convenzioni, ma su ciò non crediamo d'insistere.

Concludendo, potremo enunciare:

La deficienza della serie caratteristica di ogni sistema lineare irreducibile, almeno ∞^1, *appartenente ad una superficie di generi* P_g, P_a, *non supera* $P_g - P_a$.

Da questa proposizione segue subito il *teorema di Riemann-Roch per le superficie*, come può vedersi al n. 34 della Memoria di Castelnuovo.

Matematica. — *Sulle serie di funzioni analitiche.* Nota del dott. Carlo Severini, presentata dal Socio L. Bianchi.

In questa breve Nota io do una dimostrazione elementare, semplicissima del seguente teorema [1]:

Se la serie:

$$\sum_0^\infty {}_n\, \varphi_n(x),$$

i cui termini sono funzioni ad un valore, analitiche, regolari in un'area Γ *finita, connessa del piano della variabile complessa* x, *converge nei punti di un insieme uniformemente denso in* Γ (*che può in particolare essere numerabile*), *e se, per i punti di questo insieme* (*e quindi di* Γ), *si ha, qualunque sia* n:

$$\left|\sum_0^n {}_n\, \varphi_n(x)\right| \leqq G, \tag{1}$$

ove G *indica una costante positiva, finita, la serie converge in egual grado in tutti i punti di ogni area interna a* Γ, *e però ivi rap-*

[1] Cfr. la *Note on the functions defined by infinite series whose terms are analytic functions of a complex variable*, ecc. del sig. Osgood (Annals of Mathematics, Second Series, vol. 3°, n. 1, October 1901) e la mia Memoria: *Sulle serie di funzioni analitiche* (Foggia, Stab. Tipo-Litogr. De Nido Franc. Paolo, 1903). — Per altre citazioni cfr. la mia Nota: *Sulle serie di funzioni analitiche* in questi Rendiconti, vol. XII, 2° sem., serie 5ª, fasc 3°.

presenta una funzione ad un valore, analitica, regolare, e derivabile termine a termine e via dicendo.

Indichiamo con Γ' un'area qualsivoglia interna a Γ, e con δ la minima distanza, che può intercedere fra un punto del contorno di Γ ed un punto del contorno di Γ'.

Poniamo ancora per semplicità di scrittura:

$$\Phi_{p,r}(x) = \sum_{p}^{p+r}{}_n \varphi_n(x),$$

ove p ed r rappresentano due numeri interi, positivi, qualunque.

Detto x_0 un punto di Γ', noi possiamo certamente scrivere, per ogni x interno ad un cerchio di centro x_0 e raggio non minore di δ:

$$\Phi_{p,r}(x) - \Phi_{p,r}(x_0) = \sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{(x-x_0)^n}{n!} \Phi_{p,r}^{(n)}(x_0);$$

e quindi, se δ_1 è una quantità positiva minore di δ, abbiamo dalla (1):

$$\left|\frac{1}{n!}\Phi_{p,r}^{(n)}(x_0)\right| \leqq \frac{2G}{\delta_1^n} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots, \infty),$$

donde, per $|x - x_0| < \delta_1$:

$$|\Phi_{p,r}(x) - \Phi_{p,r}(x_0)| \leqq 2G \sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{|x-x_0|^n}{\delta_1^n}. \tag{2}$$

Chiamiamo ora con δ_2 una quantità positiva, minore di δ_1, e con n' un valore dell'indice n, soddisfacente alla condizione:

$$\sum_{n'}^{\infty}{}_n \left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^n \leqq \frac{\sigma}{8G},$$

ove σ indica un numero positivo, scelto piccolo a piacere.

Sarà a maggior ragione, per tutti gli x, che appartengono al cerchio (x_0, δ_2), di centro x_0 e raggio δ_2:

$$\sum_{n'}^{\infty}{}_n \frac{|x-x_0|^n}{\delta_1^n} \leqq \frac{\sigma}{8G}.$$

Determiniamo poi un'altra quantità positiva δ_3, minore di δ_2, tale da avere:

$$\sum_{1}^{n'}{}_n \left(\frac{\delta_3}{\delta_1}\right)^n \leqq \frac{\sigma}{8G},$$

e quindi, tutte le volte che è $|x - x_0| \leqq \delta_3$:

$$\sum_{1}^{n'}{}^{n} \frac{|x - x_0|^n}{\delta_1{}^n} \leqq \frac{\sigma}{8G}.$$

Risulterà così in ultimo, nei punti del cerchio (x_0, δ_3):

$$\sum_{1}^{\infty}{}^{n} \frac{|x - x_0|^n}{\delta_1{}^n} \leqq \frac{\sigma}{4G},$$

e per la (2):

$$|\Phi_{p,r}(x) - \Phi_{p,r}(x_0)| \leqq \frac{\sigma}{2}. \tag{3}$$

Importa notare che i valori δ_1 e δ_2, e quindi anche n' e δ_3, non dipendono affatto dalla scelta del punto x_0.

Ciò posto teniamo conto dell'altra ipotesi, che la serie converga nei punti di un insieme uniformemente denso nell'area Γ.

Per tale ipotesi noi possiamo, con un numero finito m di cerchi, che abbiano per raggio δ_3, e di cui i centri siano punti $x_0{}^{(i)}$ appartenenti a Γ', e nei quali la serie è convergente, ricoprire tutta quest'area; ed allora, se p' è un numero intero, positivo, tale che, per $p \geqq p'$, siano soddisfatte le m disuguaglianze:

$$|\Phi_{p,r}(x_0{}^{(i)})| \leqq \frac{\sigma}{2} \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

in base alla (3) sarà, per $p \geqq p'$, in ogni punto di Γ':

$$|\Phi_{p,r}(x)| \leqq \sigma.$$

Ciò prova la convergenza uniforme della serie data in Γ', che è quanto noi volevamo stabilire.