ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCC.

1903

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1903

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

trasmesse alla Presidenza per la seduta dell' 8 novembre 1903.

Chimica — *Le proprietà colloidali del fluoruro di calcio.* Nota del Socio E. PATERNÒ e di A. MAZZUCCHELLI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Il secondo dei problemi di riduzione per le forme differenziali di ordine pari.* Nota VII del Corrispondente ERNESTO PASCAL.

Dopo avere nella precedente Nota [1] trattato della soluzione del primo problema di riduzione, passeremo in questa a trattare del secondo per il caso dell'ordine *pari*.

Premettiamo intanto alcune considerazioni su quelle espressioni già introdotte nella Nota precedente e da noi chiamate *differenziali canonici*, e ciò lo faremo sia per l'ordine dispari che per l'ordine pari.

1. *Il differenziale canonico nel caso di r dispari, e i suoi covarianti evidenti.* — Nell'introduzione della Nota precedente abbiamo detto che nel caso di r dispari si assume come differenziale canonico la espressione (2) quando però naturalmente essa è una forma differenziale del solito tipo fondamentale. Passiamo ora a stabilire con più precisione a quali condizioni dobbiamo sottoporre i coefficienti delle $Z^{(\rho)}$ che compaiono nella (2) della precedente Nota.

Essendo r dispari e quindi $r-1$ pari, la espressione

$$(1) \qquad -\tfrac{1}{2}\sum_{\rho=1}^{r-2}(-1)^{\rho}\binom{r-1}{\rho}d^{r-1-\rho}Z^{(\rho)}$$

per una formola del paragrafo 2 della Nota IV, è data da:

$$(2) \qquad \sum_{\rho=1}^{r-1}\sum_{j} Z_{j_1\dots j_\rho}\,\delta^{(r-1)}_{j_1\dots j_\rho}+\tfrac{1}{2}\sum_{\rho=2}^{r-1}\sum_{j}[[j_1\dots j_\rho]]_z\,\delta^{(r-1)}_{j_1\dots j_\rho}$$

[1] Questi Rendiconti, (5), t. XII, 1903, 2° sem., pp. 241-249.

dove è da notare che in questa espressione compariscono solo *apparentemente* le Z a $r-1$ indici, alle quali perciò potremo dare valori qualunque senza che varii la (2).

Formiamo ora il differenziale della (2) e per ciò fare adoperiamo le formole (1) della Nota III, e (21) della Nota IV. Si ha (introducendo naturalmente anche qui delle nuove quantità arbitrarie Z a r indici, dalle quali però l'espressione ottenuta è indipendente)

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{j} Z_{j_1\cdots j_\rho}\,\delta^{(r)}_{j_1\cdots j_\rho} + \sum_{\rho=1}^{r-1}\sum_{j}((j_1\cdots j_\rho\,, j_{\rho+1}))_z\, dx_{j_{\rho+1}}\,\delta^{(r-1)}_{j_1\cdots j_\rho} + \\ &+\tfrac{1}{2}\sum_{\rho=2}^{r}\sum_{j}[[j_1\cdots j_\rho]]_z\,\delta^{(r)}_{j_1\cdots j_\rho} - \tfrac{1}{2}\sum_{\rho=1}^{r-1}\sum_{j}\Big[((j_1\cdots j_\rho\,, j_{\rho+1}))_z + \\ &\qquad\qquad + ((j_{\rho+1}\,, j_1\cdots j_\rho))_z\Big]\, dx_{j_{\rho+1}}\,\delta^{(r-1)}_{j_1\cdots j_\rho} \end{aligned}\right.$$

e le parti i cui termini non sono del tipo di quelli di una delle solite forme differenziali, si riducono a:

$$(4)\qquad \tfrac{1}{2}\sum_{\rho=1}^{r-1}\sum_{j}\Big[((j_1\cdots j_\rho\,, j_{\rho+1}))_z - ((j_{\rho+1}\,, j_1\cdots j_\rho))_z\Big]\, dx_{j_{\rho+1}}\,\delta^{(r-1)}_{j_1\cdots j_\rho}.$$

Basterà quindi porre eguale a zero i coefficienti di questa espressione, e cioè:

$$(5)\qquad ((j_1\cdots j_\rho\,, j_{\rho+1}))_z - ((j_{\rho+1}\,, j_1\cdots j_\rho))_z = 0$$

per qualunque ϱ da 1 ad $r-1$. È da osservare però che a tutto rigore basterebbe porre le (5) sino a quelle per cui $\varrho = r-2$, giacchè per $\varrho = r-1$, i termini corrispondenti in (4), avendo per fattore $dx_{j_r}\,\delta^{(r-1)}_{j_1\cdots j_{r-1}}$ che può sostituirsi con $\delta^{(r)}_{j_1\cdots j_r}$, sono del tipo richiesto, e quindi non è necessario che siano zero. Ma per il fatto che, come abbiamo detto, la (2) e il suo differenziale dipendono solo *apparentemente* dalle Z a $r-1$ e a r indici, il porre anche la (5) per $\varrho = r-1$ non porta una nuova condizione fra le Z che *effettivamente* compaiono in (1), perchè, essendo r dispari, la (5) per $\varrho = r-1$ diventa

$$\}j_1\cdots j_{r-1}\, j_r\{_z = 0$$

e questa la si può intendere sempre come una relazione capace di determinare volta per volta la $Z_{j_1\cdots j_r}$ che comparisce in essa linearmente.

Si viene dunque solo ad aggiungere, in più di quanto occorre, una speciale determinazione delle Z a r indici, dalle quali poi è, a sua volta, indipendente *anche il primo termine* del differenziale canonico (2) della Nota precedente.

D' altra parte per la formola (16') della Nota precedente si deduce che, supposto verificate le (5) sino a $\varrho = r - 1$, sarà zero anche ogni $(j_1 \dots j_r j_{r+1})$, cioè le (5) sono soddisfatte anche per $\varrho = r$.

In generale, soddisfatte tutte le (5) sino ad un ϱ pari, saranno soddisfatte anche quelle relative a $\varrho + 1$.

Si vede così che *pel caso di r dispari, il differenziale canonico deve e può sempre esprimersi in modo che i coefficienti* Z *soddisfacciano a tutte le* (5) *per* $\varrho = 1, 2, \dots r$. Una tal forma del differenziale canonico può chiamarsi *normale*.

Una proprietà analoga vedremo che sussiste anche per il differenziale canonico di ordine pari, e da queste proprietà ne risulta poi un'altra relativa ai covarianti evidenti dei differenziali canonici.

Osserviamo infatti che le Z soddisfacendo a tutte le (5) soddisferanno anche alle

$$((i_1 \dots i_\nu, j_1 \dots j_\mu))_z - ((j_1 \dots j_\mu, i_1 \dots i_\nu))_z = 0, \tag{6}$$

per quanto abbiamo dimostrato alla fine della Nota VI.

Ora dico *che i covarianti evidenti del differenziale canonico*

$$\tfrac{1}{2} \sum_{\varrho=1}^{r-1} (-1)^\varrho \binom{r}{\varrho} d^{r-\varrho} Z^{(\varrho)} - \tfrac{1}{2}\, d \sum_{\varrho=1}^{r-2} (-1)^\varrho \binom{r-1}{\varrho} d^{r-1-\varrho} Z^{(\varrho)}$$

sono le $Z^{(\varrho)}$ *medesime, cioè che questa espressione è uguale a* $Z^{(r)}$. Infatti per una formola del paragrafo 2 della Nota IV, la prima parte della precedente espressione è

$$-\tfrac{1}{2} \sum_{\varrho=2}^{r} \sum_{j} [[j_1 \dots j_\varrho]]_z \, \delta^{(r)}_{j_1 \dots j_\varrho}$$

mentre la seconda parte sviluppata nella formola (3) e tenuto conto delle (5) diventa

$$Z^{(r)} + \tfrac{1}{2} \sum_{\varrho=2}^{r} \sum_{j} [[j_1 \dots j_\varrho]] \, \delta^{(r)}_{j_1 \dots j_\varrho}$$

e sommando questa espressione colla precedente si dimostra l'assunto.

2. *Proprietà fondamentale di un differenziale canonico in quanto ai simboli a carattere invariantivo ad esso relativi.* — Una proprietà importante dei differenziali canonici quali li abbiamo definiti nell' introduzione della Nota VI è che: *risultano per essi tutti zero i simboli che formano*

gli elementi delle matrici:

$$(\mathrm{M}')_r \,,\ \}\mathrm{M}'\{_{r-1} \,,\ (\mathrm{M}')_{r-2} \,, \ldots\ldots$$

La dimostrazione di ciò risulta immediatamente dalle proprietà del simbolo $[[j_1 \ldots j_\rho]]$ di cui abbiamo trattato nel paragrafo 3 della Nota IV.

Prima di tutto si può far vedere che *la stessa proprietà vale in ogni caso, sia r pari o dispari, per una qualunque espressione della specie della* (1) *della Nota precedente.*

Giacchè pei risultati della Nota IV, la (1) della Nota precedente è

$$\varepsilon \sum_{\rho=1}^{r} \sum_{j} \mathrm{Z}_{j_1 \cdots j_\rho}\, \delta^{(r)}_{j_1 \cdots j_\rho} + \tfrac{1}{2} \sum_{\rho=2}^{r} \sum_{j} [[j_1 \ldots j_\rho]]_z\, \delta^{(r)}_{j_1 \cdots j_\rho} \tag{7}$$

dove $\varepsilon = 1$ se r è pari ed $\varepsilon = 0$ se r è dispari.

Indicando ora, come al paragrafo 3 della Nota IV, con V i coefficienti della seconda parte di (7), la (1) della Nota precedente è una forma differenziale i cui coefficienti sono

$$\mathrm{Z}_{j_1 \cdots j_\rho} + \tfrac{1}{2}\, \mathrm{V}_{j_1 \cdots j_\rho} \qquad \text{se } r \text{ è pari} \tag{8}$$

e solo

$$\tfrac{1}{2}\, \mathrm{V}_{j_1 \cdots j_\rho} \qquad \text{se } r \text{ è dispari.} \tag{9}$$

Formando quindi cogli (8) i simboli principali di 1ª e 2ª specie

$$(j_1 \ldots j_r\, i) \,,\ \}j_1 \ldots j_{r-1}\, i\{ \,,\ (j_1 \ldots j_{r-2}\, i), \ldots\ldots \tag{10}$$

si ha:

$$(j_1 \ldots j_r\, i)_{\mathrm{Z}} + \tfrac{1}{2}\, (j_1 \ldots j_r\, i)_{\mathrm{V}}$$

$$\}j_1 \ldots j_{r-1}\, i\{_{\mathrm{Z}} + \tfrac{1}{2}\, \}j_1 \ldots j_{r-1}\, i\{_{\mathrm{V}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

e per le formole (20‴) della Nota IV, e osservando che r è pari, si riconosce che queste ultime espressioni sono tutte zero.

Similmente formando colla (9) i medesimi simboli e tenendo ancora conto delle (20‴) della Nota IV, si riconosce che essi sono anche zero. Resta così dimostrato quanto abbiamo ultimamente asserito.

Se ora passiamo a dimostrare la stessa proprietà per i differenziali canonici, osserviamo che resta solo a dimostrarla per i differenziali canonici per r dispari, giacchè per r pari il differenziale canonico è (1) della Nota precedente e per una tale espressione il teorema è dimostrato.

Considerando dunque la (2) della Nota precedente in cui i coefficienti Z soddisfanno alle (5), si vede che i simboli (10) costruiti per la prima parte della detta (2) sono zero, per quanto si è disopra detto, mentre la sua seconda parte per la formola (3) del paragrafo precedente, e per le (5) resta esattamente eguale alla (7) per $\varepsilon = 1$. Si ha perciò da formare i (10) per i coefficienti

$$Z_{j_1 \cdots j_\rho} + \tfrac{1}{2} V_{j_1 \cdots j_\rho}$$

supposto r dispari e che le Z soddisfacciano però alle (5).

Ora per le solite formole (20‴) del paragrafo 3 della Nota IV, i simboli (10) relativi alle $V_{j_1 \cdots j_\rho}$ sono zero, e inoltre quelli relativi alle $Z_{j_1 \cdots j_\rho}$ sono anche zero, perchè queste soddisfanno alle relazioni (5). Resta così dimostrata la proprietà enunciata in principio.

Come corollario risulta che: *se ad una forma differenziale si aggiunge un differenziale canonico, le caratteristiche delle matrici*

$$\}M'\{_1 \,,\, \}M'\{_1 + (M')_2 \,,\, \}M'\{_1 + (M')_2 + \}M'\{_3 \,,\, \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots \,,\, \}M'\{_1 + (M')_2 + \}M'\{_3 + \cdots + (M')_r$$

se r è pari, e

$$(M')_1 \,,\, (M')_1 + \}M'\{_2 \,,\, (M')_1 + \}M'\{_2 + (M')_3 \,,\, \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots \,,\, (M')_1 + \}M'\{_2 + (M')_3 + \cdots + (M')_r$$

se r è dispari, restano invariate, e questo risultato, di cui dovremo fare delle applicazioni più tardi, è estensione di un teorema da noi già dimostrato per $r = 2$ (¹).

3. *Il differenziale canonico pel caso di r pari, e i suoi covarianti evidenti.* — Abbiamo visto che pel caso di r dispari il differenziale canonico è formato mediante i coefficienti Z i quali soddisfanno a tutte le relazioni

$$((j_1 \ldots j_\rho \,,\, j_{\rho+1}))_z - ((j_{\rho+1} \,,\, j_1 \ldots j_\rho))_z = 0$$

per $\rho = 1 , 2 , \ldots r$.

Faremo ora vedere che similmente *un differenziale canonico di ordine r pari può sempre trasformarsi in un altro formato nella stessa maniera, ma in cui i coefficienti Z soddisfanno a tutte le relazioni*:

$$(11) \qquad ((j_1 \cdots j_\rho \,,\, j_{\rho+1}))_z + ((j_{\rho+1} \,,\, j_1 \cdots j_\rho))_z = 0$$

per $\rho = 1 , 2 , \ldots r$, e per qualunque sistema degli indici j; in altri termini, SENZA TOGLIERE GENERALITÀ, *possiamo sempre supporre che un differenziale canonico di ordine pari sia espresso con*

$$(12) \qquad -\tfrac{1}{2} \sum_{\rho=1}^{r-1} (-1)^\rho \binom{r}{\rho} d^{r-\rho} Z^{(\rho)}$$

(¹) Vedi: *Estensione di alcuni teoremi di Frobenius*, Rend. Ist. Lomb. (2), t. 35, 1902.

dove le Z *soddisfacciano a tutte le* (11). Questa forma del differenziale canonico la chiameremo *normale.*

La dimostrazione di questa proprietà è semplicissima dopo quanto abbiamo detto di sopra.

Sia data un'espressione

$$-\tfrac{1}{2}\sum_{\rho=1}^{r-1}(-1)^{\rho}\binom{r}{\rho}d^{r-\rho}\,F^{(\rho)}\,; \tag{13}$$

essa sarà una forma differenziale di ordine r che chiameremo $Z^{(r)}$, di cui quindi i covarianti evidenti (v. Nota III, § 1), sono le $Z^{(\rho)}$, coi coefficienti Z (*non* F).

Per il teorema del paragrafo precedente, le Z soddisferanno alle

$$(j_1 \dots j_r\, i)_z = 0\,,\ \}j_1 \dots j_{r-1}\, i\{_z = 0\,, \dots..$$

ossia, essendo *r pari*, a tutte le (11), e quindi anche (v. § 2 della Nota VI) a tutte le

$$((j_1 \dots j_m\,, j_{m+1} \dots j_\rho))_z + ((j_{m+1} \dots j_\rho\,, j_1 \dots j_m))_z = 0. \tag{14}$$

Ora si trova che $Z^{(r)}$ cioè (13) è esattamente eguale a (12), il che significa che *i covarianti di* (12) *sono esattamente le* $Z^{(\rho)}$, *che sono le forme mediante cui là* (12) *stessa è costruita.*

Sviluppiamo infatti (12) come nel paragrafo 2 della Nota IV, ricordando che r è pari.

Si ha

$$= Z^{(r)} + \tfrac{1}{2}\sum_{\rho=2}^{r}\sum_{j}[[j_1 \dots j_\rho]]\,\delta^{(r)}_{j_1 \dots j_\rho}.$$

Ma ricordando la costruzione del simbolo $[[j_1 \dots j_\rho]]$ e tenendo conto di (14), si riconosce a colpo d'occhio che tal simbolo è sempre zero; dunque del secondo membro della precedente formola non resta che solo $Z^{(r)}$, il che dimostra l'assunto.

La proprietà qui dimostrata è l'analoga di quella già dimostrata nel paragrafo 1 pel caso di r dispari.

4. *Soluzione del problema II col metodo delle trasformazioni infinitesime nel caso di r pari.* — Sia Ξ una trasformazione infinitesima di quelle considerate nel paragrafo 5 della Nota V, *per la quale* cioè *sia zero il covariante* $L^{(r)}$.

Dalla equazione $\Xi f = 0$ formiamo, come nel paragrafo 1 della Nota VI, una trasformazione finita delle x nelle y e sia

$$y_i = \varphi_i(x)\,, \qquad (i = 1, 2, \dots n). \tag{15}$$

Dico che se r è pari, la trasformazione (15) *così ottenuta riduce* $X^{(r)}$ *a*

$$Y^{(r)} \equiv T^{(r)} - \tfrac{1}{2} \sum_{\rho=1}^{r-1} (-1)^{\rho} \binom{r}{\rho} d^{r-\rho} Z^{(\rho)} \tag{16}$$

dove $T^{(r)}$ *non contiene la variabile* y_n, *e la seconda parte è, come si vede, un differenziale canonico di ordine pari. E viceversa, se la* $X^{(r)}$ *è riducibile al tipo* (16), *esiste una trasformazione infinitesima* Ξ *per la quale è zero il covariante* $L^{(r)}$.

Si ha così:

Il problema II per r pari è risolubile semprechè, e solo allora, che la matrice

$$(M')_r + \}M'\{_{r-1} + (M')_{r-2} + \cdots + \}M'\{_1 \tag{17}$$

abbia caratteristica minore di n.

Per il caso di r dispari, il risultato, come vedremo, è lo stesso, ma mutando la forma del differenziale canonico, deve naturalmente modificarsi il secondo membro di (16).

Trasformando la Ξ nelle variabili y, essa diventa al solito:

$$Y = \eta_n \frac{\partial}{\partial y_n} \tag{18}$$

ed essendo $L^{(r)}$ un covariante, esso, trasformato nelle y si riduce alla sola parte che moltiplica η_n, e perciò, dovendo essere $L^{(r)} = 0$, si hanno le equazioni:

$$\left\{\begin{array}{l} (j_1 \dots j_r\, n)_Y = 0 \\ \}j_1 \dots j_{r-1}\, n\{_Y = 0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \}j\, n\{_Y = 0 \end{array}\right. \tag{19}$$

indicando con Y i coefficienti della $X^{(r)}$ trasformata, che indicheremo con $Y^{(r)}$.

Da queste equazioni cerchiamo ora di ottenere la forma dei valori delle Y.

Cominciamo col porre

$$\left\{\begin{array}{ll} Y_i = T_i + Z_i, & (i = 1, 2, \dots n-1) \\ Y_n = \phantom{T_i +{}} Z_n & \end{array}\right. \tag{20}$$

dove le T_i sieno delle espressioni arbitrarie *non* contenenti y_n, e le Z contengano invece tutte le variabili.

Da $\}in\{_Y = 0$ si deduce allora:

$$Y_{in} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial Z_i}{\partial y_n} + \frac{\partial Z_n}{\partial y_i}\right) = Z_{in} \tag{21}$$

e da $(i\,j\,n)_Y = 0$ si ha:

$$\frac{\partial Y_{ij}}{\partial y_n} = \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y_n}\left(\frac{\partial Z_i}{\partial y_j} + \frac{\partial Z_j}{\partial y_i}\right)$$

donde, integrando:

$$Y_{ij} = T_{ij} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial Z_i}{\partial y_j} + \frac{\partial Z_j}{\partial y_i}\right) \tag{22}$$

essendo T_{ij} una funzione indipendente da y_n.

È da notare che da queste equazioni non si deduce altro se non che Y_{ij} deve essere composto di una parte indipendente da y_n e di un'altra parte; e che quindi mutando a piacimento la prima parte, può mutarsi anche la seconda; noi però in particolare porremo

$$Z_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial Z_i}{\partial y_j} + \frac{\partial Z_j}{\partial y_i}\right). \tag{23}$$

Ricordando il modo col quale abbiamo ottenuto la (21), il porre la (23) corrisponde a porre $\}i\,j\{_Z = 0$.

Poniamo ora

$$Y_{ijh} = T_{ijh} + Z_{ijh} \tag{24}$$

dove le T non contengano y_n, e quelle di cui uno degli indici sia n siano zero.

Da $\}i\,j\,h\,n\{_Y = 0$ restano allora determinati i valori delle Y_{ijhn}, cioè delle Y a quattro indici di cui uno sia n, e che noi come in (21) porremo eguali alle Z_{ijhn}; mentre da $(i\,j\,h\,k\,n)_Y = 0$ resta determinato il valore di $\frac{\partial Y_{ijhk}}{\partial y_n}$, e quindi, integrando, a meno di una parte indipendente da y_n, il valore di Y_{ijhk}.

Propriamente risulta, tenendo conto delle Y precedenti, $\frac{\partial Y_{ijhk}}{\partial y_n}$ eguale alla derivata rispetto ad y_n di una espressione ben determinata mediante le Z ad 1, e 3 indici, e che, come in (23), chiameremo Z_{ijhk}, e porremo

$$Y_{ijhk} = T_{ijhk} + Z_{ijhk} \tag{25}$$

dove le T non contengano y_n, e quelle di cui uno degli indici sia n siano zero.

Per l'espressione di Z_{ijhk} si trova così la seguente formola generale, valevole anche per il caso in cui sia $k=n$:

$$(26)\qquad Z_{ijhk}=\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial Z_{ijh}}{\partial y_k}+\frac{\partial Z_{ijk}}{\partial y_h}+\frac{\partial Z_{ihk}}{\partial y_j}+\frac{\partial Z_{jhk}}{\partial y_i}\right)-$$
$$-\tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial^3 Z_k}{\partial y_i\,\partial y_j\,\partial y_h}+\frac{\partial^3 Z_h}{\partial y_i\,\partial y_j\,\partial y_k}+\frac{\partial^3 Z_j}{\partial y_i\,\partial y_h\,\partial y_k}+\frac{\partial^3 Z_i}{\partial y_j\,\partial y_h\,\partial y_k}\right)$$

nello stesso modo che la (23) vale anche per $j=n$, come risulta dalla (21).

Così seguitando si vede che dalle (19) le Y (e quindi anche le Z) ad un numero *dispari* di indici restano arbitrarie, mentre le Y ad un numero *pari* di indici restano espresse, a meno di una parte indipendente da y_n, mediante le altre.

Adottando ora la indicata determinazione per le Z ad un numero *pari* di indici, vediamo a quali relazioni esse soddisfanno, e per ciò fare basta esaminare il modo con cui da $(i\,j\,n)_Y=0$ abbiamo ottenuto la Z_{ij}, e da $(i\,j\,h\,k\,n)_Y=0$ il valore di Z_{ijhk}.

Si riconosce che la $(i\,j\,n)_Y$ si può porre sotto la forma di una derivata rispetto ad y_n, cioè sotto la forma

$$-\tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y_n}\left\{2\,Y_{ij}-\frac{\partial Z_i}{\partial y_j}-\frac{\partial Z_j}{\partial y_i}\right\}$$

e il valore di Z_{ij} si trova mutando nella quantità sotto il segno di derivazione, la Y_{ij} in Z_{ij} e indi eguagliando a zero tale quantità sotto il segno, la quale così trasformata non è altro che $\}ij\{_Z$.

Dunque le Z_{ij} soddisfanno a:

$$(27)\qquad \}i\,j\{_Z=0,$$

come del resto avevamo già verificato di sopra. Ora questo procedimento può farsi in generale.

Teniamo infatti presente tutto quanto abbiamo già dimostrato nel paragrafo 2 della Nota precedente.

Supponiamo d'aver già verificato che le Z soddisfacciano a tutte le

$$(28)\qquad \}j_1\,j_2\{_Z=0\ ,\ (j_1 j_2 j_3)_Z=0\ ,\ \ldots.\ (j_1\ldots j_{2\rho-1})_Z=0.$$

Avendo nel loc. cit. dimostrato che quando ciò si verifica e quando le Y soddisfanno le (19), si ha la formola

$$(j_1\ldots j_{2\rho}\,n)_Y=-\tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y_n}\}j_1\ldots j_{2\rho}\{_Y$$

veniamo a trovarci nelle stesse condizioni che sopra e quindi dovremo porre

$$(29)\qquad \}j_1\ldots j_{2\rho}\{_Z=0$$

donde poi, come abbiamo osservato nello stesso paragrafo 2 della Nota precedente, deduciamo anche

$$(30) \qquad (j_1 \dots j_{2\rho+1})_Z = 0.$$

Dalla sussistenza della (27), *resta così dimostrata anche quella di tutte le*

$$(31) \qquad \{j_1 j_2\}_Z = 0 \;,\; (j_1 j_2 j_3)_Z = 0 \;, \dots\dots (j_1 \dots j_{r+1})_Z = 0$$

(*supposto* r *pari*), *e quindi poi anche delle*

$$(32) \qquad ((i_1 \dots i_\nu , j_1 \dots j_\mu))_Z + ((j_1 \dots j_\mu , i_1 \dots i_\nu))_Z = 0,$$

per quanto abbiamo visto nel medesimo luogo sopracitato.

Ciò posto, è evidente che si ha:

$$Y^{(r)} = T^{(r)} + Z^{(r)}$$

dove $T^{(r)}$ *non* contiene y_n, e $Z^{(r)}$ è la forma differenziale di ordine r, i cui coefficienti sono le Z suindicate. Ora si vede che $Z^{(r)}$ è esattamente un differenziale canonico, anzi che propriamente si ha

$$(33) \qquad Z^{(r)} = -\tfrac{1}{2} \sum_{\rho=1}^{r-1} (-1)^\rho \binom{r}{\rho} d^{r-\rho} Z^{(\rho)}.$$

Le Z sono infatti qui sottoposte alle medesime condizioni che nel paragrafo 3 e quindi sussiste la (33).

Viceversa, supponiamo che una trasformazione delle x nelle y, muti $X^{(r)}$ in una espressione

$$Y^{(r)} = T^{(r)} + W^{(r)}$$

dove $W^{(r)}$ sia un differenziale canonico che potremo ridurre sempre, come si sa, a forma *normale*, e $T^{(r)}$ *non* contenga y_n.

Essendo $W^{(r)}$ un differenziale canonico, i simboli

$$(j_1 \dots j_r\, i)_W \,,\, \{j_1 \dots j_{r-1}\, i\}_W \,, \dots\dots$$

sono, come sappiamo (v. paragrafo 2), tutti zero; e poichè $T^{(r)}$ non contiene y_n, per essa sono zero quelli fra i suddetti simboli, in cui sia $i = n$; lo stesso si avrà dunque per la $Y^{(r)}$, e perciò restano soddisfatte tutte le (19).

Se ora formiamo la trasformazione infinitesima (18), si riconosce, per le (19), che il covariante $L^{(r)}$ di $Y^{(r)}$ e Y è zero; quindi deduciamo che trasformando la Y nella Ξ e la $Y^{(r)}$ in $X^{(r)}$, il covariante $L^{(r)}$ di Ξ e $X^{(r)}$ deve essere zero; il che è quanto doveasi dimostrare.

Supponiamo che la matrice (17) abbia caratteristica $\nu < n$; facciamo la trasformazione di $X^{(r)}$ in $Y^{(r)}$ dato da (16), e osserviamo che, per un teorema del paragrafo 2, la matrice analoga alla (17) ma relativa alla sola forma $T^{(r)}$ ha anche la caretteristica ν, mentre d'altra parte, non contenendo $T^{(r)}$ la variabile y_n, tale matrice ha solo $n-1$ colonne, cioè manca di quella relativa all'indice n.

Se è $\nu < n-1$, si può riapplicare a $T^{(r)}$ la medesima teoria, e trasformare $T^{(r)}$ nella somma di un'altra con sole $n-2$ variabili, e di un nuovo differenziale canonico in $n-1$ variabili.

Così seguitando si vede che:

Se è ν la caratteristica della matrice

$$\{M'\}_1 + (M')_2 + \{M'\}_3 + \cdots + (M')_r$$

la forma $X^{(r)}$ si può trasformare nella somma di una forma con sole ν variabili e di $n-\nu$ differenziali canonici rispettivamente a $n, n-1, n-2, \ldots \nu+1$ variabili.

Resta a considerare il caso di r dispari, il che, per ragioni di spazio, dobbiamo rimandare alla prossima Nota.

Matematica — *Il secondo problema di riduzione per le forme differenziali di ordine dispari, e ricerche complementari.* Nota VIII del Corrispondente Ernesto Pascal.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Analisi. — *Sulla sviluppabilità di una funzione in serie di fattoriali.* Nota del Socio S. Pincherle.

In una recente Memoria, il sig. N. Nielsen [1] ha espresse le condizioni necessarie e sufficienti per la sviluppabilità di una funzione analitica in serie della forma

$$\Sigma c_n \frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n)},$$

o serie di fattoriali. Queste condizioni non si riferiscono però direttamente alla funzione $\alpha(x)$ da svilupparsi, bensì ad una funzione $\varphi(t)$ legata ad essa dalla relazione

$$\alpha(x) = \int_0^1 \varphi(t)\, t^{x-1}\, dt\,; \tag{a}$$

[1] Ann. de l'École Normale, S. III, T. XIX, 1902.