

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI
ANNO CCC.
1903

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XII.

2° SEMESTRE.



ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1903

Supponiamo che la matrice (17) abbia caratteristica $\nu < n$; facciamo la trasformazione di $X^{(r)}$ in $Y^{(r)}$ dato da (16), e osserviamo che, per un teorema del paragrafo 2, la matrice analoga alla (17) ma relativa alla sola forma $T^{(r)}$ ha anche la caratteristica ν , mentre d'altra parte, non contenendo $T^{(r)}$ la variabile y_n , tale matrice ha solo $n-1$ colonne, cioè manca di quella relativa all'indice n .

Se è $\nu < n-1$, si può riapplicare a $T^{(r)}$ la medesima teoria, e trasformare $T^{(r)}$ nella somma di un'altra con sole $n-2$ variabili, e di un nuovo differenziale canonico in $n-1$ variabili.

Così seguitando si vede che:

Se è ν la caratteristica della matrice

$$\{M\}'_1 + (M)'_2 + \{M\}'_3 + \dots + (M)'_r$$

la forma $X^{(r)}$ si può trasformare nella somma di una forma con sole ν variabili e di $n-\nu$ differenziali canonici rispettivamente a $n, n-1, n-2, \dots, \nu+1$ variabili.

Resta a considerare il caso di r dispari, il che, per ragioni di spazio, dobbiamo rimandare alla prossima Nota.

Matematica — *Il secondo problema di riduzione per le forme differenziali di ordine dispari, e ricerche complementari.* Nota VIII del Corrispondente ERNESTO PASCAL.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Analisi. — *Sulla sviluppabilità di una funzione in serie di fattoriali.* Nota del Socio S. PINCHERLE.

In una recente Memoria, il sig. N. Nielsen (1) ha espresse le condizioni necessarie e sufficienti per la sviluppabilità di una funzione analitica in serie della forma

$$\sum c_n \frac{n!}{x(x+1) \dots (x+n)},$$

o serie di fattoriali. Queste condizioni non si riferiscono però direttamente alla funzione $\alpha(x)$ da svilupparsi, bensì ad una funzione $g(t)$ legata ad essa dalla relazione

$$(a) \quad \alpha(x) = \int_0^1 g(t) t^{x-1} dt;$$

(1) Ann. de l'École Normale, S. III, T. XIX, 1902.

fra $\alpha(x)$ e $\varphi(t)$ passa cioè quella tale corrispondenza funzionale notata per primo dal Laplace (1) e nella quale egli designò la $\varphi(t)$ col nome di *funzione generatrice*, la $\alpha(x)$ con quello di *funzione determinante*. Il Nielsen ha ricordato (2) come la sviluppabilità in serie di fattoriali fosse stata già dallo Schlömlich subordinata alla rappresentazione della funzione $\alpha(x)$ sotto forma di un integrale definito del tipo (a), e J. C. Kluyver (3) ottenne lo sviluppo in serie di fattoriali calcolando la funzione generatrice della funzione $\alpha(x)$ mediante il metodo di inversione di integrale definito che egli attribuisce a Kronecker e a Murphy, ma che va fatto risalire al Riemann (4).

Le condizioni di sviluppabilità date dal Nielsen si possono esprimere in una forma notevolmente più semplice, quando si generalizzi alquanto l'espressione (a) considerando come variabile l'estremo superiore dell'integrazione, e quando si faccia uso del concetto di *ordine* di un punto singolare, quale è stato introdotto dall'Hadamard (5). Lo scopo della presente Nota è appunto di mettere in luce il legame fra codesto concetto di ordine e la sviluppabilità in serie di fattoriali: assumendo per tali serie la forma

$$(b) \quad a^x \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)},$$

dove a e le c_n sono costanti indipendenti da x . Per brevità di scrittura, si indicherà con $\eta_n(x)$ il fattoriale $\frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$.

I. Dal citato lavoro di Hadamard ricordiamo anzitutto le definizioni ed i teoremi seguenti:

Data una serie di potenze

$$(1) \quad f(t) = \sum_0^{\infty} c_n t^n$$

avente $(0, 1)$ come cerchio di convergenza (6), s'intende con *ordine* di un punto t_0 della circonferenza di convergenza un numero reale g tale che, indicando con D il simbolo di derivazione e con ω un numero qualsiasi, sia

$$(2) \quad t^{-\omega} D^{-\omega} f(t)$$

finita, continua e a scartamento finito nell'intorno del punto t_0 , se è

(1) *Théorie analytique des probabilités*, Paris, 1812.

(2) Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 30 décembre 1901.

(3) Nieuw Archief voor Wiskunde, S. II, T. 4, Amsterdam, 1899.

(4) Werke, ed. Dedekind e Weber, p. 140. Leipzig, 1876.

(5) Nel suo *Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor*. J. de Math., S. IV, T. VIII, 1892.

(6) Con (a, b) indicheremo abbreviatamente il cerchio avente per centro il punto a e per raggio il numero positivo b .

$R(\omega) > g$ (1), ma cessi di essere tale se è $R(\omega) < g$. Se il punto t_0 non è singolare per la funzione analitica $f(t)$ definita dalla serie (1), il suo ordine è $-\infty$ (2).

L'ordine di $f(t)$ sulla circonferenza di convergenza è un numero reale g_1 tale che la (2) sia finita, continua e a scartamento finito su tutta la circonferenza $(0, 1)$, se è $R(\omega) \geq g_1$, ma che cessi di essere tale per $R(\omega) < g_1$. In modo analogo si definisce l'ordine di $f(t)$ sopra un arco della circonferenza.

L'ordine di $f(t)$ sulla circonferenza di convergenza è uguale al *massimo limite* (3) del rapporto

$$\frac{\log |a_n|}{\log n}$$

(o *caratteristica* della successione a_n), aumentato di un'unità.

L'ordine di $f(t)$ sopra un arco della circonferenza è il limite superiore degli ordini nei punti di questo arco.

Se su un arco compreso fra gli argomenti θ_1 e θ_2 l'ordine g di $f(t)$ è positivo, si avrà

$$(3) \quad \lim_{\rho \rightarrow 1} (1 - \rho)^\omega f(\rho e^{i\theta}) = 0$$

per $R(\omega) > g$, uniformemente per i valori di θ compresi fra θ_1 e θ_2 . Se l'ordine è negativo o nullo, la (3) vale per $R(\omega) > 0$.

2. È facile di estendere le definizioni precedenti al caso, che a noi interesserà in ciò che segue, di una serie

$$(4) \quad g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t-a)^n$$

avente (a, r) come cerchio di convergenza. Il suo ordine sarà il numero $g = k + 1$, essendo k la caratteristica della successione $c_n r^n$, e si avrà uniformemente rispetto a θ :

$$(3') \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^\omega g(a + (r - \varepsilon) e^{i\theta}) = 0$$

per $R(\omega) > g$ se è $g > 0$. Se s è un punto singolare di $g(t)$ sulla circonferenza (a, r) l'ordine di s sarà un numero $g_0 \leq g$. È importante di notare che se si prende dentro al cerchio (a, r) un punto a' che sia più prossimo ad s che ad ogni altro punto singolare di $g(t)$ e si deduce, collo

(1) Con $R(a)$ si intende la parte reale del numero complesso a .

(2) I punti di ordine $-\infty$ si comprenderanno perciò fra quelli d'ordine finito.

(3) *La plus grande des limites* secondo l'espressione di Cauchy.

sviluppo di Maclaurin, lo sviluppo di $g(t)$ in serie di potenze di $t - a'$, l'ordine di questo sviluppo sulla propria circonferenza di convergenza sarà ancora g_0 .

3. Abbiassi ora un ramo ad un valore di funzione analitica $g(t)$, data in una stella di Mittag-Leffler A di centro c , dove c è un punto del piano t differente da $t=0$. Il punto $t=0$ sia un punto singolare del ramo di funzione $g(t)$, e perciò posto al contorno della stella. Preso un punto a comunque nell'interno della stella, dovrà verificarsi uno dei tre seguenti casi:

a) O il cerchio $(a, |a|)$ è tutto interno alla stella, e sulla sua circonferenza si trova il solo punto singolare $t=0$.

b) O il cerchio $(a, |a|)$ è tutto interno alla stella, ma sulla sua circonferenza, oltre a $t=0$, si trovano altri punti singolari di $g(t)$.

c) O infine il cerchio $(a, |a|)$ non è tutto interno alla stella.

4. Sia dapprima un punto a che appartenga al primo dei tre casi ora enumerati. Se accade che, per un tale punto, l'ordine della serie di potenze

$$(4') \quad g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(a)}{n!} (t-a)^n$$

sulla sua circonferenza $(a, |a|)$ di convergenza sia finito ⁽¹⁾ e uguale a g , esso ordine sarà finito e uguale a g per gli sviluppi relativi a tutti gli altri punti appartenenti a quello stesso primo caso. Potremo dire allora, senza riferimento ad alcun sviluppo (4') speciale, che il punto $t=0$ è *punto singolare d'ordine finito* g per il ramo $g(t)$ di funzione analitica. Supporremo dapprima $g > 0$.

Prendiamo a considerare l'integrale

$$(5) \quad \int_0^a g(t) t^{x-1} dt,$$

dove l'integrazione va fatta lungo una linea semplice λ congiungente o ad a senza uscire dalla stella A. L'integrale, sotto questa condizione per λ , è indipendente da codesta linea; in particolare si può prendere λ tutta entro il cerchio $(a, |a|)$. Dalla (3') segue che $t^n g(t)$ tende a zero per $t=0$ per $R(x) > g$, e quindi l'integrale (5) è convergente nel semipiano definito da $R(x) > g$. Ma se ε è un punto della linea λ , prossimo a $t=0$ quanto si vuole, la serie (4') sarà uniformemente convergente fra ε ed a e si potrà integrare termine a termine; osservando che

$$\int_{\varepsilon}^a (t-a)^n t^{x-1} dt = (-1)^n (a^{n+x} - \varepsilon^{n+x}) \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)},$$

(1) Si include, come si è avvertito, il caso di $g = -\infty$.

si otterrà

$$\int_{\varepsilon}^a \varphi(t) t^{x-1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\varphi^{(n)}(a)}{n!} (a^{n+x} - \varepsilon^{n+x}) \eta_n(x).$$

Qui la serie del secondo membro converge assolutamente ed uniformemente rispetto ad x entro il semipiano $R(x) > g$, e tende per $\varepsilon = 0$, alla serie

$$(6) \quad a^x \sum (-1)^n \frac{\varphi^{(n)}(a) a^n}{n!} \eta_n(x),$$

pure uniformemente convergente rispetto ad x nel semipiano stesso (1). È allora applicabile, per un noto teorema del Dini, l'integrazione termine a termine fra 0 ed a alla serie (4') moltiplicata per t^{x-1} , e si ha così l'uguaglianza, valida nel detto semipiano $R(x) > g$:

$$(6') \quad \int_0^a \varphi(t) t^{x-1} dt = a^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\varphi^{(n)}(a) a^n}{n!} \eta_n(x).$$

5. Il punto a si trovi invece nel secondo dei tre casi enumerati al § 2. Qui la caratteristica k del sistema $\frac{\varphi^{(n)}(a) a^n}{n!}$, cioè l'ordine $k+1 = g'$ della serie (4'), non dipenderà più dal punto $t=0$ soltanto; ma (per le proposizioni già citate di Hadamard) anche dagli altri punti singolari di $\varphi(t)$ posti sulla circonferenza (a, a) . Se g è l'ordine del punto $t=0$, si avrà $g' \geq g$. L'uguaglianza (6') avrà ancora luogo; solo, mentre il primo membro ha significato per $R(x) > g$, il secondo membro avrà validità nel semipiano $R(x) > g'$, generalmente contenuto nel precedente, e solo entro quest'ultimo semipiano è valida l'uguaglianza (6').

6. Veniamo ora al terzo caso, in cui il raggio di convergenza dello sviluppo (4') è inferiore ad $|a|$. In tale caso, la caratteristica di $\frac{\varphi^{(n)}(a) a^n}{n!}$ è evidentemente uguale a $+\infty$, e quindi la serie di fattoriali che figura nel secondo membro di (6') è costantemente divergente. Ma in questo caso, si prenda sulla linea d'integrazione un punto c abbastanza prossimo a $t=0$ perchè codesto punto c venga ad appartenere al primo caso; si spezzi l'inte-

(1) Basta ricordare (v. p. es. la mia Nota in questi Rendiconti, seduta del 16 febbraio 1902) che il campo di convergenza assoluta ed uniforme di una serie di fattoriali $\sum c_n \eta_n(x)$ è il semipiano $R(x) > k+1$, dove k è la caratteristica del sistema c_n .

grale (5) nella somma

$$\int_0^a g(t) t^{x-1} dt + \int_c^a g(t) t^{x-1} dt.$$

Il primo integrale, per $R(x) > g$, si sviluppa come è indicato al § 3; in quanto al secondo, esso è una funzione intera di x . Ponendo in esso

$$t^x = (a' + t - a')^x,$$

dove $|a'|$ sia preso abbastanza grande per superare $|t - a'|$ lungo tutta la linea d'integrazione fra c ed a , esso diviene

$$a'^x \int_c^a g(t) \left(1 + \frac{t - a'}{a'}\right)^x \frac{dt}{t}$$

e, sviluppando colla serie binomiale, viene per esso lo sviluppo convergente in tutto il piano:

$$a'^x \sum_0^{\infty} c'_n \frac{x(x-1) \dots (x-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}$$

dove

$$c'_n = \frac{1}{a'^n} \int_c^a (t - a')^n g(t) \frac{dt}{t}.$$

Il fattoriale $\frac{x(x-1) \dots (x-n+1)}{n!}$ può, per molteplici ragioni, considerarsi come una funzione $\eta_n(x)$ per valori negativi dell'indice, e perciò in questo caso si può dire che l'integrale (5) è sviluppabile in una serie di funzioni $\eta_n(x)$ in cui n varia da $-\infty$ a $+\infty$.

7. Fin qui abbiamo supposto $g > 0$; però questa restrizione non è affatto essenziale; mostriamo infatti che per $g \leq 0$, la relazione (6') è valida per $R(x) > 0$. Supponiamo la singolarità $t=0$ della funzione $g(t)$ di ordine g compreso fra $-p+1$ e $-p$, dove p è intero positivo; è chiaro che gli integrali

$$\int_0^a g(t) t^{x-1} dt, \int_0^a g'(t) t^{x-1} dt, \dots \int_0^a g^{(p-1)}(t) t^{x-1} dt$$

saranno convergenti per $R(x) > 0$, mentre

$$\int_0^a g^{(p)}(t) t^{x-1} dt,$$

dove la $g^{(p)}(t)$ è di ordine positivo $g+p$, converge per $R(x) > g+p$. Per

questi valori di x si ha dunque, applicando p volte l'integrazione per parte:

$$(7) \quad \int_0^a g(t) t^{x-1} dt = a^x \left[\frac{g(a)}{x} - \frac{ag'(a)}{x(x+1)} + \dots + (-1)^{p-1} \frac{a^{p-1} g^{(p-1)}(a)}{x(x+1)\dots(x+p-1)} \right. \\ \left. + \frac{(-1)^p}{x(x+1)\dots(x+p-1)} \int_0^a g^{(p)}(t) t^{x+p-1} dt. \right]$$

Qui l'ultimo integrale è, per $R(x) > g$, sviluppabile in serie della forma

$$a^x \sum c_n \eta_n (x+p),$$

e quindi il secondo membro della (7) dà una serie della forma (6), convergente assolutamente per $R(x) > g$, ad eccezione dei punti $x=0, -1, -2, \dots, -p+1$, dove essa diventa infinita del primo ordine. L'uguaglianza fondamentale (6') vale dunque solo per $R(x) > 0$, sebbene il secondo membro di essa conservi significato in tutto il semipiano $R(x) > g$.

8. Le considerazioni precedenti si riferivano al caso di un punto $t=0$ posto al contorno della stella A, e quindi, in generale, singolare per $g(t)$. Ma per il caso in cui $t=0$ sia un punto regolare per $g(t)$, le cose precedentemente dette rimangono valide, colla circostanza favorevole che la caratteristica dei coefficienti della serie (6) è $-\infty$, e quindi, mentre il primo membro della (6') è convergente per $R(x) > 0$, la serie del secondo membro converge assolutamente in tutto il piano, eccettuati i poli del primo ordine $0, -1, -2, -3, \dots$; codesto secondo membro è dunque una funzione *meromorfa* (trascendente fratta).

10. È facile di vedere che la condizione trovata dianzi come sufficiente per lo sviluppo di una funzione (5) in serie di fattoriali, che cioè $t=0$ sia per $g(t)$ punto regolare o singolare d'ordine finito, è anche necessaria. Sia infatti

$$(8) \quad a^x \sum c_n \eta_n(x)$$

una serie di fattoriali, in cui la caratteristica di c_n sia finita ed uguale a $g-1$ (1). Pongo

$$(9) \quad g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{a^n} (t-a)^n.$$

(1) Se la caratteristica fosse $+\infty$, la serie (8) non potrebbe convergere per alcun valore di x . Se fosse $g = -\infty$, il raggio di convergenza di (9) potrebbe anche essere $> |a|$; e $t=0$ sarebbe certamente punto regolare per $g(t)$.

Per la proprietà delle c_n , la serie $\sum c_n s^n$ ammette $(0, 1)$ come cerchio di convergenza, e quindi lo sviluppo (9) ha per cerchio di convergenza $(a, |a|)$. Ne viene che la funzione $g(t)$ è d'ordine finito g sulla sua circonferenza di convergenza, e quindi è d'ordine finito $g_1 \leq g$ anche il punto $t=0$; pertanto l'integrale

$$\int_0^a g(t) t^{g-1} dt$$

sarà convergente per $R(x) > g_1$, e col metodo del § 4 si dimostrerà uguale alla serie (8) in questo semipiano.

Riassumendo, « condizione necessaria e sufficiente affinché $\alpha(x)$ sia sviluppabile in serie di fattoriali, è che essa sia funzione determinante di « una funzione analitica $g(t)$ per la quale il punto $t=0$ sia o regolare, o « singolare d'ordine finito ».

Astronomia. — *Osservazioni della cometa 1903 e IV, fatte all'equatoriale di 39 centimetri di apertura del R. Osservatorio al Collegio Romano.* Nota del Corrispondente E. MILLOSEVICH.

Ho l'onore di presentare all'Accademia 43 posizioni della cometa Borrelly (Marsiglia 21 giugno) IV e 1903 fatte all'equatoriale; meno 5 posizioni, che feci io, 38 spettano al dott. Emilio Bianchi, assistente all'Osservatorio.

Le posizioni furono fatte col micrometro filare, a fili illuminati e con 240 di amplificazione.

Data	Tempo medio Roma C. R.	α app.	log. p. Δ	δ app.	log. p. Δ
1903					
Giugno 23	^h 11 ^m 23 ^s 31	^h 21 ^m 51 ^s 12.31	9 ^a .603	— 6° 30' 46".3	0. 786
" 24	12 13 21	21 50 15.91	9 ^a .541	— 5 32 32. 1	0. 793
" 25	12 12 47	21 49 14.64	9 ^a .534	— 4 31 49. 8	0. 789
" 26	11 16 51	21 48 7.74	9 ^a .595	— 3 28 49. 6	0. 779
" 30	11 4 0	21 41 44.95	9 ^a .585	+ 1 54 4. 6	0. 759
Luglio 7	11 4 6	21 18 31.50	9 ^a .540	+17 57 32. 6	0. 627
" 10	10 2 31	20 58 47.20	9 ^a .619	+28 53 50. 7	0. 527
" 10	10 22 48	20 58 40.15	9 ^a .591	+28 57 26. 1	0. 496
" 11	10 11 11	20 49 24.67	9 ^a .609	+33 18 22. 7	0. 418
" 12	8 40 57	20 38 53.99	9 ^a .715	+37 41 28. 1	0. 512