# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCC.

1903

---

SERIE QUINTA

---

# RENDICONTI

---

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

---

## VOLUME XII.

2° SEMESTRE.


ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1903

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

# DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

## Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

*pervenute all'Accademia sino al 19 luglio 1903.*

**Matematica.** — *Le trasformazioni infinitesime applicate ad una forma differenziale di ordine r.* Nota IV del Corrispondente ERNESTO PASCAL.

Facendo seguito alle altre mie precedenti Note [1], mi propongo con questa di ricercare il risultato dell'applicazione di una trasformazione infinitesima su di una forma $X^{(r)}$, e indi dedurre di qui i teoremi relativi ai casi in cui la trasformazione infinitesima lasci invariata o la equazione $X^{(r)} = 0$, ovvero, in particolare, la forma $X^{(r)}$.

1. *Applicazione di una trasformazione infinitesima* $\Xi$ *sulla forma* $X^{(r)}$. — Operando la

$$\Xi = \sum_i \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{1}$$

sulla

$$X^{(r)} = \sum_{m=1}^{r} \sum_{j_1 \dots j_m} X_{j_1 \dots j_m} \delta^{(r)}_{j_1 \dots j_m}, \tag{2}$$

tenendo conto della formola (24) della Nota I e osservando che al solito

$$\sum_{j_1 \dots j_m} \frac{1}{m} S_{jm} = \sum_{j_1 \dots j_m},$$

[1] Questi Rendiconti (5), t. XII, 1903, 1° sem., pp. 325-332, 365-377, e 399-408.

si ha:

$$\Xi X^{(r)} = \sum_{m=1}^{r} \sum_{j_1 \ldots j_m} \sum_i \xi_i \frac{\partial X_{j_1 \ldots j_m}}{\partial x_i} \delta^{(r)}_{j_1 \ldots j_m} +$$

$$+ \sum_{m=2}^{r} \sum_{j_1 \ldots j_m} X_{j_1 \ldots j_m} \sum_{k=1}^{r-m+1} \binom{r}{k} d^k \xi_{j_m} \delta^{(r-k)}_{j_1 \ldots j_{m-1}} + \sum_j X_j \, d^r \xi_j \, .$$

Ordinando rispetto a $k$, cioè ponendo:

$$\sum_{m=2}^{r} \sum_{k=1}^{r-m+1} = \sum_{k=1}^{r-1} \sum_{m=2}^{r-k+1} ,$$

la prima parte della seconda riga può scriversi:

$$\sum_{k=1}^{r-1} \binom{r}{k} \left[ \sum_{m=2}^{r-k+1} \sum_{j_1 \ldots j_m} X_{j_1 \ldots j_m} \delta^{(r-k)}_{j_1 \ldots j_{m-1}} \right] d^k \xi_{j_m}$$

e mutando $j_m$ in $i$, e indi tenendo conto del simbolo introdotto colla formola (9) della Nota III, e aggiungendo anche l'ultimo termine della seconda riga, quest' ultima espressione può, più brevemente, scriversi:

$$\sum_i \sum_{k=1}^{r} \binom{r}{k} X^{(r-k,\,0)}_{i,0} \, d^k \xi_i \, . \tag{3}$$

Consideriamo ora l' invariante

$$\Lambda = \sum_i \xi_i X_i \tag{4}$$

e i covarianti $C^{(\mu)}$ considerati nel paragrafo 4 della Nota III,

$$C^{(\mu)} = \sum_i \xi_i X^{(0,\mu)}_{i,0} \tag{5}$$

e calcoliamo l'espressione

$$d^r \Lambda + \sum_{\mu=1}^{r} (-1)^{\mu} \binom{r}{\mu} d^{r-\mu} C^{(\mu)} . \tag{6}$$

Il $\Lambda$ equivale al $C^{(0)}$, quindi questa espressione può anche scriversi più brevemente:

$$\sum_{\mu=0}^{r} (-1)^{\mu} \binom{r}{\mu} d^{r-\mu} C^{(\mu)} \tag{7}$$

cioè:

$$\sum_i \sum_{\mu=0}^{r} (-1)^\mu \binom{r}{\mu} \sum_{k=0}^{r-\mu} \binom{r-\mu}{k} d^{r-\mu-k}\, X_{i,0}^{(0,\mu)}\, d^k \xi_i$$

$$= \sum_i \sum_{k=0}^{r} \sum_{\mu=0}^{r-k} (-1)^\mu \binom{r}{\mu} \binom{r-\mu}{k} d^{r-k-\mu}\, X_{i,0}^{(0,\mu)}\, d^k \xi_i \,.$$

Ma

$$\binom{r}{\mu}\binom{r-\mu}{k} = \binom{r}{k}\binom{r-k}{\mu}$$

onde la precedente espressione può scriversi:

$$\sum_i \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} \left[ \sum_{\mu=0}^{r-k} (-1)^\mu \binom{r-k}{\mu} d^{r-k-\mu}\, X_{i,0}^{(0,\mu)} \right] d^k \xi_i$$

e la quantità in parentesi quadra è, per effetto della formola generale (13) della Nota III, eguale semplicemente a

$$X_{i,0}^{(r-k,0)},$$

onde infine si ha:

$$\sum_i \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} X_{i,0}^{(r-k,0)}\, d^k \xi_i \tag{8}$$

di cui la parte da $k = 1$ a $k = r$ equivale alla (3); possiamo perciò scrivere (sostituendo a $X_{i,0}^{(r,0)}$ il proprio valore):

$$\begin{aligned} \Xi X^{(r)} = d^r A + \sum_{\mu=1}^{r} (-1)^\mu \binom{r}{\mu} d^{r-\mu}\, C^{(\mu)} + \\ + \sum_i \xi_i \sum_{m=1}^{r} \sum_{j_1 \cdots j_m} \left[ \frac{\partial X_{j_1 \cdots j_m}}{\partial x_i} - X_{j_1 \cdots j_m i} \right] \delta_{j_1 \cdots j_m}^{(r)} \end{aligned} \tag{9}$$

e l'ultima parte è precisamente della specie dei covarianti $D^{(s)}$ considerati colla formola (18) della Nota precedente. Essa sarebbe propriamente $D^{(r)}$, ma, come abbiamo a suo luogo osservato, l'indice di D per una $X^{(r)}$ fondamentale non può superare $r - 1$; la comparsa di $D^{(r)}$ in (9) dipende dal fatto che nella (9) compare anche la $C^{(r)}$ che neanche ha significato per una $X^{(r)}$, mentre invece la combinazione della $C^{(r)}$ colla $D^{(r)}$, cioè

$$\begin{aligned} - C^{(r)} + D^{(r)} &\quad \text{se } r \text{ è dispari} \\ + C^{(r)} + D^{(r)} &\quad \text{se } r \text{ è pari,} \end{aligned}$$

costituisce in ogni caso la $L^{(r)}$ considerata colla formola (19) della Nota precedente, e che ha significato per una forma fondamentale di ordine $r$, non dipendendo da coefficienti X a *più* che $r$ indici.

Abbiamo dunque la importante formola generale:

$$(10) \qquad \Xi X^{(r)} = d^r A + \sum_{\mu=1}^{r-1} (-1)^{\mu} \binom{r}{\mu} d^{r-\mu} C^{(\mu)} + L^{(r)}$$

che per $r = 2$ diventa la (8) dell'altra mia Nota: *Trasformazioni infinitesime e forme ai differenziali di second'ordine*, pubblicata l'anno scorso in questi medesimi Rendiconti (¹).

2. *Ulteriore riduzione della formola* (10) — Il secondo membro della formola (10) è una forma differenziale di ordine $r$ *del medesimo tipo della forma fondamentale* $X^{(r)}$, *cioè tale che ogni suo termine ha per fattore un* $\delta^{(r)}$. Ciò, se è evidente per la prima e ultima parte, cioè per $d^r A$ e $L^{(r)}$, è tutt'altro che evidente per la parte intermedia, cioè per

$$(11) \qquad \sum_{\mu=1}^{r-1} (-1)^{\mu} \binom{r}{\mu} d^{r-\mu} C^{(\mu)}$$

di cui ogni termine apparisce moltiplicato per il prodotto di due $\delta$, cioè per un $\delta^{(r-\mu)}\,\delta^{(\mu)}$, di cui la somma degli indici superiori è sempre $r$.

Si tratterà dunque di trasformare (11) servendoci delle identità fra le $\delta$ che abbiamo già stabilito nella Nota I, e di altre formole che abbiamo ricercato nella Nota III.

Resterà così dimostrato un teorema che, come è facile comprendere, ha in queste ricerche, una importanza fondamentale, e cioè:

*Il risultato dell'applicazione di una trasformazione infinitesima ad una forma differenziale* $X^{(r)}$, *dà luogo ad una forma differenziale del medesimo ordine e* TIPO *della* $X^{(r)}$ *medesima.*

Una quistione di questo genere non si presentava per le forme di second'ordine, perchè per esse il tipo della $X^{(2)}$ non è un tipo particolare, ma sibbene qualunque forma di second'ordine è una $X^{(2)}$. È per $r > 2$ che la forma che si genera differenziando $r$ volte una funzione, è di tipo speciale, ma però a carattere invariantivo, come abbiamo in altro luogo dimostrato (²).

Esaminando la formola (17) della Nota III, si osserva che le $C^{(\mu)}$ $(\mu = 1, 2, \dots r-1)$ formano una successione perfettamente analoga a

(¹) (5), t. XI, 1902, 2° sem., pp. 167-173.
(²) *Su di un invariante simultaneo*, ecc. Rend. Ist. Lomb. (2), t. 35, 1902.

quella dei covarianti evidenti di $X^{(r)}$, e di cui abbiamo trattato nel paragrafo 1 della Nota precedente. Ora noi abbiamo nel medesimo luogo trovata la formola per il differenziale di ordine qualsiasi di una $X^{(s)}$ (v. formola (5) della Nota III); potremo dunque cominciare ad applicare la predetta formola cambiandovi solo le X nelle C. La (11) diventa:

$$\sum_{\mu=1}^{r-1}\sum_{q=0}^{r-\mu}(-1)^{\mu}\binom{r}{\mu}\binom{r-\mu}{q}C^{(r-q,q)} \tag{12}$$

dove con $C^{(r-q,q)}$ si intende una espressione formata mediante i coefficienti

$$C_{j_1\cdots j_m}=\sum_i \xi_i\,((i\,,j_1\ldots j_m))_X \tag{13}$$

nello stesso modo che la $X^{(r-q,q)}$ è formata mediante i coefficienti $X_{j_1\cdots j_m}$ (v. Nota III).

Staccando la parte per $q=0$, ponendo

$$\sum_{\mu=1}^{r-1}\sum_{q=1}^{r-\mu}=\sum_{q=1}^{r-1}\sum_{\mu=1}^{r-q}$$

e

$$\binom{r}{\mu}\binom{r-\mu}{q}=\binom{r}{q}\binom{r-q}{\mu}$$

la (12) può scriversi:

$$\sum_{\mu=1}^{r-1}(-1)^{\mu}\binom{r}{\mu}C^{(r)}+\sum_{q=1}^{r-1}\left[\sum_{\mu=1}^{r-q}(-1)^{\mu}\binom{r-q}{\mu}\right]\binom{r}{q}C^{(r-q,q)}$$

ed essendo

$$\sum_{\mu=1}^{r-1}(-1)^{\mu}\binom{r}{\mu}=\quad 0 \qquad \text{se } r \text{ è dispari}$$

$$=-2 \qquad \text{se } r \text{ è pari}$$

e

$$\sum_{\mu=1}^{r-q}(-1)^{\mu}\binom{r-q}{\mu}=-1$$

si ha che la (11) può scriversi:

$$-\sum_{q=1}^{r-1}\binom{r}{q}C^{(r-q,q)} \qquad \text{se } r \text{ è dispari} \tag{14}$$

$$-2C^{(r)}-\sum_{q=1}^{r-1}\binom{r}{q}C^{(r-q,q)} \qquad \text{se } r \text{ è pari}. \tag{15}$$

È da notare che in queste espressioni pare che compaiano i coefficienti C a $r$ indici inferiori, e per le (13) tali C porterebbero con sè le X a $r+1$ indici inferiori, le quali non esistono per una $X^{(r)}$ fondamentale; ma si può verificare che i suddetti coefficienti C compaiono in (14) (15) solo *apparentemente*. Per la simmetria delle formole a noi però conviene conservarli.

Ponendo $r-q=p$, e sostituendo a $C^{(r-q,q)}$ il suo valore dato dalla formola (4) della Nota III, la (14) può scriversi:

$$-\sum_{p=1}^{r-1}\binom{r}{p}\sum_{m=1}^{p}\sum_{\rho=m+1}^{r+m-p}\sum_{j}\sum_{i}((j_1\dots j_m\,,\,i_1\dots i_{\rho-m}))_C\,\delta^{(p)}_{j_1\dots j_m}\,\delta^{(r-p)}_{i_1\dots i_{\rho-m}}$$

dove è da notare che i simboli a doppia parentesi sono costruiti prendendo naturalmente a fondamento le C e non le X, donde la ragione del C segnato come indice in basso.

Essendo ora identicamente:

$$\sum_{p=1}^{r-1}\sum_{m=1}^{p}\sum_{\rho=m+1}^{r+m-p}=\sum_{\rho=2}^{r}\sum_{m=1}^{\rho-1}\sum_{p=m}^{r+m-\rho}$$

la precedente espressione possiamo trasformarla in:

$$-\sum_{\rho=2}^{r}\sum_{m=1}^{\rho-1}\sum_{j}\sum_{i}((j_1\dots j_m\,,\,i_1\dots i_{\rho-m}))_C\sum_{p=m}^{r+m-\rho}\binom{r}{p}\delta^{(p)}_{j_1\dots j_m}\,\delta^{(r-p)}_{i_1\dots i_{\rho-m}}$$

e, tenendo conto della relazione fra le $\delta$ rappresentata dalla formola (20) della Nota I, possiamo infine scriverla (mutando anche $i_1\dots i_{\rho-m}$ in $j_{m+1}\dots j_\rho$):

$$-\sum_{\rho=2}^{r}\sum_{j}\sum_{m=1}^{\rho-1}\binom{\rho}{m}((j_1\dots j_m\,,\,j_{m+1}\dots j_\rho))_C\,\delta^{(r)}_{j_1\dots j_\rho} \tag{16}$$

colla qual formola, essendosi ottenuto che ogni termine di (12) viene ad avere per fattore un $\delta^{(r)}$, resta pertanto dimostrato il teorema enunciato in principio di questo paragrafo.

È utile osservare che la dimostrazione che (11) è del tipo della $X^{(r)}$ non dipende affatto dai valori delle C, ma basta che le C formino una successione analoga a quella dei covarianti evidenti, cioè che i coefficienti ad egual numero di indici in una $C^{(\mu)}$ sieno eguali rispettivamente a quelli di ogni altra. Chiameremo *canonica* una siffatta successione. Resta così provato anche questo fatto importante che: *ogni espressione del tipo*

$$\sum_{\mu=1}^{r-1}(-1)^{\mu}\binom{r}{\mu}d^{r-\mu}\,V^{(\mu)}$$

*dove le* $V^{(\mu)}$ *formino una successione canonica, è una forma differenziale del tipo delle* $X^{(r)}$, *cioè del medesimo tipo da noi considerato sempre in queste ricerche.*

La (16) può scriversi diversamente: fissato un sistema di indici $j_1 \dots j_\rho$, con essi possono costruirsi $\binom{\rho}{m}$ simboli $((j_1 \dots j_m, j_{m+1} \dots j_\rho))$ *diversi*, di cui il gruppo dei primi indici sia formato di $m$ indici e il gruppo dei secondi sia costituito dei rimanenti $\rho - m$, ricordando che quei simboli sono indipendenti dall'ordine degli indici di ciascuno dei due gruppi. Osservando che in (16) ciascuno degli indici $j$ deve avere tutti i valori da 1 ad $n$ (numero delle variabili $x$) e che quindi nel sommatorio sono compresi tutti quei $\binom{\rho}{m}$ simboli costruiti nel modo suindicato con $j_1 \dots j_\rho$, possiamo, senza alterare il sommatorio, sostituire a ciascun simbolo la somma di tutti i $\binom{\rho}{m}$ suddetti, e indi dividere per $\binom{\rho}{m}$. Così operando per ogni valore di $m$, si riconosce che, ponendo per brevità:

$$
\begin{aligned}
(17) \qquad [[j_1 \dots j_\rho]]_c = & ((j_1, j_2 \dots j_\rho))_c + (j_2, j_1 j_3 \dots j_\rho))_c + \cdots \\
& + ((j_1 j_2, j_3 \dots j_\rho))_c + ((j_1 j_3, j_2 j_4 \dots j_\rho))_c + \cdots \\
& + \quad . \quad . \quad . \quad . \\
& + ((j_1 \dots j_{\rho-1}, j_\rho))_c + ((j_1 \dots j_{\rho-2} j_\rho, j_{\rho-1}))_c + \cdots
\end{aligned}
$$

di cui è ben evidente la legge di formazione di ciascuna riga, e quella con cui si succedono le varie righe, la (16) può scriversi semplicemente:

$$
(18) \qquad -\sum_{\rho=2}^{r} \sum_j [[j_1 \dots j_\rho]]_c \, \delta^{(r)}_{j_1 \dots j_\rho}
$$

e questo è il valore della (11) per $r$ dispari, mentre per $r$ pari bisogna ancora aggiungere $-2\,C^{(r)}$. Possiamo verificare che, come abbiamo detto, le C con $r$ indici inferiori sono comprese solo in apparenza. Giacchè esse intanto non si presentano che nella parte per cui è $\rho = r$, cioè in

$$
(19) \qquad [[j_1 \dots j_r]]_c .
$$

Tenendo presente la formazione di (17) e quella dei simboli secondarii (v. Nota II) si riconosce che in (19) comparisce $C_{j_1 \dots j_r}$ col coefficiente numerico

$$
(-1)^{r-1}\left[\binom{r}{1} - \binom{r}{2} + \binom{r}{3} - \cdots + (-1)^{r-1}\binom{r}{r-1}\right]
$$

cioè $-2$ se $r$ è pari, e $0$ se $r$ è dispari; quindi se $r$ è dispari quel $C_{j_1 \ldots j_r}$ non comparisce in (18) e quindi in (14); e se $r$ è pari vi comparisce col coefficiente numerico $+2$ in (18), e quindi col coefficiente *zero* in (15).

3. *Relazioni cui soddisfa il nuovo simbolo* (17). — *Il simbolo* (17) *soddisfa alla relazione*:

$$(20) \qquad \frac{\partial}{\partial x_j}[[j_1 \ldots j_\rho]] - [[j_1 \ldots j_\rho j]] + ((j_1 \ldots j_\rho j)) + ((j, j_1 \ldots j_\rho)) = 0 \,.$$

Infatti ci è già nota la relazione (v. la formola (2) della Nota II)

$$\frac{\partial}{\partial x_j}((j_1 \ldots j_\nu, j_{\nu+1} \ldots j_\rho)) - ((j\, j_1 \ldots j_\nu, j_{\nu+1} \ldots j_\rho)) - \\ - ((j_1 \ldots j_\nu, j_{\nu+1} \ldots j_\rho j)) = 0 \,.$$

Mediante questa formola si vede che ognuno dei $2^\rho - 2$ termini di cui risulta $\frac{\partial}{\partial x_j}[[j_1 \ldots j_\rho]]$ si distrugge con due di quelli di $[[j_1 \ldots j_\rho j]]$ i quali sono in numero di $2^{\rho+1} - 2$, e restano solo

$$(2^{\rho+1} - 2) - 2(2^\rho - 2) = 2$$

termini, i quali sono quei soli due simboli a parentesi doppia rotonda contenuti in $[[j_1 \ldots j_\rho j]]$ nei quali l'indice $j$ forma gruppo a sè, e propriamente forma o il primo gruppo o il secondo gruppo degli indici. Tali due termini si distruggono coi due ultimi della formola (20), la quale resta così dimostrata.

Un'altra proprietà importante, estensione di quella data dalla formola (20), e di cui anche dovremo servirci in seguito è la seguente:

Poniamo per brevità:

$$V_{j_1 \ldots j_\rho} \equiv [[j_1 \ldots j_\rho]]_z \quad , \quad V_j = 0$$

dove le Z sieno i coefficienti di una forma qualunque $Z^{(r)}$, e coi coefficienti V formiamo i simboli secondarii e principali.

Dico che *si ha in generale*:

$$(20') \qquad ((j_1 \ldots j_m, i_1 \ldots i_\nu))_V = -((j_1 \ldots j_m, i_1 \ldots i_\nu))_z - (i_1 \ldots i_\nu, j_1 \ldots j_m))_z$$

Questa formola si riduce alla (20) per $\nu = 1$; basterà far vedere che verificandosi per $\nu$ si verifica per $\nu + 1$. Ora si ha (vedi Nota II):

$$((j_1 \ldots j_m, i_1 \ldots i_\nu i))_V = \frac{\partial}{\partial x_i}((j_1 \ldots j_m, i_1 \ldots i_\nu))_V - ((j_1 \ldots j_m i, i_1 \ldots i_\nu))_V$$

onde, sostituendo a ciascuno dei termini del secondo membro il suo valore dato dalla (20') che si suppone sussistente quando gli indici del secondo gruppo del simbolo (( )) sono in numero di $\nu$, e riapplicando poi due volte la stessa precedente identità ma per le Z anzichè per le V, si giunge alla (20′) ma per l'indice $\nu+1$ e non $\nu$. Resta così dimostrata la (20′).

Da questa si ricavano poi le altre:

$$((j_1 \dots j_m\,, i_1 \dots i_\nu))_V = ((i_1 \dots i_\nu\,, j_1 \dots j_m))_V \tag{20''}$$

e quindi per $\nu = 1$ e passando ai simboli principali di prima e di seconda specie:

$$(20''') \quad \begin{cases} (j_1 \dots j_m\, i)_V = -2\,(j_1 \dots j_m\, i)_Z & \text{per } m \text{ pari} \\ \qquad\qquad\quad = 0 & \text{per } m \text{ dispari} \\ \}j_1 \dots j_m\, i\{_V = -2\,\}j_1 \dots j_m\, i\{_Z & \text{per } m \text{ dispari} \\ \qquad\qquad\quad = 0 & \text{per } m \text{ pari.} \end{cases}$$

Ciò posto, si può stabilire una formola semplice per il differenziale di (18). Si ha:

$$d\sum_{\rho=2}^{r}\sum_j [[j_1 \dots j_\rho]]\,\delta^{(r)}_{j_1 \dots j_\rho} = \sum_{\rho=2}^{r}\sum_j \frac{\partial [[j_1 \dots j_\rho]]}{\partial x_j}\,dx_j\,\delta^{(r)}_{j_1 \dots j_\rho} +$$
$$+ \sum_{\rho=2}^{r}\sum_j [[j_1 \dots j_\rho]]\,d\delta^{(r)}_{j_1 \dots j_\rho}$$

e adoperando la (20) e indi la formola (16) della Nota I, che dà il differenziale di $\delta$, e osservando che, al solito, $\sum_j \frac{1}{\varrho} S_{j\rho} = \sum_j$, si ha:

$$\sum_{\rho=2}^{r}\sum_j [[j_1 \dots j_\rho\, j]]\,dx_j\,\delta^{(r)}_{j_1 \dots j_\rho} -$$
$$- \sum_{\rho=2}^{r}\sum_j [((j_1 \dots j_\rho\,, j)) + ((j\,, j_1 \dots j_\rho))]\,dx_j\,\delta^{(r)}_{j_1 \dots j_\rho} +$$
$$+ \sum_{\rho=2}^{r}\sum_j [[j_1 \dots j_\rho]]\left\{\delta^{(r+1)}_{j_1 \dots j_\rho} - dx_{j_\rho}\,\delta^{(r)}_{j_1 \dots j_{\rho-1}}\right\}$$

e se nell'ultimo termine mutiamo $\varrho$ in $\varrho+1$, indi poniamo $j$ in luogo di $j_{\rho+1}$, riduciamo e raccogliamo in modo conveniente, abbiamo infine:

$$d\sum_{\rho=2}^{r}\sum_j [[j_1 \dots j_\rho]]\,\delta^{(r)}_{j_1 \dots j_\rho} = \sum_{\rho=2}^{r+1}\sum_j [[j_1 \dots j_\rho]]\,\delta^{(r+1)}_{j_1 \dots j_\rho} - \tag{21}$$
$$- \sum_{\rho=1}^{r}\sum_j \}((j_1 \dots j_\rho\,, j)) + ((j\,, j_1 \dots j_\rho))\{\,dx_j\,\delta^{(r)}_{j_1 \dots j_\rho}$$

formola di cui dovremo servirci in seguito.

4. *Trasformazioni infinitesime che lasciano invariata la equazione* $X^{(r)} = 0$, *ovvero la forma* $X^{(r)}$.

Diremo al solito che la equazione $X^{(r)} = 0$ *ammette* la trasformazione infinitesima $\Xi$, ovvero che questa *lascia invariata* la $X^{(r)} = 0$, quando si ha:

$$\Xi X^{(r)} = \mu X^{(r)}. \tag{22}$$

Se $\mu = 0$ si dirà che la $\Xi$ lascia invariata la *forma* $X^{(r)}$ (¹).

Mediante le formole (10) (14) (15) (18), la (22) diventa:

$$L^{(r)} = \mu X^{(r)} - d^r A + \sum_{\rho=2}^{r} \sum_j [[j_1 .. j_\rho]]_c \, \delta^{(r)}_{j_1 ... j_\rho} + 2\varepsilon C^{(r)} \tag{23}$$

dove $\varepsilon = 0$ *se* $r$ *è dispari*, ed è eguale ad 1 se invece $r$ *è pari*.

Paragonando i coefficienti delle medesime $\delta$, si hanno le equazioni:

$$\tag{24} \left\{ \begin{aligned} &\sum_i (j_1 ... j_r\, i)\, \xi_i = \mu X_{j_1 ... j_r} - \frac{\partial^r A}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_r}} + [[j_1 ... j_r]]_c + 2 C_{j_1 ... j_r} \\ &\sum_i \}j_1 ... j_{r-1}\, i\{\, \xi_i = \mu X_{j_1 ... j_{r-1}} - \frac{\partial^{r-1} A}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_{r-1}}} + [[j_1 ... j_{r-1}]]_c + 2 C_{j_1 ... j_{r-1}} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\sum_i (j_1 j_2\, i)\, \xi_i = \mu X_{j_1 j_2} - \frac{\partial^2 A}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2}} + [[j_1 j_2]]_c + 2 C_{j_1 j_2} \\ &\sum_i \}j_1\, i\{\, \xi_i = \mu X_{j_1} - \frac{\partial A}{\partial x_{j_1}} + 2 C_{j_1} \end{aligned} \right.$$

*per* $r$ *pari*, e

$$\tag{25} \left\{ \begin{aligned} &\sum_i (j_1 ... j_r\, i)\, \xi_i = \mu X_{j_1 ... j_r} - \frac{\partial^r A}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_r}} + [[j_1 ... j_r]]_c \\ &\sum_i \}j_1 ... j_{r-1}\, i\{\, \xi_i = \mu X_{j_1 ... j_{r-1}} - \frac{\partial^{r-1} A}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_{r-1}}} + [[j_1 ... j_{r-1}]]_c \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\sum_i \}j_1 j_2\, i\{\, \xi_i = \mu X_{j_1 j_2} - \frac{\partial^2 A}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2}} + [[j_1 j_2]]_c \\ &\sum_i (j_1\, i)\, \xi_i = \mu X_{j_1} - \frac{\partial A}{\partial x_{j_1}} \end{aligned} \right.$$

(¹) Nella Nota: *Trasf. infinit.* ecc. pubblicata nel 1902 in questi Rendiconti, non ho fatta la distinzione dei due casi nello stabilire queste definizioni per $r = 2$.

*per r dispari.* La legge con cui, in ambo i casi, si succedono i primi membri delle varie equazioni è evidente: si alternano i *simboli principali* di prima e di seconda specie, a cominciare da quelli di prima specie. Inoltre queste equazioni devono sussistere per *qualunque* sistema di indici $j_1 j_2 j_3 \ldots$.

A queste equazioni bisogna poi aggregare le altre:

$$\sum_i X_i \xi_i = \mathit{\Delta} \tag{26}$$

$$\sum_i ((i, j_1 \ldots j_\rho)) \xi_i = C_{j_1 \cdots j_\rho} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots r-1) \tag{27}$$

alle quali ultime se ne possono sostituire delle altre.

Basta perciò ricordare che (v. formole (5) (6) della Nota II)

$$\left\{\begin{array}{ll} \} j_1 \ldots j_\rho\, i \{ - 2((i, j_1 \ldots j_\rho)) = (j_1 \ldots j_\rho\, i) & \text{se } \rho \text{ è dispari} \\ (j_1 \ldots j_\rho\, i) - 2((i, j_1 \ldots j_\rho)) = \} j_1 \ldots j_\rho\, i \{ & \text{se } \rho \text{ è pari} \end{array}\right. \tag{28}$$

e perciò sottraendo da ciascuna delle (24), a cominciare dalla seconda, la corrispondente (27) moltiplicata per 2, si ha il sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} \sum_i (j_1 \ldots j_{r-1}\, i) \xi_i = \mu X_{j_1 \cdots j_{r-1}} - \dfrac{\partial^{r-1} \mathit{\Delta}}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_{r-1}}} + [[j_1 \ldots j_{r-1}]]_c \\ \sum_i \} j_1 \ldots j_{r-2}\, i \{ \xi_i = \mu X_{j_1 \cdots j_{r-2}} - \dfrac{\partial^{r-2} \mathit{\Delta}}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_{r-2}}} + [[j_1 \ldots j_{r-2}]]_c \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_i (j_1\, i) \xi_i = \mu X_{j_1} - \dfrac{\partial \mathit{\Delta}}{\partial x_{j_1}} \end{array}\right. \tag{29}$$

che insieme a (26) e (24) costituiscono *il sistema completo delle equazioni lineari cui devono soddisfare le* $\xi$ *per il caso di r pari.*

Adoperando poi le medesime (28) in cui si sia trasportato il termine negativo al secondo membro, e sommando alle (25), a cominciare dalla seconda, le (27) moltiplicate per 2, si ha l'altro sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} \sum_i (j_1 \ldots j_{r-1}\, i) \xi_i = \mu X_{j_1 \cdots j_{r-1}} - \dfrac{\partial^{r-1} \mathit{\Delta}}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_{r-1}}} + [[j_1 \ldots j_{r-1}]]_c + 2 C_{j_1 \cdots j_{r-1}} \\ \sum_i \} j_1 \ldots j_{r-2}\, i \{ \xi_i = \mu X_{j_1 \cdots j_{r-2}} - \dfrac{\partial^{r-2} \mathit{\Delta}}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_{r-2}}} + [[j_1 \ldots j_{r-2}]]_c + 2 C_{j_1 \cdots j_{r-2}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_i \} j_1\, i \{ \xi_i = \mu X_{j_1} - \dfrac{\partial \mathit{\Delta}}{\partial x_{j_1}} \qquad\qquad + 2 C_{j_1} \end{array}\right. \tag{30}$$

che con (26) e (25) costituisce *il sistema completo di equazioni pel caso di $r$ dispari.*

Considerando come incognite in ciascuno di questi due sistemi le $\xi$ e $\mu$, la matrice dei coefficienti è la:

$$
(31)\qquad \left\| \begin{matrix}
0 & \mathrm{X}_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mathrm{X}_n \\
\mathrm{X}_{j_1 \cdots j_\rho} & (j_1 \dots j_\rho\, 1) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & (j_1 \dots j_\rho\, n) \\
\mathrm{X}_{j_1 \cdots j_\rho} & \}j_1 \dots j_\rho\, 1\{ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \}j_1 \dots j_\rho\, n\{ \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\mathrm{X}_{j_1 \cdots j_r} & (j_1 \dots j_r\, 1) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & (j_1 \dots j_r\, n)
\end{matrix} \right\|
\quad \begin{cases} \varrho = 1, 2, \dots r-1 \\ j_1 \dots j_\rho = 1, 2, \dots n \end{cases}
$$

*la quale è precisamente una di quelle aventi caratteristica invariante*, come ha recentemente dimostrato il dott. Sinigallia ([1]), estendendo i metodi che io aveva già adoperato per il second'ordine, e valendosi delle formole di trasformazione dei simboli da me trovate nella Nota II.

Immaginiamo ora moltiplicate le singole linee della matrice (31) per $\zeta_0, \zeta_{j_1 \cdots j_\rho}, \zeta^{(1)}_{j_1 \dots j_\rho}, \zeta_{j_1 \cdots j_r}$ (intendendo che le $\zeta$ non mutino scambiando fra loro gli indici) sommiamo per colonne, formiamo le $n+1$ equazioni lineari:

$$
(32)\qquad \sum_{\rho=1}^{r} \sum_{j_1 \dots j_\rho} \mathrm{X}_{j_1 \cdots j_\rho} \zeta_{j_1 \cdots j_\rho} + \sum_{\rho=1}^{r-1} \sum_{j_1 \dots j_\rho} \mathrm{X}_{j_1 \cdots j_\rho} \zeta^{(1)}_{j_1 \dots j_\rho} = 0
$$

$$
(33)\qquad \mathrm{X}_i \zeta_0 + \sum_{\rho=1}^{r} \sum_{j_1 \dots j_\rho} (j_1 \dots j^\rho\, i)\, \zeta_{j_1 \cdots j^\rho} + \sum_{\rho=1}^{r-1} \sum_{j_1 \dots j_\rho} \}j_1 \dots j^\rho\, i\{\, \zeta^{(1)}_{j_1 \dots j_\rho} = 0
$$

$$
(i = 1, 2, \dots n)
$$

e sia $\zeta_0 \zeta_{j_1 \cdots j^\rho} \dots$ una soluzione di questo sistema.

Moltiplicando le equazioni (26), (24), (29), ovvero (26), (25), (30), ordinatamente e in modo facile a comprendersi, per queste $\zeta$, sommando e tenendo conto delle (32) (33), restano eliminate le incognite $\xi$ e $\mu$, e si hanno delle condizioni cui devono soddisfare l'invariante $\mathcal{A}$ e i coefficienti dei covarianti C perchè esista una trasformazione infinitesima che lasci invariata la equazione data. Si ha, comprendendo in una formola unica i due casi di $r$

([1]) Rend. Ist. Lomb. (2), t. 36, 1903, pag. 650.

pari e $r$ dispari:

$$(34)\qquad 0=\zeta_0\, A-\sum_{\rho=1}^{r-1}\sum_{j_1\cdots j_\rho}\left(\zeta_{j_1\cdots j_\rho}+\zeta^{(1)}_{j_1\cdots j_\rho}\right)\frac{\partial^\rho A}{\partial x_{j_1}\cdots\partial x_{j_\rho}}-$$

$$-\sum_{j_1\cdots j_r}\zeta_{j_1\cdots j_r}\frac{\partial^r A}{\partial x_{j_1}\cdots\partial x_{j_r}}+\sum_{\rho=2}^{r-1}\sum_{j_1\cdots j_\rho}\left(\zeta_{j_1\cdots j_\rho}+\zeta^{(1)}_{j_1\cdots j_\rho}\right)[[j_1\cdots j_\rho]]_c+$$

$$+\sum_{j_1\cdots j_r}\zeta_{j_1\cdots j_r}[[j_1\cdots j_r]]_c+$$

$$+\left\{\begin{matrix} 2\sum\limits_{\rho=1}^{\frac{r}{2}} \\ \\ 2\sum\limits_{\rho=1}^{\frac{r-1}{2}}\end{matrix}\right.\left(\sum_{j_1\cdots j_{2\rho}}\zeta_{j_1\cdots j_{2\rho}}\,C_{j_1\cdots j_{2\rho}}+\sum_{j_1\cdots j_{2\rho-1}}\zeta^{(1)}_{j_1\cdots j_{2\rho-1}}\,C_{j_1\cdots j_{2\rho-1}}\right)\left.\begin{matrix}\text{per } r \text{ pari}\\ \\ \text{per } r \text{ dispari}\end{matrix}\right.$$

Variando le $\zeta$ in tutti i possibili modi, soddisfacenti però sempre alle (32) (33) si ha un sistema di equazioni a derivate parziali cui devono soddisfare $A$ e le C. D'altra parte se le (34) sono sempre soddisfatte per tutti i sistemi $\zeta$ che soddisfanno alle (32) (33), i coefficienti di (34) saranno le medesime combinazioni lineari di quelli di egual posto in (32) (33), e quindi ampliando la matrice (31) con un'ultima colonna formata coi termini indipendenti da $\xi$ e $\mu$ nel sistema delle equazioni (26) (24) (29) (termini che sono precisamente i coefficienti di (34)), gli elementi di tale ultima colonna sono le medesime combinazioni lineari di quelli delle altre colonne, donde risulta che la matrice (31) *così ampliata* ha la stessa caratteristica della (31), il che, come è noto, basta per concludere che le equazioni (26) (24) (29) ammettono almeno una soluzione comune. Dunque:

*Condizione necessaria e sufficiente perchè una trasformazione infinitesima $\Xi$ lasci invariata la equazione $X^{(r)}=0$ è che l'invariante $A$ e i coefficienti dei covarianti simultanei C di $X^{(r)}$ e $\Xi$ soddisfacciano al sistema* (34) *di equazioni a derivate parziali.*

Se invece della *equazione* $X^{(r)}=0$ si vuol considerare la *forma* $X^{(r)}$, bisogna porre $\mu=0$, quindi la matrice (31) risulta priva della prima colonna, la equazione (32) scomparisce, e *le* (34) *devono verificarsi per tutti i sistemi $\zeta$ soddisfacenti alle sole equazioni* (33).

Nella prossima Nota studieremo i casi notevoli in cui per la $\Xi$ debbono essere zero l'invariante $A$ o i covarianti C.