ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCC.

1903

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1903

Matematica. — *Il secondo problema di riduzione per le forme differenziali di ordine dispari, e ricerche complementari.* Nota VIII del Corrispondente ERNESTO PASCAL [1].

1. *Soluzione del problema II col metodo delle trasformazioni infinitesime nel caso di r dispari.* — Cominciamo, come nel paragrafo 4 della precedente Nota [2], col formare una trasformazione finita, prendendo a base, nel solito modo, una trasformazione infinitesima Ξ *per la quale sia zero il covariante* $L^{(r)}$.

Dico che se r è dispari, la trasformazione finita così ottenuta riduce $X^{(r)}$ *a*

$$(1) \qquad Y^{(r)} \equiv T^{(r)} + \tfrac{1}{2} \sum_{\rho=1}^{r-1} (-1)^{\rho} \binom{r}{\rho} d^{r-\rho} Z^{(\rho)} -$$

$$- \tfrac{1}{2}\, d \sum_{\rho=1}^{r-2} (-1)^{\rho} \binom{r-1}{\rho} d^{r-1-\rho} Z^{(\rho)}$$

dove $T^{(r)}$ *non contiene* y_n, *e l'altra parte è, come si vede, un differenziale canonico di ordine dispari. E viceversa, se la* $X^{(r)}$ *è riducibile al tipo* (1), *esiste una trasformazione infinitesima* Ξ *per cui è zero il covariante* $L^{(r)}$.

Quindi, come per r pari, anche per r dispari:

Il problema II è risolubile semprechè, e solo allora, che la matrice

$$(2) \qquad (M')_r + \}M'\{_{r-1} + \cdots + (M')_1$$

abbia caratteristica ν *minore di* n.

E ragionando poi come alla fine del paragrafo 4 della Nota precedente, abbiamo anche qui:

Se la caratteristica di (2) *è* ν, *la forma* $X^{(r)}$ *può sempre trasformarsi nella somma di una forma con sole* ν *variabili e di* $n-\nu$ *differenziali canonici rispettivamente a* $n, n-1, n-2, \ldots \nu+1$ *variabili.*

Essendo $L^{(r)} = 0$, trasformando la Ξ nella

$$Y = \eta_n \frac{\partial}{\partial y_n}$$

[1] Presentata nella seduta dell'8 novembre 1903.

[2] Questi Rendiconti, (5), t. XII, 1903, 2° sem., pp. 326-336.

si ha, come nel citato paragrafo 4 della Nota precedente, che devono sussistere le

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} (j_1 \dots j_r\, n)_\tau = 0 \\ \}j_1 \dots j_{r-1}\, n\{_\tau = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \}j\, n\{_\tau = 0 \end{array}\right.$$

Poniamo ora

$$(4)\qquad Y_n = Z_n = \frac{\partial f}{\partial y_n}.$$

Dall'ultima delle (3) si ha

$$\frac{\partial Y_i}{\partial y_n} = \frac{\partial^2 f}{\partial y_i\, \partial y_n}$$

donde

$$(5)\qquad Y_i = T_i + \frac{\partial f}{\partial y_i}$$

in cui T_i non contiene la variabile y_n.

Porremo

$$(6)\qquad Z_i = \frac{\partial f}{\partial y_i}$$

e allora

$$(7)\qquad Y_i = T_i + Z_i$$

e osserviamo che le Z definite dalle (6) soddisfanno a

$$(8)\qquad (i\, j)_z = 0\,.$$

Poniamo ora

$$(9)\qquad Y_{ij} = T_{ij} + Z_{ij}$$

essendo le T delle funzioni indipendenti da y_n, ed essendo zero quelle fra esse di cui uno degli indici sia n; allora da $\}i\, j\, n\{_\tau = 0$ deduciamo:

$$(10)\qquad Y_{ijn} = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{\partial Z_{ij}}{\partial y_n} + \frac{\partial Z_{in}}{\partial y_j} + \frac{\partial Z_{jn}}{\partial y_i} - \frac{\partial^3 f}{\partial y_i\, \partial y_j\, \partial y_n}\right\} = Z_{ijn}$$

che noi porremo eguale a Z_{ijn}, mentre da $(i\, j\, h\, n)_\tau = 0$, ricordando la formola (18) della Nota VI, cioè nel nostro caso

$$(i\, j\, h\, n)_\tau = -\tfrac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial y_n}\,\}i\, j\, h\{_\tau$$

valevole quando sono soddisfatte le (3) e la (8), si deduce

$$\frac{\partial}{\partial y_n}\,\}i\, j\, h\{_\tau = 0\,.$$

Di qui si ha che $\}i\,j\,h\{_T$ è eguale ad una quantità indipendente da y_n, e quindi si deduce per Y_{ijh} una formola come la (10), *più* una parte indipendente da y_n.

Poniamo

$$(11) \qquad Z_{ijh} = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{\partial Z_{ij}}{\partial y_h} + \frac{\partial Z_{ih}}{\partial y_j} + \frac{\partial Z_{jh}}{\partial y_i} - \frac{\partial^3 f}{\partial y_i\,\partial y_j\,\partial y_h}\right\}$$

che soddisfa a $\}i\,j\,h\{_Z = 0$, e quindi anche a $(i\,j\,h\,k)_Z = 0$, e poniamo inoltre:

$$(12) \qquad Y_{ijh} = T_{ijh} + Z_{ijh}$$

dove T non contenga al solito y_n, e sieno zero le T in cui uno degli indici sia n.

Così seguitando si vede che possiamo procedere come nel paragrafo 4 della Nota precedente, servirci delle considerazioni analoghe a quelle ivi svolte e dei lemmi stabiliti nel paragrafo 2 della Nota VI, e giungere infine al risultato che: *si può porre*

$$Y_{j_1\cdots j_\rho} = T_{j_1\cdots j_\rho} + Z_{j_1\cdots j_\rho}$$

dove le T *non contengano* y_n, *sieno zero quelle in cui uno degli indici sia* n, *e le* Z *soddisfacciano alle*

$$(13) \quad (j_1\,j_2)_Z = 0\,,\ \}j_1\,j_2\,j_3\{_Z = 0\,,\ (j_1\,j_2\,j_3\,j_4)_Z = 0\,,\ \ldots\,(j_1\cdots j_{r+1})_Z = 0.$$

Mentre nel caso di r pari coi valori delle Z a un numero *dispari* di indici ricaviamo quelli delle altre, qui invece, nel caso di r dispari, è dai valori delle Z ad un numero *pari* di indici che ricaviamo quelli delle altre.

Pei risultati del paragrafo 1 della Nota precedente si ha quindi

$$Z^{(r)} = \tfrac{1}{2}\sum_{\rho=1}^{r-1}(-1)^\rho\binom{r}{\rho}d^{r-\rho}Z^{(\rho)} - \tfrac{1}{2}\,d\sum_{\rho=1}^{r-2}(-1)^\rho\binom{r-1}{\rho}d^{r-1-\rho}Z(^\rho)$$

e con ciò resta provato l'assunto.

In quanto poi al teorema reciproco, esso si dimostra seguendo le stesse considerazioni già svolte alla fine della Nota precedente, e che perciò non ripeteremo.

2. *Caso in cui il differenziale canonico sia un differenziale* r^{mo}. — Abbiamo già detto nell'introduzione alla Nota VI, che quando $Z^{(r-1)}$ diventa un differenziale $(r-1)^{mo}$ di una funzione f, i differenziali canonici sia per r pari che per r dispari, diventano il differenziale r^{mo} di f.

Supponiamo più generalmente che $Z^{(s)}$ sia il differenziale s^{mo} di f, ma che lo stesso non si verifichi per le Z a indice superiore. Allora la $Y^{(r)}$ nel

caso di r pari diventa

$$(14) \qquad Y^{(r)} \equiv T^{(r)} - \tfrac{1}{2}\left[\sum_{\rho=1}^{s}(-1)^{\rho}\binom{r}{\varrho}\right] d^r f -$$

$$- \tfrac{1}{2}\sum_{\rho=s+1}^{r-1}(-1)^{\rho}\binom{r}{\varrho} d^{r-\rho} Z^{(\rho)}$$

mentre nel caso di r dispari essa diventa

$$(15) \qquad Y^{(r)} \equiv T^{(r)} + \tfrac{1}{2}\left[\sum_{\rho=1}^{s}(-1)^{\rho}\binom{r-1}{\varrho-1}\right] d^r f +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\sum_{\rho=s+1}^{r-1}(-1)^{\rho}\binom{r}{\varrho} d^{r-\rho} Z^{(\rho)} - \tfrac{1}{2}\, d \sum_{\rho=s+1}^{r-2}(-1)^{\rho}\binom{r-1}{\varrho} d^{r-1-\rho} Z^{(\rho)}.$$

Esaminiamo ora quali sono le condizioni perchè $Z^{(s)}$ sia un differenziale s^{mo}, senza che $Z^{(s+1)}$ sia un differenziale $(s+1)^{mo}$.

Prima di tutto si può riconoscere che *per r pari, il numero s non può essere che pari*; giacchè se è dispari, si fa vedere che anche $Z^{(s+1)}$ è differenziale $(s+1)^{mo}$. Infatti se r è pari ed s dispari sappiamo che è

$$(16) \qquad \}j_1 \dots j_{s+1}\{_z = 0 .$$

Ora se poniamo in questo simbolo, ogni $Z_{ij}\dots$ fino a quelle ad s indici eguali alle derivate di $1°, 2°, \dots s^{mo}$ ordine di una f, otteniamo dalla precedente relazione che anche $Z_{j_1 \dots j_{s+1}}$ è eguale a

$$\frac{\partial^{s+1} f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_{s+1}}} .$$

Similmente *per r dispari, il numero s non può essere che dispari*, e ciò si dimostra nello stesso modo, solo osservando che per r dispari ed s pari sussiste anche la (16).

Ora dico che *condizione necessaria e sufficiente perchè $Z^{(s)}$ risulti un differenziale s^{mo}, è che la trasformazione infinitesima Ξ da cui si è preso le mosse, abbia zero il covariante $C^{(s-1)}$, e quindi anche tutti i $C^{(s-2)}$, $C^{(s-3)}, \dots C^{(1)}$.*

In effetti, trasformate le variabili x nelle y, e la Ξ in Y, una $C^{(\rho)}$ diventa

$$(17) \qquad C^{(\rho)} = \eta_n \sum_{m=1}^{\rho} \sum_{j} ((n, j_1 \dots j_m))_T\, \delta^{(\rho)}_{j_1 \dots j_m} .$$

Ora se le $Z_{j_1 \dots j_m}$ $(m = 1, 2, \dots s)$ sono le derivate sino a quelle di ordine s di f, i simboli

$$((i, j_1 \dots j_m))_Z, \quad (m = 1, \dots s - 1)$$

sono tutti zero; ma se facciamo $i = n$ abbiamo evidentemente

$$((n, j_1 \dots j_m))_Z = ((n, j_1 \dots j_m))_Y$$

perchè le Y di cui un indice sia n sono eguali rispettivamente alle Z, dunque nel caso indicato è evidente che $C^{(s-1)} = 0$.

Viceversa se $C^{(s-1)} = 0$, si avranno le equazioni

$$((n, j_1 \dots j_m))_Y = 0 \quad (m = 1, 2 \dots s - 1) \tag{18}$$

e quindi, per quanto si è ora detto:

$$((n, j_1 \dots j_m))_Z = 0 \quad (m = 1, 2, \dots s - 1).$$

Di qui può dedursi che le Z sino a quelle ad s indici sono le derivate di una f.

Per veder ciò basta tener presenti i calcoli eseguiti nel paragrafo 4 della Nota precedente, e nel paragrafo 1 di questa Nota.

Sia r pari. Poniamo, ciò che è sempre lecito,

$$Z_n = \frac{\partial f}{\partial y_n}. \tag{19}$$

Da $((n, i))_Z = 0$ e $\{i\, n\}_Z = 0$ si deduce $(i\, n)_Z = 0$ e allora da (19) si ha

$$Z_i = \frac{\partial f}{\partial y_i} \tag{20}$$

a meno di una parte che, non dovendo dipendere da y_n, la intenderemo inclusa in T_i. Da (20) e dal valore di Z_{ij} già trovato nel paragrafo 4 della Nota VII, deduciamo

$$Z_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial y_i\, \partial y_j}. \tag{21}$$

Da $((n, i\, j))_Z = 0$, si deduce

$$Z_{ijn} = \frac{\partial^3 f}{\partial y_i\, \partial y_j\, \partial y_n} \tag{22}$$

mentre da $((n, i\, j\, h))_Z = 0$ e $\{i\, j\, h\, n\}_Z = 0$ si deduce $(i\, j\, h\, n)_Z = 0$ e quindi, a meno di una parte indipendente da y_n,

$$Z_{ijh} = \frac{\partial^3 f}{\partial y_i\, \partial y_j\, \partial y_h}. \tag{23}$$

Da queste e dalla formola (26) del paragrafo 4 della Nota precedente si deduce che Z_{ijhk} è anch'essa la derivata quarta di f.

Così seguitando e ricordando che s è pari, da $((n, j_1 \dots j_{s-1}))_z = 0$ si deduce $Z_{nj_1 \dots j_{s-1}}$ come derivata $(s-1)^{ma}$ di f; indi da

$$((n, j_1 \dots j_{s-1}))_z = 0 \quad \text{e} \quad \}j_1 \dots j_{s-1} n\{_z = 0$$

si deduce

$$(j_1 \dots j_{s-1} n)_z = 0$$

donde, come sopra, il valore di $Z_{j_1 \dots j_{s-1}}$ come derivata $(s-1)^{ma}$ di f; infine da $\}j_1 \dots j_s\{_z = 0$ si ha il valore di $Z_{j_1 \dots j_s}$ come derivata s^{ma}, e ciò dimostra l'assunto.

Sia ora r dispari, e quindi anche s dispari. Le formole (4) e (6) del paragrafo 1 di questa Nota danno già le Z_i eguali alle derivate prime di f. La $((n, i))_z = 0$ dà allora $Z_{in} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_i \, \partial y_n}$, e dalle $((n, i\, j))_z = 0$ e $\}i\, j\, n\{_z = 0$ si deduce $(i\, j\, n)_z = 0$ donde, a meno di una parte indipendente da y_n, $Z_{ij} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_i \, \partial y_j}$. Da questa e dalla formola (11) resta Z_{ijh} eguale alla derivata terza di f. Così seguitando si procede come sopra, e resta così completamente dimostrato il teorema.

Un caso degno di essere posto in speciale rilievo è quello di $s = r$. In tal caso si ha la trasformazione della forma $X^{(r)}$ in una con una variabile di meno più il differenziale r^{mo} di una funzione, e le condizioni a ciò sono nell'esistenza di una trasformazione infinitesima Ξ per cui sia $L^{(r)} = 0$ a $C^{(r-1)} = 0$, che cioè, applicata a $X^{(r)}$, la riduca al differenziale r^{mo} dell'invariante A.

Raccogliendo abbiamo dunque il seguente risultato:

Condizione necessaria e sufficiente perchè la forma $X^{(r)}$ *si possa trasformare nella somma di una con una variabile di meno, e di un differenziale* r^{mo} *esatto, è che esista una trasformazione infinitesima* Ξ *per cui sieno zero i covarianti* $L^{(r)}$ *e* $C^{(r-1)}$, *e che quindi sia tale che*

$$\Xi X^{(r)} = d^r A,$$

e tutte le trasformazioni finite di tale specie si formano da una Ξ *nel modo più volte indicato* (v. principio del paragrafo 1 della Nota VI).

O anche (vedi paragrafo 5 della Nota VI):

La predetta condizione necessaria e sufficiente è che la matrice

$$\sum_{s=1}^{r-1} [(M')_s + \}M'\{_s] + (M')_r$$

abbia caratteristica minore di n.

E ancora:

Se la caratteristica della predetta matrice è ν, si può sempre trasformare $X^{(r)}$ *nella somma di una forma con sole ν variabili, e di $n-\nu$ differenziali r^{mi} esatti rispettivamente a $n, n-1, \ldots \nu+1$ variabili.*

3. *Problema di riduzione per le forme differenziali di 1° ordine e r^{mo} grado.* — Per completare la nostra ricerca, trattiamo ora, come già nelle Note precedenti (v. Nota II, § 5; Nota III, § 5; Nota V, § 6) del caso in cui nella $X^{(r)}$ sieno zero tutti i coefficienti con un numero di indici minore di r.

Dei due problemi di riduzione enunciati nella Nota VI, diventa in questo caso impossibile il secondo, almenochè di esso non si voglia considerare un caso degenere, il quale poi a sua volta può considerarsi meglio come caso particolare del primo.

Infatti nel nostro caso le espressioni che abbiamo chiamate *differenziali canonici* non esistono più, *se vogliamo che essi sieno dello stesso tipo della forma fondamentale*; perchè ricordando che le Z mediante cui essi sono costruiti, soddisfanno alle

$$(j_1 \ldots j_{r+1})_Z = 0\,,\ \}j_1 \ldots j_r\{_Z = 0\,, \ldots\ldots$$

ed essendo $Z^{(r)}$ dello stesso tipo della forma fondamentale, cioè essendo zero tutti i suoi coefficienti meno quelli a r indici, delle precedenti equazioni non si possono costruire che solo le due prime, mentre la $\}j_1 \ldots j_r\{_Z = 0$ si riduce a $Z_{j_1 \ldots j_r} = 0$, e quindi la $Z^{(r)}$ svanisce.

D'altra parte il considerare una $Z^{(r)}$ di tipo diverso che la forma fondamentale, sarebbe inutile, perchè con una qualunque trasformazione di variabili, questa conserva il suo tipo, e quindi se deve trasformarsi in $T^{(r)} + Z^{(r)}$, è naturale che ambedue queste nuove forme sieno presupposte, come la primitiva, di 1° ordine e r^{mo} grado.

Passando ora al primo problema di riduzione, basta tener presente quanto abbiamo osservato nel paragrafo 6 della Nota V, che, cioè, per le trasformazioni infinitesime per le quali è $L^{(r)} = \mu X^{(r)}$, è anche $C^{(r-1)} = 0$; ricordando allora il risultato del § 1 della Nota VI, risulta:

Condizione necessaria e sufficiente perchè la forma data di 1° ordine e r^{mo} grado si possa trasformare, a meno di un fattore, in una con una variabile di meno è che la matrice $\}M\{_{r-1} + (M)_r$ *abbia caratteristica ν minore di $n+1$. Ciò verificato, si può sempre trasformare la forma nel prodotto di un fattore finito per un'altra forma contenente $\nu - 1$ variabili.*

Se poi la forma deve trasformarsi, senza fattore, in una con una variabile di meno, ricordando sempre quanto abbiamo detto al paragrafo 1 della Nota VI, la condizione necessaria e sufficiente a ciò è che la ma-

trice $\{M\}_{r-1} + (M)_r$ *abbia caratteristica minore di* n, *intendendo al solito con* M *le matrici* M *prive della prima colonna.*

Secondo quest'ultima riduzione la $X^{(r)}$ si muta in $T^{(r)}$ con una variabile di meno. Ora $T^{(r)}$ può considerarsi sia come caso particolare di $\mu T^{(r)}$ sia come caso particolare di $T^{(r)} + Z^{(r)}$, e quindi l'ultimo risultato ottenuto può anche considerarsi come soluzione di un caso particolare del *secondo* problema di riduzione. Perciò il predetto risultato si accorda con quello che si ricaverebbe dal paragrafo precedente.

Analisi. — *Sulle funzioni meromorfe.* Nota del Socio S. Pincherle [1].

Quando di una funzione meromorfa si conoscono i poli (che per semplicità supponiamo di primo ordine) ed i rispettivi residui, il classico teorema di Mittag-Leffler permette di costruire un'espressione che rappresenta la funzione, a meno di una funzione intera addittiva. Ma il problema della determinazione di questa funzione intera per mezzo delle proprietà della funzione meromorfa presenta, in generale, grandi difficoltà; si può dire anzi che non vi siano indicazioni veramente pratiche a questo scopo. Per questa ragione ritengo non inutile di indicare un caso in cui la determinazione della funzione intera addittiva si può completamente raggiungere: tanto più che la soluzione si collega in modo interessante col problema della sommazione di una serie divergente.

1. Sia dato un sistema di costanti

$$c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots \tag{1}$$

tali che il massimo limite di $\sqrt[n]{|c_n|}$ non sia infinito.

La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{2}$$

sarà allora convergente in un cerchio di centro $x = 0$ e di cui indicherò con r il raggio, e se la funzione analitica rappresentata dalla serie (2) non ammette la sua circonferenza di convergenza come linea singolare, si potrà continuare analiticamente codesta funzione, e determinare la stella di Mittag-Leffler relativa e che diremo A, entro cui della funzione stessa si ha un ramo regolare e ad un valore; questo ramo verrà indicato con $\varphi(x)$, e per $|x| < r$ la $\varphi(x)$ coincide colla serie (2).

2. Sia ora x un punto interno alla stella A; si congiunga 0 a x mediante una linea regolare l di lunghezza finita e tutta contenuta nell'interno

[1] Presentata nella seduta dell'8 novembre 1908.