ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCC.

1903

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1903

trice $\{M'\}_{r-1} + (M)_r$ *abbia caratteristica minore di* n, *intendendo al solito con* M′ *le matrici* M *prive della prima colonna*.

Secondo quest' ultima riduzione la $X^{(r)}$ si muta in $T^{(r)}$ con una variabile di meno. Ora $T^{(r)}$ può considerarsi sia come caso particolare di $\mu T^{(r)}$ sia come caso particolare di $T^{(r)} + Z^{(r)}$, e quindi l'ultimo risultato ottenuto può anche considerarsi come soluzione di un caso particolare del *secondo* problema di riduzione. Perciò il predetto risultato si accorda con quello che si ricaverebbe dal paragrafo precedente.

Analisi. — *Sulle funzioni meromorfe*. Nota del Socio S. Pincherle [1].

Quando di una funzione meromorfa si conoscono i poli (che per semplicità supponiamo di primo ordine) ed i rispettivi residui, il classico teorema di Mittag-Leffler permette di costruire un'espressione che rappresenta la funzione, a meno di una funzione intera additiva. Ma il problema della determinazione di questa funzione intera per mezzo delle proprietà della funzione meromorfa presenta, in generale, grandi difficoltà; si può dire anzi che non vi siano indicazioni veramente pratiche a questo scopo. Per questa ragione ritengo non inutile di indicare un caso in cui la determinazione della funzione intera additiva si può completamente raggiungere: tanto più che la soluzione si collega in modo interessante col problema della sommazione di una serie divergente.

1. Sia dato un sistema di costanti

$$c_0, c_1, c_2, \ldots c_n, \ldots \tag{1}$$

tali che il massimo limite di $\sqrt[n]{|c_n|}$ non sia infinito.

La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{2}$$

sarà allora convergente in un cerchio di centro $z = 0$ e di cui indicherò con r il raggio, e se la funzione analitica rappresentata dalla serie (2) non ammette la sua circonferenza di convergenza come linea singolare, si potrà continuare analiticamente codesta funzione, e determinare la stella di Mittag-Leffler relativa e che diremo A, entro cui della funzione stessa si ha un ramo regolare e ad un valore; questo ramo verrà indicato con $\varphi(z)$, e per $|z| < r$ la $\varphi(z)$ coincide colla serie (2).

2. Sia ora z un punto interno alla stella A; si congiunga 0 a z mediante una linea regolare l di lunghezza finita e tutta contenuta nell'interno

[1] Presentata nella seduta dell' 8 novembre 1903.

di A, e si consideri l'espressione, dove l'integrazione s'intende estesa lungo quella linea:

$$\int_0^z \varphi(t)\, t^{x-1}\, dt. \tag{3}$$

Per tutti i valori di z interni ad A e per tutti i valori di x la cui parte reale è positiva, questa espressione, quando sia impedito alla linea l (p. es. mediante un taglio da o al contorno della stella), di girare intorno al punto $t=0$, rappresenta una funzione analitica regolare delle due variabili z ed x, indipendente dalla scelta della linea l. Rappresenteremo questa funzione con $\alpha(x\,,z)$.

Ora, se è $|z|<r$, si può in (3) sostituire alla $\varphi(t)$ il suo sviluppo (2), ed integrare termine a termine, per la convergenza uniforme dello sviluppo lungo la linea d'integrazione che ora può farsi coincidere col segmento rettilineo fra 0 e z; ne viene:

$$\alpha(x\,,z) = z^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n z^n}{x+n}\,. \tag{4}$$

Sotto questa forma, si vede come la funzione $\alpha(x\,,z)$ come funzione di x, non sia definita solo per $\mathrm{R}(x)>0$ [1], ma come essa risulti una funzione meromorfa definita in tutto il piano, coi soli poli del primo ordine nei punti $x=0\,,-1\,,-2\,,-3\,,\ldots$ e coi rispettivi residui $c_0\,,c_1\,,c_2\,,\ldots$ purchè il valore di z sia preso interno al cerchio di centro 0 e di raggio r. Ma, per la (3), la funzione $\alpha(x,z)$ si può continuare in tutta la stella A; si tratta ora di vedere se, anche per i punti z di A per i quali sia $|z|\geq r$, la $\alpha(x\,,z)$ sia ancora una funzione meromorfa in tutto il piano x e quale ne sia l'espressione analitica.

3. Che $\alpha(x\,,z)$ sia anche nel caso di $|z|\geq r$ funzione meromorfa con soli poli di prim'ordine nei punti $0\,,-1\,,-2\,,\ldots$ e cogli stessi residui $c_0\,,c_1\,,c_2\,,\ldots$, è subito visto. Basta prendere sulla linea l un punto z' tale che sia $|z'|<r$, e spezzare l'integrale (3) in

$$\int_0^{z'} \varphi(t)\, t^{x-1}\, dt + \int_{z'}^{z} \varphi(t)\, t^{x-1}\, dt.$$

Il primo di questi dà luogo ad una espressione (4), il secondo è manifestamente una funzione intera (trascendente in generale) di x.

4. Si tratta ora di trovare l'espressione analitica di questa funzione meromorfa, che la rappresenti in tutto il piano x ed in tutta la stella A.

A questo scopo, si applichi alla funzione meromorfa col polo di prim'ordine nel punto $x=-n$ e col residuo rispettivo $c_n z^n$ $(n=0\,,1\,,2\,,\ldots)$ il

[1] Con $\mathrm{R}(a)$ si intenda « la parte reale di a ».

metodo del teorema classico di Mittag-Leffler; si faccia cioè:

$$\frac{1}{x+n} = \frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} + \frac{x^2}{n^3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n^n} + (-1)^n \frac{x^n}{n^n(x+n)};$$

la serie

$$(5) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{c_n z^n x^n}{n^n(x+n)}$$

rappresenterà una funzione meromorfa colla proprietà indicata, e la funzione più generale avente la stessa proprietà non ne differirà se non per una funzione intera in x, i cui coefficienti saranno naturalmente funzioni di z. In particolare, si avrà dunque per la funzione $\alpha(x, z)$:

$$(6) \qquad \alpha(x, z) = z^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{c_n z^n x^n}{n^n(x+n)} + z^x \gamma(x, z),$$

dove $\gamma(x, z)$ è la funzione intera da determinare. La questione si riduce manifestamente a determinarne i coefficienti come funzioni di z.

A tale effetto, poniamo

$$\gamma(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \varrho_n(z)\, x^{n-1};$$

i coefficienti da determinarsi, $\varrho_n(z)$, si possono rappresentare con

$$(-1)^{n-1} \varrho_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} \frac{\gamma(x, z)\, dx}{x^n},$$

dove l'integrazione è estesa ad una linea chiusa (c) del piano x, circondante il punto $x = 0$. Sotto questa forma, si vede che $\varrho_n(z)$ è un ramo di funzione analitica monogena di z, regolare in tutta la stella A: se dunque diamo un modo di determinarla, per i valori $|z| < r$, mediante una relazione analitica ricorrente, questa relazione, per solito principio di conservazione mediante la continuazione analitica, si estenderà di mano in mano in modo da essere valida in tutta la stella A.

Ora si ha per $|z| < r$, dal confronto di (6) con (4):

$$\gamma(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \left(\frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n^n}\right),$$

o anche:

$$\gamma(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} \left(\frac{c_n z^n}{n^n} + \frac{c_{n+1} z^{n+1}}{(n+1)^n} + \frac{c_{n+3} z^{n+2}}{(n+2)^n} + \cdots\right).$$

Per $|z| < r$ le $\varrho_n(z)$ sono dunque date dalle serie di potenze convergenti:

$$\varrho_n(z) = \frac{c_n\, z^n}{n^n} + \frac{c_{n+1}\, z^{n+1}}{(n+1)^n} + \cdots$$

Ma fra codesti sviluppi e $\varphi(z)$ si hanno manifestamente le relazioni ricorrenti:

$$(7)\qquad \begin{cases} \varrho_1(z) = \displaystyle\int_0^z \left(\frac{\varphi(t)}{t} - \frac{c_0}{t}\right) dt\,, \\[2ex] \varrho_{n+1}(z) = \displaystyle\int_0^z \left(\frac{\varrho_n(t)}{t} - \frac{c_n\, t^{n-1}}{n^n}\right) dt\,, \quad (n = 1\,, 2\,, 3\,, \ldots\ldots) \end{cases}$$

e, per quanto si è osservato, queste relazioni rimangono, mediante la continuazione analitica, valide in tutta la stella. Esse risolvono pertanto il problema che ci siamo proposti, cioè: « la rappresentazione, mediante una « espressione analitica valida in tutto il piano x e in tutta la stella A del « piano z, della funzione $\alpha(x\,,z)$ che, limitatamente ai valori $\mathrm{R}(x) > 0$ è « definita dall' integrale

$$\int_0^z \varphi(t)\, t^{x-1}\, dt\,,$$

« dove $\varphi(t)$ è una serie di potenze di t convergente in un intorno di $t = 0$ « e continuabile analiticamente in tutta la stella A. Questa espressione è

$$z^{-x}\, \alpha(x\,, z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{c_n\, z^n\, x^n}{n^n (x+n)} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1}\, \varrho_n(z)\, x^{n-1}$$

« dove la seconda sommatoria è una funzione intera trascendente di x, i « cui coefficienti sono determinati dalle relazioni ricorrenti (7) ».

Nel tempo stesso, si può, secondo i noti concetti del Borel, dire che la $\alpha(x\,,z)$ dà la *somma* della serie (4) nella porzione della stella A esterna al cerchio di convergenza $|z| = r$ della serie stessa.