ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCC.

1903

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1903

e perciò ricco di molta paglia, e l'altra con concime di cavalli da lavoro, scarso di paglia, si è verificato questo fatto che l'*Oospora* nel secondo concime si è sviluppata quindici giorni prima ed assai più abbondantemente che sul concime dei cavalli di lusso. Disgraziatamente la constatazione di questo fatto non ha una grande importanza nella pratica; giacchè, se il concime dei cavalli di lusso si mostra più refrattario alla malattia, lo stesso concime è però meno adatto alla coltura dei funghi mangerecci perchè, come è noto, è assai meno redditivo del concime di cavallo ordinario.

Da tutte le osservazioni ed esperienze da noi fatte risulta che l'*Oospora fimicola* si riproduce con grande facilità e quindi è assai contagiosa.

Ai coltivatori non sapremmo, per ora, suggerire altro modo di combattere la malattia, se non quello di asportare il più sollecitamente e accuratamente possibile dalla cava il materiale infetto.

Ci proponiamo di continuare le nostre esperienze per ricercare un mezzo efficace di disinfezione, che valga a distruggere i germi della malattia in una cava infetta.

Matematica. — *Sull'inversione degl'integrali definiti.* Nota I del dott. PIETRO BURGATTI, presentata dal Socio V. CERRUTI [1].

È noto che il problema dell'inversione degl'integrali definiti nel campo reale, inaugurato da Abel a proposito d'una questione particolare di meccanica, è stato risoluto in questi ultimi anni dal prof. Volterra [2]. Le formule di risoluzione date dall'illustre Autore convengono a casi assai generali; ma le dimostrazioni che ne dà, per quanto eleganti, si riducono in sostanza a verificazioni più o meno dirette. Mi è sembrato perciò interessante la conoscenza di un metodo atto a guidare la mente nella ricerca di tali formule, e ad illuminarla in ricerche più generali. Quello che io espongo in questo scritto è assai semplice e intuitivo, ed è valido non solo nei casi considerati dal prof. Volterra, ma in altri ancora; quando, cioè, si renda più generale il problema dell'inversione, il che può farsi in varie maniere.

Tutto il ragionamento che conduce alle formule di risoluzione è fondato sulla considerazione di certe funzioni che io chiamo *ausiliarie*, e sull'applicazione di un procedimento ben noto, chiamato *delle approssimazioni successive*, usato già con successo in altre questioni. Il problema dell'inversione, esteso in un certo senso (e, come ho detto, si può estendere in varie maniere), può enunciarsi così:

Data l'equazione

$$\varphi(y)=\int_0^y \{\psi_0(x,y)\,f^{(n)}(x)+\psi_1(x,y)\,f^{(n-1)}(x)+\cdots+\psi_n(x,y)\,f(x)\}\,dx,$$

[1] Presentata nella seduta dell'8 novembre 1903.

[2] Atti della R. Acc. di Torino, 1896; Rend. R. Acc. Lincei, 1896.

in cui le funzioni φ e ψ_s sono note, determinare tutte le funzioni $f(x)$ che la soddisfanno. È chiaro che il problema sarebbe più facile, se la funzione da determinare dipendesse dalle due variabili x e y; perchè tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$\psi_0(x,y)\frac{\partial^n F}{\partial x^n}+\psi_1(x,y)\frac{\partial^{n-1}F}{\partial x^{n-1}}+\cdots+\psi_n(x,y)=\varphi'(x),$$

supposto $\varphi(0)=0$, risolverebbero il problema. Orbene, sono precisamente queste funzioni che io chiamo *ausiliarie*; perchè la loro considerazione è molto utile per l'applicazione del metodo delle approssimazioni successive.

Io mi limito qui a considerare i casi in cui $n=0$ e $n=1$, perchè danno luogo a risultati più concreti e precisi. Lo studio degli altri casi richiede la conoscenza di certe proprietà degli integrali dell'equazioni differenziali, che io non ho ancora indagate.

1. Il caso particolare di Abel fu trattato da parecchi autori in varie maniere. Tuttavia mi è sembrato interessante di considerarlo a parte, perchè coll'aiuto delle funzioni ausiliarie, dianzi definite, si risolve con un tratto di penna. Infatti, abbiasi a determinare $f(x)$ in guisa che sia

$$\varphi(a)=\int_0^a\frac{f(x)\,dx}{(a-x)^n},\tag{1}$$

essendo $\varphi(a)$ nota e n un numero positivo minore dell'unità.

Supponendo per ora $\varphi(0)=0$, la funzione ausiliaria è data evidentemente dall'espressione

$$F(a,x)=\varphi'(x)\,(a-x)^n.$$

Per dedurre da essa una funzione della sola x che pur soddisfaccia alla (1), basta osservare che in generale

$$\int_0^x F(x,y)\,\psi(x,y)\,dy$$

è funzione della sola x; onde se poniamo nella (1) questa espressione al posto di $f(x)$, e invertiamo l'ordine delle integrazioni, avremo

$$\varphi(a)=\int_0^a dy\int_y^a\frac{F(x,y)\,\psi(x,y)}{(a-x)^n}\,dx=\int_0^a\varphi'(y)\,dy\int_y^a\frac{(x-y)^n}{(a-x)^n}\,\psi(x,y)dx;$$

talchè, se si potrà determinare ψ in guisa che risulti

$$\int_y^a\left(\frac{x-y}{a-x}\right)^n\psi(x,y)\,dx=1,$$

la (1) resterà soddisfatta. Ma ricordando che

$$(0) \qquad \int_y^a \frac{dx}{(a-x)^n\,(x-y)^{1-n}} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} n\pi},$$

si vede subito che si dovrà prendere

$$\psi(x,y) = \frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi(x-y)}.$$

Dunque, per le cose dette, la formula d'inversione è

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi} \int_0^x \frac{\varphi'(y)}{(x-y)^{1-n}}\,dy.$$

Riguardo al caso di $\varphi(0) \neq 0$, basta osservare che la funzione ora trovata, che per distinguerla sarà indicata con $f_1(x)$, soddisfa anche l'equazione

$$\varphi(a) - \varphi(0) = \int_0^a \frac{f_1(x)\,dx}{(a-x)^n};$$

per conseguenza sarà

$$\varphi(a) = \int_0^a \frac{f_1(x)\,dx}{(a-x)^n} + \varphi(0),$$

ossia per la (0) (posto $y=0$)

$$\varphi(a) = \int_0^a \frac{f_1(x) + \dfrac{\varphi(0)\operatorname{sen} n\pi}{\pi x^{1-n}}}{(a-x)^n}\,dx.$$

Dunque la (1), nel caso generale, è soddisfatta da

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi}\frac{\varphi(0)}{x^{1-n}} + \frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi}\int_0^x \frac{\varphi'(y)}{(x-y)^{1-n}}\,dy.$$

2. Consideriamo ora l'equazione funzionale

$$(2) \qquad \varphi(y) = \int_0^y f(x).\psi(x,y)\,dx, \qquad (\varphi(0)=0)$$

in cui $\varphi(y)$, $\varphi'(y)$, $\psi(x,y)$ e $\dfrac{\partial\psi}{\partial y} = \psi_2(x,y)$ si suppongono finite e continue per valori di x e y compresi nell'intervallo $|0,\alpha|$, e $\psi(x,x)$ diversa da zero nello stesso intervallo. In questo caso la funzione ausiliaria di due variabili è evidentemente

$$F(x,y) = \frac{\varphi'(x)}{\psi(x,y)}.$$

Di qui possiamo dedurre una funzione della sola x ponendo $y = x$; ma non soddisferà la (2); per cui porremo

$$f(x) = Z_0(x) + f_1(x),$$

ove

$$Z_0(x) = \frac{\varphi'(x)}{\psi(x, x)},$$

e cercheremo di determinare la $f_1(x)$. Sostituendo in (2), si ottiene

$$\varphi(y) - \int_0^y Z_0(x)\, \psi(x, y)\, dx = \int_0^y f_1(x)\, \psi(x, y)\, dx,$$

ossia

(2') $$\varphi_1(y) = \int_0^y f_1(x)\, \psi(x, y)\, dx,$$

ove $\varphi_1(y)$ sta a rappresentare il 1° membro tutto noto. Ma questa equazione è della stessa forma della (2), e $\varphi_1(0) = 0$; dunque possiamo per essa ripetere il ragionamento ora fatto. La funzione ausiliaria è

$$F_1(x, y) = \frac{\varphi_1'(x)}{\psi(x, y)};$$

onde noi porremo, come sopra,

$$f_1(x) = Z_1(x) + f_2(x) \quad \text{con} \quad Z_1(x) = \frac{\varphi_1'(x)}{\psi(x, x)}.$$

Ma dall'espressione di $\varphi_1(y)$ si trae

$$\varphi_1'(x) = \left(\varphi'(x) - \left|\int_0^y Z_0(x) \frac{\partial \psi}{\partial y} dx\right|_{y=x} - Z_0(x)\, \psi(x, x)\right) =$$
$$= -\int_0^x Z_0(\xi)\, \psi_2(\xi, x)\, d\xi;$$

per conseguenza sarà

$$Z_1(x) = -\frac{1}{\psi(x, x)} \int_0^x Z_0(\xi)\, \psi_2(\xi, x)\, d\xi.$$

Sostituendo ora nella (2') l'espressione di $f_1(x)$, si ottiene per $f_2(x)$ una equazione come la (2); sulla quale ripetendo lo stesso ragionamento, e seguitando poi oltre quante volte si voglia, si trova

$$f(x) = Z_0 + Z_1 + \cdots + Z_n + f_{n+1}(x),$$

ove

(3) $$Z_0(x) = \frac{\varphi'(x)}{\psi(x, x)}; \quad Z_n(x) = -\frac{1}{\psi(x, x)} \int_0^x Z_{n-1}(\xi)\, \psi_2(\xi, x)\, d\xi$$

$$(n = 1, 2, 3 \ldots)$$

e $f_{n+1}(x)$ soddisfa un'equazione come la (2).

Orbene è facile mostrare che, facendo crescere n indefinitamente, la serie

$$Z_0 + Z_1 + \cdots + Z_n + \cdots\cdots$$

è convergente in ugual grado nell'intervallo $|0, \alpha|$, e rappresenta la $f(x)$ che risolve l'equazione (2). Infatti, sia in detto intervallo

$$|\varphi'(x)| < L, |\psi_2(\xi, x)| < L_1, |\psi(x, x)| > l.$$

Allora

$$|Z_0| \leq \frac{L}{l}, |Z_1| \leq \frac{L}{l}\frac{L_1}{l}|x|,$$

$$|Z_2| \leq \frac{L}{l}\frac{L_1}{l}\left|\frac{1}{\psi(x, x)}\int_0^x \xi\psi_2(\xi, x)\, d\xi\right| \leq \frac{L}{l}\left(\frac{L_1}{l}\right)^2 \frac{|x|^2}{\underline{|2}},$$

e in generale

$$|Z_n| \leq \frac{L}{l}\left(\frac{L_1}{l}\right)^n \frac{|x|^n}{\underline{|n}};$$

il che dimostra il primo asserto. Dopo ciò il secondo asserto è dimostrato dal procedimento stesso, che ha servito al calcolo dei successivi termini della serie. Tuttavia, se lo si vuol provare direttamente, basta derivare la (2) rispetto a y e porre $f(x) = \sum_0^\infty Z_n(x)$. Si ottiene infatti

$$\frac{\varphi'(y)}{\psi(y, y)} - \frac{1}{\psi(y, y)}\int_0^y f(x)\, \psi_2(x, y)\, dx = f(y),$$

ossia

$$Z_0(y) - \sum_0^\infty \frac{1}{\psi(y, y)}\int_0^y Z_n(x)\, \psi_2(x, y)\, dx = \sum_0^\infty Z_n(y);$$

quindi per la (3)

$$Z_0(y) + \sum_1^\infty Z_n(y) = \sum_0^\infty Z_n(y).$$

Quanto all'esistenza di questa sola soluzione è inutile tenerne parola: il lettore può vedere la prima Nota citata del prof. Volterra.

Noi abbiamo supposto $\varphi(0) = 0$. Se è $\varphi(0) \neq 0$, l'espressione trovata per $f(x)$ soddisfa, come è chiaro, l'equazione

$$\varphi(y) - \varphi(0) = \int_0^y f(x)\, \psi(x, y)\, dx;$$

ma non più la (2), la quale evidentemente non ammette alcuna soluzione in tal caso. Ciò dipende dalle condizioni imposte alla $\psi(x, y)$, tolte le quali la soluzione può esistere; e noi abbiamo visto che per l'equazione di Abel realmente esiste.

3. Supponiamo ora che la funzione $\psi(x,y)$ diventi infinita per $y=x$ di ordine inferiore all'unità. La scriveremo sotto la forma

$$\frac{\psi(x,y)}{(y-x)^n} \qquad (n<1),$$

ove ψ rappresenta adesso una funzione finita che soddisfa a tutte le condizioni ammesse al n. 2; talchè l'equazione da risolvere sarà

$$(4) \qquad \varphi(y)=\int_0^y f(x)\frac{\psi(x,y)}{(y-x)^n}\,dx \text{ [1]},$$

supponendo per ora $\varphi(0)=0$.

Il procedimento spiegato nel n. 2 è valido anche per questa equazione; ma qui non possiamo partire dalla funzione ausiliaria

$$\mathrm{F}(x,y)=\frac{\varphi'(x)\,(y-x)^n}{\psi(x,y)};$$

perchè essa si annulla per $y=x$. Occorre quindi considerare un'altra funzione ausiliaria; la quale esiste, ed è espressa dalla formula

$$\mathrm{F}(x,y)=\frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi}\,\frac{1}{\psi(x,y)}\int_0^x\frac{\varphi'(\xi)}{(x-\xi)^{1-n}}\,d\xi=\frac{\mathrm{P}(x)}{\psi(x,y)}.$$

Infatti

$$\int_0^y \mathrm{F}(x,y)\frac{\psi(x,y)}{(y-x)^n}\,dx=\frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi}\int_0^y\frac{dx}{(y-x)^n}\int_0^x\frac{\varphi'(\xi)}{(x-\xi)^{1-n}}\,d\xi=$$

$$=\frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi}\int_0^y\varphi'(\xi)\,d\xi\int_\xi^y\frac{dx}{(y-x)^n\,(x-\xi)^{1-n}}=\varphi(y)$$

in virtù della formula (0). Tale funzione non s'annulla per $y=x$; inoltre

$$\mathrm{P}(x)=\frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi}\int_0^x\frac{\varphi'(\xi)}{(x-\xi)^{1-n}}\,d\xi$$

è una funzione finita e continua nell'intervallo considerato; essa è dunque adatta al nostro scopo.

Analogamente a quanto abbiamo fatto nel n. 2, assumeremo, per dir così, come primo valore approssimato di $f(x)$ l'espressione che si ottiene dalla funzione ausiliaria facendo $y=x$, cioè

$$\mathrm{Z}_0(x)=\frac{\mathrm{P}(x)}{\psi(x,x)};$$

e porremo

$$f(x)=\mathrm{Z}_0(x)+f_1(x).$$

[1] Il prof. Volterra ha dimostrato che questo caso si può ricondurre al precedente. Io ho voluto qui trattarlo direttamente per mostrare la generalità del metodo.

La (4) diventa

$$\varphi(y) - \int_0^y \frac{Z_0(x)\, \psi(x, y)}{(y-x)^n}\, dx = \int_0^y \frac{f_1(x)\, \psi(x, y)}{(y-x)^n}\, dx,$$

che potremo scrivere sotto la forma

$$\varphi_1(y) = \int_0^y \frac{f_1(x)\, \psi(x, y)}{(y-x)^n}\, dx,$$

essendo il primo membro tutto noto e nullo per $y = 0$. Abbiamo così una equazione analoga alla (4). Per essa la funzione ausiliaria è

$$F_1(x, y) = \frac{P_1(x)}{\psi(x, y)},$$

in cui

$$P_1(x) = \frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi} \int_0^x \frac{\varphi_1'(\xi)}{(x-\xi)^{1-n}}\, d\xi;$$

onde, ragionando come precedentemente, porremo

$$f_1(x) = Z_1(x) + f_2(x),$$

in cui

$$Z_1(x) = \frac{P_1(x)}{\psi(x, x)}.$$

Per calcolare $P_1(x)$ conviene procedere nel modo seguente. Moltiplichiamo la relazione

$$\varphi_1(y) = \varphi(y) - \int_0^y \frac{Z_0(\eta)\, \psi(\eta, y)}{(y-\eta)^n}\, d\eta$$

per $\dfrac{dy}{(x-y)^{1-n}}$ e integriamo da 0 a x. Invertendo l'ordine d'integrazione nell'integral doppio, si ottiene

$$\int_0^x \frac{\varphi_1(y)}{(x-y)^{1-n}}\, dy = \int_0^x \frac{\varphi(y)}{(x-y)^{1-n}}\, dy - \\ - \int_0^x Z_0(\eta)\, d\eta \int_\eta^x \frac{\psi(\eta, y)}{(x-y)^{1-n}(y-\eta)^n}\, dy.$$

Poniamo ora

$$(c) \qquad \int_\eta^x \frac{\psi(\eta, y)}{(x-y)^{1-n}(y-\eta)^n}\, dy = K(\eta, x),$$

e integriamo per parti l'integrale del primo membro e l'analogo del secondo. Si trova subito

$$\frac{1}{n}\int_0^x \varphi_1'(y)\,(x-y)^n\, dy = \frac{1}{n}\int_0^x \varphi'(y)\,(x-y)^n\, dy - \int_0^x Z_0(\eta)\, K(\eta, x)\, d\eta;$$

talchè potremo derivare ambo i membri rispetto ad x colla regola ordinaria. Così facendo, si ottiene

$$(d)\qquad P_1(x) = P(x) - \frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi} Z_0(x)\, K(x,x) - \frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi} \int_0^x Z_0(\eta) \frac{\partial K}{\partial x} d\eta .$$

Con un opportuno cambiamento di variabili la (c) diventa

$$K(\eta, x) = \int_0^1 \psi(\eta, \eta + y'(x-\eta)) \frac{dy'}{y'^n (1-y')^{1-n}};$$

per conseguenza

$$K(x,x) = \psi(x,x) \frac{\pi}{\operatorname{sen} n\pi}$$

e

$$\frac{\partial K}{\partial x} = \int_0^1 \psi_2(\eta, \eta + y'(x-\eta)) \left(\frac{y'}{1-y'}\right)^{1-n} dy' =$$

$$= \int_\eta^x \psi_2(\eta, y) \left(\frac{y-\eta}{x-y}\right)^{1-n} \frac{dy}{x-\eta}.$$

Con queste espressioni di $K(x,x)$ e $\frac{\partial K}{\partial x}$ la (d) diventa

$$P_1(x) = -\frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi} \int_0^x Z_0(\eta) \frac{\partial K}{\partial x} d\eta .$$

Se dunque poniamo $\frac{\partial K}{\partial x} = H(\eta, x)$, e mutiamo η in ξ, avremo

$$Z_1(x) = -\frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi \cdot \psi(x,x)} \int_0^x Z_0(\xi)\, H(\xi, x)\, d\xi ,$$

in cui

$$(5)\qquad H(\xi, x) = \int_\xi^x \psi_2(\xi, y) \left(\frac{y-\xi}{x-y}\right)^{1-n} \frac{dy}{x-\xi}.$$

Ripetendo ora lo stesso ragionamento quante volte si voglia, si trova

$$f(x) = Z_0(x) + Z_1(x) + \cdots + Z_m(x) + f_{m+1}(x),$$

in cui

$$(6)\qquad Z_m(x) = -\frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi\, \psi(x,x)} \int_0^x Z_{m-1}(\xi)\, H(\xi, x)\, d\xi$$

e $f_{m+1}(x)$ soddisfa ad una equazione come la (4). Orbene, la serie

$$Z_0(x) + Z_1(x) + \cdots + Z_m(x) + \cdots$$

è convergente in ugual grado nell'intervallo $|0, \alpha|$ e rappresenta la funzione $f(x)$ che soddisfa l'equazione proposta. Per la dimostrazione della convergenza poco o nulla di sostanziale c'è da mutare in quella esposta al n. 2;

perciò non val la pena di ripeterla. Che poi soddisfaccia la (4) risulta dal procedimento stesso. Tuttavia, volendo, si può dimostrare anche direttamente. Basta prima sottoporre la (4) alle successive trasformazioni che si son fatte per il calcolo di $P_1(x)$, e poi sostituire ad $f(x)$ la serie, tenendo conto della formula (6).

4. Nel caso che sia $\varphi(0) \neq 0$, l'espressione trovata per $f(x)$ soddisfa l'equazione

$$\varphi(y) - \varphi(0) = \int_0^y \frac{f(x)\,\psi(x,y)}{(y-x)^n}\,dx;$$

ma non più la (4). Bisogna dunque considerare a parte questo caso.

La funzione ausiliaria usata nel n. 3 non gode più della proprietà che la definisce, quando $\varphi(0) \neq 0$; perchè, sostituita al posto di $f(x)$ nella (4), dà per risultato $\varphi(y) - \varphi(0)$, e non $\varphi(y)$ soltanto. Ma basta aggiungere a $P(x)$ l'espressione

$$\frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi}\,\frac{\varphi(0)}{x^{1-n}}$$

per ottenere la funzione ausiliaria corrispondente al caso in esame. Infatti, ponendo

$$F(x,y) = \frac{P(x) + \dfrac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi}\,\dfrac{\varphi(0)}{x^{1-n}}}{\psi(x,y)}$$

nell'integrale

$$\int_0^y F(x,y)\,\frac{\psi(x,y)}{(y-x)^n}\,dx,$$

esso si scinde in due. Il primo, per le cose dette, si riduce a $\varphi(y) - \varphi(0)$; il secondo

$$\varphi(0)\,\frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi}\int_0^y \frac{dx}{(y-x)^n\,x^{1-n}}$$

è uguale a $\varphi(0)$; quindi la somma è $\varphi(y)$.

Allora, procedendo come di solito, porremo

$$f(x) = Z_0(x) + f_1(x),$$

in cui

$$Z_0(x) = \frac{P(x) + \dfrac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi}\,\dfrac{\varphi(0)}{x^{1-n}}}{\psi(x,x)}. \tag{6}$$

Si ottiene

$$\varphi(y) - \int_0^y \frac{Z_0(x)\,\psi(x,y)}{(y-x)^n}\,dx = \varphi_1(y) = \int_0^y \frac{f_1(x)\,\psi(x,y)}{(y-x)^n}\,dx,$$

ove la funzione $\varphi_1(y)$ si annulla per $y = 0$. Infatti, abbiamo

$$\varphi_1(0) = \varphi(0) - \left| \int_0^y \frac{P(x)}{\psi(x,x)} \frac{\psi(x,y)}{(y-x)^n} dx \right|_{y=0} -$$

$$- \frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi} \varphi(0) \left| \int_0^y \frac{\psi(x,y)}{\psi(x,x)} \frac{dx}{x^{1-n}(y-x)^n} \right|_{y=0}.$$

Per le cose dette nel n. 3, il primo integrale è nullo per $y = 0$. Il secondo, ponendo $x = yx_1$, diventa

$$\int_0^1 \frac{\psi(yx_1, y)}{\psi(yx_1, yx_1)} \frac{dx_1}{x_1^{1-n}(1-x_1)^n};$$

che per $y = 0$ è uguale a $\dfrac{\pi}{\operatorname{sen} n\pi}$. Dunque $\varphi_1(0) = 0$.

Per conseguenza l'equazione

$$\varphi_1(y) = \int_0^y \frac{f_1(x)\, \psi(x,y)}{(y-x)^n} dx$$

rientra nel caso considerato al n. 3; e la formula di risoluzione si deduce da quella trovata allora, ponendo per $Z_0(x)$ l'espressione (6).

È bene notare che tale espressione di $Z_0(x)$ si può porre sotto un'altra forma. Infatti

$$\frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi} \frac{\varphi(0)}{x^{1-n}} = -\frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi x} \left| (x-\xi)^n \varphi(\xi) \right|_{\xi=0}^{\xi=x} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi x} \int_0^x \frac{(\xi - x)\, \varphi'(\xi) + n\, \varphi(\xi)}{(x-\xi)^{1-n}} d\xi,$$

e per conseguenza

$$P(x) + \frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi} \frac{\varphi(0)}{x^{1-n}} = \frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi x} \int_0^x \frac{\xi\, \varphi'(\xi) + n\, \varphi(\xi)}{(x-\xi)^{1-n}} d\xi =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\varphi(\xi)\, d\xi}{(x-\xi)^{1-n}};$$

dunque

$$Z_0(x) = \frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi\, \psi(x,x)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\varphi(\xi)\, d\xi}{(x-\xi)^{1-n}}.$$