

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI
ANNO CCC.
1903

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XII.

2° SEMESTRE.



ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1903

Meccanica. — *Sul problema dei tre corpi. Condizioni d'urto di due di essi.* Nota del dott. GIULIO BISCONCINI, presentata dal Socio VOLTERRA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica matematica. — *Sulla teoria dei potenziali di ordine superiore.* Nota di E. DANIELE, presentata dal Socio V. VOLTERRA (1).

La funzione potenziale, come fu dapprima introdotta in meccanica, dipendeva dalle sole coordinate dei punti del sistema dinamico, e dava luogo a forze, esse pure dipendenti dalle sole coordinate; più tardi però il concetto di funzione potenziale venne esteso in modo da potersi riferire anche a forze nelle quali figurassero, insieme alle coordinate, le loro derivate successive. Fra le prime estensioni di questo genere la più notevole è quella che permise di assegnare un potenziale alle forze che agiscono secondo la legge elettrodinamica di Weber; appartengono alle più recenti gli studi, importanti soprattutto dal lato matematico, del Königsberger, compendiate nel suo libro: *Die Principien der Mechanik* (Leipzig, Teubner, 1901).

Ma mentre si può verosimilmente ritenere che le forze dipendenti dalle sole coordinate ammettano sempre una funzione potenziale, per quelle invece che ne contengono anche le derivate si vede subito che si presenta una distinzione riguardo alla possibilità, o meno, di farle provenire da una tale funzione. Basta, alle forze elettrodinamiche ora ricordate, mettere a riscontro le cosiddette forze d'attrito: alle prime, contenenti le derivate prime e seconde delle coordinate, si può assegnare, come fecero Riemann (2) e C. Neumann (3), un potenziale funzione delle coordinate e delle loro derivate prime; mentre non si può in alcun modo parlare di potenziale delle forze d'attrito. Anzi possiamo affermare che tale proprietà negativa è posseduta non solo da queste ultime forze, ma, in generale, da tutte le forze che dipendono, oltrechè dalla configurazione del sistema, anche dalle velocità dei singoli punti, cioè sono funzioni delle coordinate e delle loro derivate prime.

La ragione di questo fatto si può dare in modo puramente analitico. Ed invero il metodo con cui, secondo Riemann e C. Neumann, si ricavano da un potenziale le forze corrispondenti, si riduce, nel caso di un potenziale

(1) Presentata nella seduta dell'8 novembre 1903.

(2) *Schwere, Elektrizität u. Magnetismus* (Hannover, Rümpler, 1880), p. 316.

(3) *Allgem. Untersuchungen ü. das Newton'sche Princip der Fernwirkungen* (Leipzig, Teubner, 1896), p. 222 e segg.

contenente le sole coordinate (*potenziale ordinario* di Neumann), alla solita regola di prendere le derivate del potenziale rispetto alle coordinate, e dà luogo, in conseguenza, a forze funzioni soltanto delle coordinate. Nel caso poi di un potenziale contenente anche le velocità (*potenziale effettivo* di Neumann) quel metodo conduce a forze funzioni anche delle derivate prime e seconde delle coordinate. Si vede così che le forze dipendenti dalle coordinate e dalle loro derivate prime (ma non da quelle di ordine più elevato) non si possono far provenire nè da un potenziale ordinario, nè da un potenziale effettivo: in generale, s'intende, poichè non è escluso che nelle espressioni di certe forze aventi un potenziale effettivo possano mancare i termini colle derivate seconde. Il ricercare se siffatte forze (o, che fa lo stesso, i corrispondenti potenziali) possano ammettersi realmente, e quale interpretazione loro si possa dare, costituisce l'essenza della presente Nota.

Nel n. 1 stabilisco anzitutto l'espressione analitica dei potenziali e delle forze in questione, espressione che, sia pei primi che per le seconde, è lineare nelle componenti delle velocità. Dopo di avere indicato (n. 2) una semplice proprietà di queste forze, espongo nei nn. 3-5 come quei potenziali, che a tutta prima non sarebbero da ammettersi perè contrastanti colle definizioni meccaniche, ricevano invece un significato ricorrendo alla teoria delle masse nascoste di Helmholtz-Hertz, e più specialmente alla considerazione dei movimenti adiabatici dei sistemi ciclici.

Il caso in cui il sistema abbia un solo grado di libertà è studiato in modo particolare al n. 6 per alcune speciali proprietà cui dà luogo.

Termino accennando brevemente come si possano estendere a potenziali di ordine qualunque (cioè contenenti le derivate delle coordinate fino ad un ordine arbitrario) le considerazioni precedenti, almeno per ciò che riguarda la parte analitica della questione.

1. Siano $q_1 \dots q_s$ i parametri indipendenti che definiscono la configurazione di un sistema in movimento, e sia $V = V(q_1 \dots q_s, q'_1 \dots q'_s)$ un potenziale contenente i parametri q e le loro prime derivate: per semplicità supporrò che V non contenga esplicitamente il tempo. La forza Q_i corrispondente alla coordinata q_i è data (1) dalla formola:

$$(1) \quad Q_i = \frac{\partial V}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial q'_i} \\ = \frac{\partial V}{\partial q_i} - \sum_s \frac{\partial^2 V}{\partial q_s \partial q'_i} q'_s - \sum_s \frac{\partial^2 V}{\partial q'_s \partial q'_i} q''_s.$$

Come si vede la Q_i contiene, oltre alle q e alle q' , anche le q'' , dalle quali dipende linearmente; se allora vogliamo che nelle Q_i le q'' manchino,

(1) V. C. Neumann, op. cit., p. 229.

si dovrà supporre che sia, per tutti i valori degli indici i e s :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q'_s \partial q'_i} = 0.$$

Ne segue che V è della forma

$$(2) \quad V = U(q_1, \dots, q_s) + a_1 q'_1 + \dots + a_s q'_s,$$

dove tanto la U quanto le a non contengono le q' . Sostituendo questa espressione di V nella (1) si trova:

$$(3) \quad Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} + \sum_s a_{si} q'_s,$$

avendo posto

$$a_{si} = \frac{\partial a_s}{\partial q_i} - \frac{\partial a_i}{\partial q_s}.$$

Cioè, imponendo alle Q_i la condizione di non contenere le q'' , esse risultano necessariamente funzioni lineari delle q' . I coefficienti di queste funzioni lineari non sono però arbitrari, poichè i termini colle sole q sono le derivate, rispetto alla q_i corrispondente, di una stessa funzione U (che può essere qualunque), mentre fra i coefficienti a_{si} passano le relazioni

$$(4) \quad a_{si} + a_{is} = 0.$$

2. Una prima proprietà delle forze Q_i definite dalla (3) si trova calcolando il lavoro eseguito durante uno spostamento virtuale. Questo lavoro è dato da

$$\begin{aligned} \sum Q_i \delta q_i &= \sum Q_i q'_i dt \\ &= \sum \frac{\partial U}{\partial q_i} q'_i dt + \sum_i \sum_s a_{si} q'_s q'_i dt. \end{aligned}$$

Ma per le (4) la somma doppia del secondo membro è identicamente nulla, quindi

$$\sum Q_i \delta q_i = \sum \frac{\partial U}{\partial q_i} q'_i dt = \delta U,$$

cioè: il lavoro virtuale delle forze Q_i (provenienti dal potenziale effettivo V) è lo stesso che quello delle forze $\frac{\partial U}{\partial q_i}$ (provenienti dal potenziale ordinario U).

In altre parole, se noi consideriamo la Q_i come composta di due forze, della $\frac{\partial U}{\partial q_i}$ e della $F_i = \sum_s a_{si} q'_s$, troviamo che le forze F_i eseguiscano un lavoro nullo per ogni spostamento virtuale del sistema: esse godono cioè di una proprietà identica a quella nota delle resistenze dei vincoli in un sistema senza attrito.

Si può enunciare la stessa proprietà delle forze Q_i ancora sotto un'altra forma: *l'espressione analitica del principio della forza viva è la stessa come se, invece delle forze Q_i , si considerassero le $\frac{\partial U}{\partial q_i}$* . Il principio sarà dunque espresso dall'equazione

$$T - U = \text{cost.}$$

Facendo il confronto col caso delle forze che agiscono secondo la legge di Weber, si trova che qui viene a comparire, nell'equazione dell'energia, ancora un termine, ossia quel termine che nel potenziale delle forze elettrodinamiche contiene le derivate delle coordinate. La mancanza di questo termine nel caso nostro è dovuta alla circostanza della linearità del potenziale rispetto alle q' .

3. Nelle lezioni di Riemann già citate, questi avverte (p. 316) che un potenziale, il quale sia funzione anche delle derivate prime delle coordinate, deve contenerle almeno al 2° grado, se si vuole che il potenziale conservi il suo significato di una funzione che misuri colle sue differenze il lavoro delle forze applicate. Veramente in questa osservazione è implicita l'ipotesi che ogni potenziale dipendente anche dalle q' debba essere necessariamente un polinomio intero in queste quantità. A parte ciò, se noi prendiamo il potenziale V definito dalla (2), e ne formiamo il differenziale totale dV , troviamo:

$$dV = \left(\sum \frac{\partial U}{\partial q_n} q'_n + \sum_s \sum_n \frac{\partial a_s}{\partial q_n} q'_s q'_n + \sum a_{nn} q''_n \right) dt.$$

Ora il secondo membro contiene dei termini (quelli dell'ultimo gruppo) in cui non figurano punto le q' , ed una tale espressione non può identificarsi con quella del lavoro elementare

$$\sum Q_n q'_n dt,$$

dove in ogni termine comparisce come fattore una delle q' .

Che i potenziali della forma (2) siano perciò da escludersi, non pare tuttavia necessario, non solo perchè si potrebbero considerare come un'estensione puramente analitica della nozione di potenziale, ma anche per una ragione fisica. Il mezzo, con cui i potenziali lineari nelle q' ricevono un'in-

interpretazione fisica, ci è offerto immediatamente dalla teoria dei *movimenti nascosti*, ideata da Helmholtz e posta da Hertz a base della sua meccanica: si vedrà in tal modo che un potenziale lineare nelle q' è capace di assumere un significato determinato non meno che quei potenziali cinetici (per usare la denominazione di Helmholtz) che s'incontrano in vari problemi meccanici e fisici, e nei quali le componenti della velocità entrano anche al primo grado.

4. Si consideri un movimento o, più in generale, un fenomeno che si svolga secondo una legge espressa dalle equazioni di Lagrange della seconda forma, e nel quale il potenziale cinetico sia la somma di una forma quadratica nelle q' , che diremo T, e di una funzione lineare nelle q' stesse, per modo che indicando il potenziale cinetico con H si abbia:

$$(5) \quad H = T + \sum_s a_s(q_1, \dots, q_n) q'_s + U(q_1, \dots, q_n).$$

Le equazioni del fenomeno sarebbero:

$$(6) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial q'_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Il caso, da noi considerato, di un sistema in moto sotto l'azione delle forze Q_i date dalla (3) si troverebbe appunto nelle condizioni ora dette quando la forza viva fosse uguale a T.

Si imaginino ora un sistema materiale dipendente, oltrechè dalle coordinate $q_1 \dots q_n$, anche da altre $p_1 \dots p_\nu$; e supponiamo che nel suo interno abbiano luogo dei movimenti ciclici definiti dal variare delle coordinate p . Siano cioè, nel sistema ciclico ora imaginato, $p_1 \dots p_\nu$ le *coordinate cicliche*, e $q_1 \dots q_n$ i *parametri* ⁽¹⁾; sappiamo allora che tanto nell'espressione della forza viva quanto in quella del potenziale non figureranno le p ; solo le loro derivate (*intensità cicliche*) entreranno nella forza viva. Ammettiamo ancora che sul nostro sistema non agisca nessuna forza *esterna*, ossia nessun'altra forze all'infuori di quelle provenienti dal potenziale cui ora si è accennato (forze conservative). Il movimento del sistema appartiene così al tipo di quelli che Hertz chiama *movimenti adiabatici*, le cui equazioni offrono senz'altro μ integrali primi, mediante i quali è possibile eliminare le intensità cicliche, riducendo così le $\mu + \nu$ equazioni primitive ad un sistema di ν equazioni fra i soli parametri. Ciò che in questa eliminazione è importante, è il fatto, come ben si sa, che le ν equazioni risultanti conservano la forma delle equazioni di Lagrange, a condizione di assumere, come nuovo poten-

(1) Queste denominazioni, com'è noto, sono di Hertz; cfr. *Die Prinzipien der Mechanik* etc. (Leipzig, Barth, 1894), p. 235 e segg.

ziale cinetico, una certa espressione somma di una forma quadratica nelle q' e di una funzione lineare nelle q' stesse. Insomma le equazioni del movimento, dopo eliminate le p' , sono identiche nella forma alle equazioni (6), dove si ponga per H ancora un'espressione della forma (5).

5. Ed allora è possibile trarre la seguente conclusione.

Supposto H dato dalla (5), le (6) si possono interpretare in due modi diversi: o come le equazioni del movimento d'un sistema la cui forza viva è T ed è soggetto a forze (contenenti le q') derivanti dal potenziale $U + \sum a_s q'_s$, o come le equazioni che definiscono il movimento d'insieme di un sistema (conservativo) nel cui interno esistano moti ciclici, e sul quale non agiscano forze esterne. Interpretando le (6) in quest'ultimo modo non è più possibile distinguere, nel potenziale cinetico, la forza viva dalla funzione potenziale; ad ogni modo però le forze (e così pure la funzione potenziale) non contengono più altro che le coordinate, e precisamente le q , cioè i parametri del movimento ciclico.

La doppia interpretazione di cui sono capaci le equazioni (6) contiene appunto la ragione per cui le forze Q_i del tipo (3) o, che fa lo stesso, i potenziali V del tipo (2) non sono da rigettarsi come privi di significato fisico, e come pure estensioni analitiche della definizione di forza o di potenziale. Il significato che a loro spetta non risulta però dal considerarli in sè e per sè, ma dalla parte che essi hanno nelle equazioni del movimento in quanto sono combinati coll'espressione della forza viva: le forze di quel tipo si possono sostituire alla concezione delle masse nascoste quando si tratti di interpretare meccanicamente un potenziale cinetico che contenga le componenti delle velocità *anche* al primo grado.

6. Una menzione particolare merita il caso in cui il sistema dipenda da una sola coordinata q . Il potenziale V sarà della forma

$$(7) \quad V = U(q) + a(q)q',$$

e per la forza Q si ha:

$$Q = \frac{\partial U}{\partial q};$$

qui difatti i coefficienti a_{si} della (3) si riducono ad uno solo coi due indici eguali, e questo per la (4) è nullo. Nel caso attuale dunque la forza proveniente da un potenziale effettivo, lineare nella q' , si riduce ad una forza proveniente da un potenziale ordinario; si può esprimere la cosa in altri termini dicendo che nel movimento definito dal potenziale V dato dalla (7) non ha nessuna influenza il termine in q' . Notisi poi che l'interpretazione coi movimenti nascosti, che valeva nel caso generale, non cessa punto di valere adesso. Ed in realtà, al fatto che il termine in q' non influisce sulla equazione del mo-

vimento, fa riscontro, nella teoria dei moti nascosti, una proprietà perfettamente analoga.

Immaginiamo difatti un sistema con movimenti ciclici interni, soggetto a sole forze conservative, nel quale tutte le coordinate siano cicliche salvo una, che diremo q . Eliminate tutte le intensità cicliche, ci ridurremo ad un potenziale cinetico della forma

$$H = \frac{1}{2} Aq'^2 + Bq' + C,$$

dove A, B, C sono funzioni della sola q , e dove inoltre B è generalmente diverso da zero, come si può vedere eseguendo il calcolo effettivo di H. Ma se noi scriviamo l'equazione del movimento

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial q'} - \frac{\partial H}{\partial q} = 0,$$

e la sviluppiamo, troviamo:

$$Aq'' + \frac{1}{2} \frac{dA}{dq} q'^2 - \frac{dB}{dq} q' - \frac{dC}{dq} = 0,$$

e questa non contiene più traccia del termine lineare in q' nell'espressione di H. Ciò permette di dire che il movimento d'insieme del sistema avviene come se, in luogo del potenziale cinetico H, si assumesse l'altro più semplice

$$H_0 = \frac{1}{2} Aq'^2 + C,$$

nel quale è possibile distinguere la forza viva del potenziale.

In sostanza abbiamo le due seguenti proposizioni, che corrispondono ad un medesimo fatto analitico:

a) *Il potenziale $V = U(q) + a(q)q'$ dà luogo alla stessa forza cui dà luogo il potenziale U ; ossia, nel moto corrispondente non ha alcuna influenza il termine in q' ;*

b) *Il movimento d'insieme di un sistema con moti ciclici interni, definito dal potenziale cinetico $H = \frac{1}{2} Aq'^2 + Bq' + C$ (ove A, B, C sono funzioni di q), avviene come se, non esistendo i moti interni, al sistema fosse applicata la forza $\frac{dB}{dq}$, con una forza viva uguale a $\frac{1}{2} Aq'^2$.*

7. Si potrebbe tentare di estendere le considerazioni dei numeri precedenti a quei potenziali che contengono, insieme colle coordinate, non solo le

loro derivate prime, ma anche le derivate successive fino ad un ordine qualunque n (potenziali d'ordine n). In vista però dello scarso valore fisico che avrebbe una tale estensione, mi limiterò ad alcuni brevissimi cenni affatto orvvi di natura analitica.

Essendo $V(q_1 \dots q_r, q'_1 \dots q'_r, q''_1 \dots q''_1, \dots, q^{(n)}_1 \dots q^{(n)}_r)$ un potenziale di ordine n dipendente da r parametri, si assume come forza relativa alla coordinata q_i l'espressione (1)

$$(8) \quad Q_i = \frac{\partial V}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial q'_i} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial V}{\partial q''_i} - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \frac{\partial V}{\partial q^{(n)}_i}.$$

Si vede che Q_i conterrà, oltre alle q , anche le loro successive derivate fino a quelle di ordine $2n$. È lecito tuttavia domandare se non si possa particularizzare la funzione V in modo che nelle Q_i vengano a mancare i termini colle $q^{(2n)}$. La risposta è assai facile, poichè appare dalle (8) come le Q_i siano lineari nelle $q^{(2n)}$, ed i coefficienti di questi termini siano tutti della forma

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q_i^{(n)} \partial q_h^{(n)}}.$$

Si otterrà allora l'effetto voluto scrivendo che debbono essere identicamente nulle tutte queste derivate seconde di V per $i, h = 1, 2, \dots, r$. Ne segue che V dovrà essere lineare nelle derivate n^{me} delle q , e le forze Q_i conterranno le derivate d'ordine $2n - 1$ pure linearmente; indicando poi con a_{is} il coefficiente di $q_s^{(2n-1)}$ in Q_i , si hanno le relazioni: $a_{is} + a_{si} = 0$.

Facendo $n = 1$ si ricadrebbe nelle formole e nei risultati che si sono già ottenuti in precedenza direttamente.

8. Ma tralasciamo il caso generale, e veniamo invece a quello in cui, essendo sempre n qualunque, si ha però $r = 1$, cioè il sistema dipende da un solo parametro q .

Se si vuole che la forza Q , derivante dal potenziale $V(q, q' \dots q^{(n)})$, non contenga il termine in $q^{(2n)}$, dovrà V essere della forma

$$V = U(q, q' \dots q^{(n-1)}) + a(q, q' \dots q^{(n-1)}) q^{(n)},$$

mentre in Q verrà a mancare anche il termine in $q^{(2n-1)}$.

È poi facile vedere che se si impone, di più, a Q la condizione di non contenere neppure $q^{(2n-2)}$, allora non contiene neanche $q^{(2n-3)}$ e così via. In generale la più alta derivata di q contenuta in Q è necessariamente d'ordine pari.

(1) V. Königsberger, op. cit. p. 42.

Per provarlo non abbiamo che da ricorrere alle formole date dal sig. Königsberger nel suo libro già citato. Egli stabilisce (pagg. 22 e 23) le condizioni necessarie e sufficienti cui debbono soddisfare, nel caso più generale, le funzioni Q_i (delle q e delle loro derivate successive fino alla $(2n)^{ma}$) affinché si possano far discendere da un'unica funzione V (delle q e loro derivate fino alla n^{ma}) mediante la formola (8). Tali condizioni sono le seguenti:

$$(9) \quad \frac{\partial Q_i}{\partial q_j^{(k)}} - (k+1) \frac{d}{dt} \frac{\partial Q_i}{\partial q_j^{(k+1)}} + \binom{k+2}{2} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial Q_i}{\partial q_j^{(k+2)}} - \dots$$

$$+ (-1)^{2n-k} \binom{2n}{2n-k} \frac{d^{2n-k}}{dt^{2n-k}} \frac{\partial Q_i}{\partial q_j^{(2n)}} = (-1)^k \frac{\partial Q_j}{\partial q_i^{(k)}},$$

$$\left(\begin{array}{l} k = 0, 1, 2, \dots, 2n \\ i, j = 1, 2, \dots, r \end{array} \right)$$

che si riducono, per $r = 1$, a queste altre:

$$1) \quad (-1)^k \left\{ \frac{\partial Q}{\partial q^{(k)}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial Q}{\partial q^{(k+1)}} + \dots + (-1)^{2n-k} \binom{2n}{2n-k} \frac{d^{2n-k}}{dt^{2n-k}} \frac{\partial Q}{\partial q^{(2n)}} \right\} = 0,$$

dove per avere delle equazioni distinte basta dare a k i valori $1, 3, \dots, 2n-1$. Ora non rimane che scrivere distesamente questo sistema di equazioni per verificare quello che si è asserito.

Per $r \geq 2$ le (9) mostrano soltanto che se nelle Q_i son nulli tutti i termini colle $q^{(2n)}$, allora in ciascuna Q_i svanisce il termine con $q_i^{(2n-1)}$.

Le (9) ci permettono poi anche di constatare che in un potenziale di 1° ordine a r parametri, lineare nelle derivate di questi, cioè in un potenziale della forma (2) da noi precedentemente studiata, i coefficienti sono affatto indipendenti l'uno dall'altro. Ed invero questo equivale a dire che, prese comunque nelle (2) le funzioni U, a_1, \dots, a_r , sostituendo nelle (9) le espressioni (3) delle Q_i , le (9) stesse diventano altrettante identità. Ora i tre gruppi di eguaglianze a cui in questo caso si riducono le (9) corrispondentemente ai valori $0, 1, 2$ di k sono costituiti:

- 1) da identità evidenti;
- 2) dalle relazioni $a_{rs} + a_{sr} = 0$, che sono le (4) e valgono identicamente;
- 3) dalle eguaglianze

$$\sum_r \frac{\partial a_{rs}}{\partial q_t} q'_r - \frac{da_{ts}}{dt} = \sum_r \frac{\partial a_{rt}}{\partial q_s} q'_r,$$

che si possono scrivere:

$$\sum_r \left(\frac{\partial a_{rs}}{\partial q_t} + \frac{\partial a_{st}}{\partial q_r} + \frac{\partial a_{tr}}{\partial q_s} \right) q'_r = 0,$$

e queste sono pure identità, perchè si ha identicamente, in causa della forma delle funzioni a_{rs} , qualunque siano gli indici r, s, t :

$$\frac{\partial a_{rs}}{\partial q_t} + \frac{\partial a_{st}}{\partial q_r} + \frac{\partial a_{tr}}{\partial q_s} = 0.$$

Fisica. — *Sulla determinazione della tensione superficiale dei liquidi coi metodi delle gocce cadenti e delle bolle gazoze.* Nota di G. GUGLIELMO, presentata dal Socio P. BLASERNA (1).

Uno dei modi più semplici e facili per determinare la tensione superficiale di un liquido, è quello di pesarne le gocce che si staccano dall'orifizio di una pipetta dopo aver misurato il diametro minimo del collo della goccia un momento prima che questa incominci a staccarsi. Un modo simile e per alcuni rispetti preferibile, è quello di determinare il volume o il peso apparente delle bolle gazoze che si fanno svolgere in seno al liquido, e misurare il diametro minimo del collo o peduncolo della bolla un momento prima che essa incominci a staccarsi.

Con questi metodi si ha anche il vantaggio che rinnovandosi continuamente la superficie del liquido al formarsi delle successive gocce o bolle, essa rimane o diviene assai facilmente priva delle impurità, molto nocive all'esattezza dei risultati. Inoltre collo stesso apparecchio o con lievi modificazioni del medesimo, si può determinare la pressione minima necessaria perchè la goccia o bolla si formi e stacchi, ed altresì proiettare e disegnare su di uno schermo l'immagine ingrandita della goccia o bolla e ricavare così altri valori della tensione superficiale cercata.

Contro l'uso del metodo delle gocce cadenti, sta il fatto che i valori che si sono ottenuti con esso per la tensione superficiale dell'acqua sono oltremodo discordi, poichè vanno da 4,5 a 10,5 mgr. per millimetro; però i seguenti ragionamenti e calcoli dimostrano che tale discrepanza è dovuta interamente al modo inesatto col quale essi valori vennero calcolati, oppure alle condizioni disadatte nelle quali vennero eseguite le esperienze.

Condizioni d'equilibrio della goccia un momento prima che essa incominci a staccarsi. — La maggior parte dei fisici che hanno sperimentato con questo metodo ed anche vari autori di trattati recenti, ammettono che la tensione superficiale perpendicolare alla periferia dell'orifizio, o più esatta-

(1) Presentata nella seduta dell'8 novembre 1903.