ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCC.

1903

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1903

che si possono scrivere:

$$\Sigma_r \left(\frac{\partial a_{rs}}{\partial q_t} + \frac{\partial a_{st}}{\partial q_r} + \frac{\partial a_{tr}}{\partial q_s} \right) q'_r = 0 ,$$

e queste sono pure identità, perchè si ha identicamente, in causa della forma delle funzioni a_{rs}, qualunque siano gli indici r, s, t:

$$\frac{\partial a_{rs}}{\partial q_t} + \frac{\partial a_{st}}{\partial q_r} + \frac{\partial a_{tr}}{\partial q_s} = 0 .$$

Fisica. — *Sulla determinazione della tensione superficiale dei liquidi coi metodi delle goccie cadenti e delle bolle gazose.* Nota di G. Guglielmo, presentata dal Socio P. Blaserna [1].

Uno dei modi più semplici e facili per determinare la tensione superficiale di un liquido, è quello di pesarne le goccie che si staccano dall'orifizio di una pipetta dopo aver misurato il diametro minimo del collo della goccia un momento prima che questa incominci a staccarsi. Un modo simile e per alcuni rispetti preferibile, è quello di determinare il volume o il peso apparente delle bolle gazose che si fanno svolgere in seno al liquido, e misurare il diametro minimo del collo o peduncolo della bolla un momento prima che essa incominci a staccarsi.

Con questi metodi si ha anche il vantaggio che rinnovandosi continuamente la superficie del liquido al formarsi delle successive goccie o bolle, essa rimane o diviene assai facilmente priva delle impurità, molto nocive all'esattezza dei risultati. Inoltre collo stesso apparecchio o con lievi modificazioni del medesimo, si può determinare la pressione minima necessaria perchè la goccia o bolla si formi e stacchi, ed altresì proiettare e disegnare su di uno schermo l'immagine ingrandita della goccia o bolla e ricavare così altri valori della tensione superficiale cercata.

Contro l'uso del metodo delle goccie cadenti, sta il fatto che i valori che si sono ottenuti con esso per la tensione superficiale dell'acqua sono oltremodo discordi, poichè vanno da 4,5 a 10,5 mgr. per millimetro; però i seguenti ragionamenti e calcoli dimostrano che tale discrepanza è dovuta interamente al modo inesatto col quale essi valori vennero calcolati, oppure alle condizioni disadatte nelle quali vennero eseguite le esperienze.

Condizioni d'equilibrio della goccia un momento prima che essa incominci a staccarsi. — La maggior parte dei fisici che hanno sperimentato con questo metodo ed anche varî autori di trattati recenti, ammettono che la tensione superficiale perpendicolare alla periferia dell'orifizio, o più esatta-

[1] Presentata nella seduta dell'8 novembre 1903.

mente alla periferia della sezione orizzontale di raggio minimo della goccia quando questa sta per staccarsi, faccia equilibrio al peso della medesima, sostenuto appunto dalla tensione superficiale; quindi se si chiama T questa tensione per unità di lunghezza, r il raggio minimo suddetto, P il peso della goccia si abbia:

$$(1) \qquad 2\pi r\,\mathrm{T} = \mathrm{P} \qquad \mathrm{T} = \mathrm{P} : 2\pi r$$

Ciò difatti pare evidente, ma in realtà si omette di tener conto della pressione nell'interno della goccia, che certamente non è nulla e coopera col peso della goccia stessa a produrne la caduta; così la trazione necessaria per spezzare un pallone in due metà diminuisce quando aumenta la pressione nel suo interno. Tale omissione apparisce anche manifesta quando si vuole applicare la suddetta equazione alla porzione di goccia sottostante alla sezione di raggio massimo, poichè si trova che il primo membro è cresciuto essendo cresciuto il raggio, mentre il secondo che rappresenta il peso della porzione di goccia è diminuito; l'uguaglianza necessaria per l'equilibrio si ristabilisce quando si tenga conto della pressione interna la cui azione, che va aggiunta a quella del peso, è aumentata perchè è aumentata la profondità, e perchè è aumentata l'area della sezione sulla quale essa si esercita. Quindi se p è la pressione idrostatica nella sezione che si considera, per l'equilibrio dovrà essere:

$$(2) \qquad 2\pi r\,\mathrm{T} = \mathrm{P} + \pi r^2 \cdot p \qquad \mathrm{T} = \mathrm{P} : 2\pi r + \tfrac{1}{2} pr$$

relazioni che possono applicarsi tanto al collo che al ventre della goccia, ed in generale ad una sezione orizzontale qualsiasi, purchè per T si prenda la componente verticale della tensione e per P il peso della goccia sottostante alla sezione considerata.

[Nel caso d'una sezione meridiana terminata dall'intersezione colla sezione orizzontale di raggio minimo o massimo, se L è la lunghezza della curva meridiana così limitata, S l'area dalla medesima racchiusa, p la pressione che si esercita sul centro di pressione di essa area, si ha la relazione:

$$\mathrm{TL} = p\mathrm{S}$$

che può servire alla determinazione di T].

Non è certo supponibile che siano incorsi nella suddetta omissione i fisici o matematici che si occuparono di proposito della trattazione matematica di questo argomento. Così trovo che Dupré nella sua *Théorie mathématique de la chaleur,* 1869, pag. 319 (ove inoltre si riferisce a parecchie sue Memorie antecedenti e ad una *Mémoire sur la capillarité* del Bertrand apparsa nel Journal de mathém. pures et appliquées, t. XIII) stabilisce la condizione esatta d'equilibrio per la porzione di goccia sottostante ad una sezione orizzontale qualunque, adotta per la pressione nell'interno della goccia il valore dato dalla formula di Laplace $T\left(\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho'}\right)$ essendo ϱ e ϱ' i raggi di curvatura della sezione meridiana e della sezione normale perpendicolare a questa, e trova così per il peso della goccia sottostante alla sezione orizzontale di raggio minimo:

$$P = \pi r^2 T\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{\varrho}\right)$$

dove r e ϱ che sono di segno contrario sono presi in valore assoluto. Inoltre Duprè trova che se si considera la sezione orizzontale passante per il punto d'inflessione della curva meridiana (nel quale si ha $\varrho = 0$) la componente verticale della tensione superficiale fa equilibrio, non già al peso della porzione di goccia sottostante, ma al doppio di questo peso.

Più recentemente Worthington (Beiblätter, 1882, p. 177) osserva la suddetta omissione ma, forse occupandosi precipuamente di esporre il suo nuovo metodo pregevolissimo, fondato sulla proiezione e disegno dell' immagine della goccia, nel correggere quest'errore trascura alla sua volta la curvatura negativa della curva meridiana, nel punto dove avverrà la separazione della goccia, adotta quindi per la pressione interna nel collo della goccia il valore T/r invece di $T\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\varrho}\right)$ ed ottiene $T = P : \pi r$, ossia che i valori trovati per T dagli sperimentatori precedenti andrebbero raddoppiati, e sebbene questi valori, se ottenuti nelle migliori condizioni, siano spesso molto inferiori a quelli ottenuti cogli altri metodi, tuttavia raddoppiati diverrebbero affatto inammissibili e sarebbe dimostrata l'erroneità del metodo delle goccie cadenti.

Che questo modo di calcolare la pressione nell' interno della goccia, trascurando cioè la curvatura suddetta non possa in nessun caso essere esatto risulta da ciò, che in tal caso il collo della goccia sarebbe cilindrico, la pressione superficiale $T : r$ sarebbe la stessa a diverse altezze, mentre quella idrostatica che le fa equilibrio cresce colla profondità.

Alcuni modi per determinare la pressione nell'interno delle goccie. — Poichè la formula usata più generalmente per dedurre il valore della tensione superficiale dal peso delle goccie è inesatta ed è pure inesatta, forse in maggior grado, la correzione indicata da Worthington, interessa vedere quali valori si otterrebbero usando la formula esatta. Occorre perciò conoscere la pressione p nella sezione di raggio minimo, pressione che non può essere ottenuta idrostaticamente misurando la profondità di tale sezione rispetto ad una superficie libera piana ed orizzontale del liquido, perchè la superficie libera della goccia, non potendo essere in equilibrio stabile colla superficie suddetta, troverebbesi in un periodo o di accrescimento e separazione o di contrazione per ridursi a un menisco e le leggi d'idrostatica non sarebbero applicabili.

Occorre dunque dedurre la pressione superficiale in un punto qualunque servendosi della formula di Laplace (la pressione negli altri punti poi s'ottiene idrostaticamente nota la differenza di livello) ed il punto preferibile è certamente quello infimo dove le due sezioni normali considerate nella formula sono anche sezioni meridiane e quindi uguali, ed i due raggi di curvatura si riducono ad un solo, il quale inoltre rimane pressochè costante per un gran tratto della sezione meridiana. Sarebbe comoda anche la determinazione dei raggi di curvatura nel collo della goccia e l'uso della formula di Dupré, perchè uno di essi, il semidiametro minimo r si misura facilmente e dev'essere in ogni caso determinato; però l'altro raggio di curvatura, quello negativo della sezione meridiana, varia molto rapidamente da punto a punto ed è perciò difficilmente misurabile con esattezza.

Un modo molto comodo per misurare entrambi i raggi di curvatura in un punto qualsiasi della superficie della goccia è stato proposto ed usato da Worthington, e consiste nel proiettare su uno schermo l'immagine ingrandita d'una goccia ed ivi fotografarla o segnarne col lapis il contorno. Si può così con un compasso, noto l'ingrandimento, misurare sul disegno il raggio di curvatura R nel punto infimo della goccia e la distanza h di questo punto dalla sezione di raggio minimo.

Si può invece osservare la goccia con un cannocchiale o microscopio munito di micrometro oculare semplice, o meglio di un micrometro oculare a quadrellini quale si usa in Microscopìa e misurare: 1° il diametro minimo orizzontale del collo della goccia; 2° il diametro massimo orizzontale del ventre della goccia ben poco differente, come risulta dalle misure, dal doppio del raggio di curvatura nel punto infimo; 3.° l'altezza suddetta h della goccia. È chiaro che, sia che si disegni l'immagine della goccia o se ne misurino le dimensioni principali, occorrerà prima determinare all'ingrosso le dimensioni d'una goccia che sta per staccarsi, e poscia, quando la seguente s'avvicina a queste dimensioni, occorrerà rendere lentissimo e seguire l'accrescimento della goccia.

In questi modi si può determinare esattamente la pressione $p = 2T : R - hd$ nella sezione di raggio minimo e calcolare il valore esatto di T mediante la formula (2).

Quando R ed h non siano stati determinati e non siano noti, come avviene per le antiche esperienze, che il peso della goccia ed il diametro dell'orifizio, si può tuttavia dedurre da questi dati un valore abbastanza approssimato della tensione cercata. Teoricamente, anzi, dovrebbe esser possibile dedurne il valore esatto, perchè la forma della goccia è perfettamente determinata; tuttavia l'equazione in coordinate Cartesiane della curva meridiana non mi parve molto facile a trattare ed ho ricorso a mezzi meno rigorosi, supponendo cioè che la goccia abbia una forma geometricamente semplice, rassomigliante il più possibile a quella della goccia vera e di uguale volume.

Così per le goccioline molto piccole, il raggio R potrà ottenersi con errore piccolissimo dall' ipotesi che esse siano sferiche; quindi sia

$$\frac{4}{3}\pi R^3\, d = P\ ,\quad R = \sqrt[3]{3P : 4\pi d}.$$

Se si suppone inoltre che la pressione $2T : R$ che ne risulta valga per il centro della goccia e sia $2T : R + Rd$ la pressione nel punto infimo e $2T : R - Rd$ quella cercata alla sommità della goccia la (2) ci darà:

$$T = \frac{P}{2\pi r} + \frac{r}{2}\left(\frac{2T}{R} - Rd\right)$$

ossia osservando che $P : 2\pi r = {}^4/_3\, \pi R^3\, d : 2\pi r = 2R^3\, d : 3r$ si avrà:

$$T = \frac{P}{2\pi r}\,\frac{1 - 3r^2 : 4R^2}{1 - r : R} = \frac{P}{2\pi r}\left[1 + \frac{r}{R} + \frac{1}{4}\left(\frac{r^2}{R^2} + \frac{r^3}{R^3} + \ldots\right)\right].$$

Se invece si suppone che il valore $2T : R$ della pressione valga per il punto infimo della goccia (ciò che invero non sarebbe giustificato perchè la gocciolina per effetto della gravità sarà, sebbene di poco, allungata verticalmente ed il raggio di curvatura nel punto infimo sarà minore del raggio medio della gocciolina) s'avrebbe per la pressione cercata alla sommità della goccia $p = 2T : R - 2R$ e risulterebbe:

$$T = \frac{P}{2\pi r}\,\frac{1 - 3r^2 : 2R^2}{1 - r : R} = \frac{P}{2\pi r}\left[1 + \frac{r}{R} - \frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{R^2} + \frac{r^3}{R^3} + \ldots\right)\right].$$

Se invece si suppone che il valore $2T : R$ della pressione valga per la sommità della goccia (ciò che equivale a supporre che nel valore della pressione $p = 2T : R - R$, il 2° termine sia trascurabile rispetto al primo) s'avrebbe $p = 2T : R$, e:

$$T = \frac{P}{2\pi r}\,\frac{1}{1 - r : R} = \frac{P}{2\pi r}\left[1 + \frac{r}{R} + \frac{r^2}{R^2} + \ldots\right].$$

Siccome per la legge di Tate $r : R^3$ è, almeno approssimativamente, costante, ne segue che $r : R$ decresce proporzionatamente ad R^2 e sarà molto piccolo per piccoli valori di r mentre $r^2 : R^2$ sarà certamente trascurabile e tanto più $r^3 : R^3$ ecc. Da tutte tre le ipotesi risulta dunque:

$$T = \frac{P}{2\pi r}\left(1 + \frac{r}{R}\right) \tag{3}$$

che vale certamente quando $r^2 : R^2$ è trascurabile. Se R poi è così piccolo che sia trascurabile anche $r : R$ si ha:

$$T = \frac{P}{2\pi r} \quad , \quad \frac{P}{r} = \text{costante.}$$

Quindi nel caso di goccioline molto piccole, tali che $r : R$ sia trascurabile, si può trascurare la pressione nell'interno della goccia e la legge di Tate è valida, perchè sebbene essa pressione sia grande, l'area πr^2 sulla quale essa si esercita è piccolissima.

A formule ben poco diverse e riducentisi similmente a

$$T = \frac{P}{2\pi r}\left(1 + \frac{r}{R}\right)$$

si giunge nell'ipotesi che la gocciolina abbia la forma, molto simile al vero, di una sfera sormontata da un cono ad essa tangente con apertura p. es. di 90°.

Nel caso di goccie non piccole questi modi di ottenere p divengono meno soddisfacenti, non tanto forse per la differenza tra la forma vera della goccia e la forma sferica, quanto perchè il valore di p è dato da una differenza di cui il primo termine decresce ed il secondo cresce quando cresce R, e quindi uno stesso errore relativo nell'apprezzamento di ciascuno di essi ha un'importanza nociva crescente con R. Inoltre riesce sempre più difficile stabilire per quale altezza sia valido il valore $2T : R$ (non essendo R il valore vero del raggio di curvatura ma un valore medio), e rimane così incerto il valore del 2° termine, e finalmente come apparisce nella (2) il valore di p e quindi anche il possibile errore è moltiplicato per r crescente proporzionalmente al quadrato di R.

Le goccie medie o grandi (al disotto della sezione di area minima) si possono considerare come composte di due parti, una inferiore approssimativamente emisferica ed una superiore quasi conica. Per calcolare R ho supposto che queste due parti avessero ugual volume e che l'inferiore fosse esattamente emisferica; relativamente alla parte superiore ho fatto due ipotesi, una che la sua altezza fosse R, lasciando indeterminata la forma, l'altra che questa fosse un tronco di cono avente per basi la base dell'emisfero sottostante, di raggio R e la sezione di area minima, di raggio r.

Relativamente all'altezza ove deve ritenersi esatto il valore $2T : R$ della pressione, non v'ha dubbio che debba essere superiore al punto infimo della goccia ove il raggio di curvatura della superficie è certemente minore del valore medio calcolato R; tenendo conto della forma allungata verticalmente della goccia, non m'è parso che tale pressione potesse esser valida nel centro dell'emisfero che nelle ipotesi suddette riesce troppo vicino alla sezione di area minima. Ho quindi supposto che essa pressione $2T : R$ fosse esatta per lo strato medio equidistante dal punto infimo e dal centro dell'emisfero.

Ciò posto nel caso che la metà superiore della goccia si supponga di altezza R, si ha:

$$(4) \qquad p = \frac{2T}{R} - \frac{3}{2}R \qquad T = \frac{P}{2\pi r}\frac{1 - 9r^2/8R^2}{1 - r/R}$$

e nel caso che la metà superiore si supponga in forma di tronco di cono colle basi di raggi R ed r, l'altezza di questo sarà: $2R^3 : (R^2 + Rr + r^2)$ e sarà:

$$(5) \qquad p = \frac{2T}{R} - \frac{2R^3}{R^2 + Rr + r^2} - \frac{1}{2}R, \; T =$$

$$= \frac{P}{2\pi r}\,\frac{1 + \frac{r}{R} - \frac{1}{2}\frac{r^2}{R^2} - \frac{3}{8}\left(\frac{r^2}{R^2} + \frac{r^3}{R^3} + \frac{r^4}{R^4}\right)}{1 - r^3 : R^3}$$

Entrambi questi valori divengono uguali ai precedenti trovati per le goccioline quando $r^2 : R^2$ sia trascurabile.

Nella seguente tabella sono riferiti indicandoli rispettivamente con A', A'', i valori dei due fattori che moltiplicano $P : 2\pi r$ nelle due ultime formule, calcolati per valori di $r : R$ crescenti successivamente di 0,1; essa indica l'andamento di essi fattori quando cresce $r : R$, indica le loro differenze per ogni valore di $r : R$ e può servire per calcolare per interpolazione il loro valore per un valore qualsiasi di $r : R$:

$r : R$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
A'	1,10	1,194	1,28	1,37	1,44	1,49	1,50	1,40	1,10
A''	1,10	1,17	1,24	1,31	1,38	1,47	1,60	1,84	2,47

Risulta da questa tabella che i valori di A' ed A'' per ogni singolo valore di $r : R$ non superiore a 0,7 sono abbastanza concordi, poscia il valore di A' diventa evidentemente troppo piccolo, quello di A'' troppo grande ma la loro media parrebbe ancora ammissibile.

Come verifica delle formule (4) e (5), per ottenere il valore corretto della tensione superficiale dei liquidi dal peso delle goccie, le ho applicate ad alcune esperienze di Quincke (Pogg. Ann.) sull'acqua e sul mercurio, ad altre riferite da Leduc e Sacerdote (Comptes Rendus, t. 135, 1902) pure sull'acqua e sul mercurio e ad alcune esperienze sulle bolle svolgentisi nell'acqua da foro in parete sottile, da me eseguite nel 1899 e poi interrotte, visto che i valori di T ottenuti colla formula (1) erano poco soddisfacenti. Nella seguente tabella, di cui la 1ª parte si riferisce all'acqua, l'altra separata da una linea orizzontale al mercurio, $2r$ indica il diametro in millimetri dell'orifizio o quello minimo del collo della goccia o bolla, P il peso in milligrammi delle goccie o quello della spinta idrostatica per le bolle, R il raggio della goccia o bolla ridotta sferica, $P:2\pi r$ il valore erroneo T_1, della tensione superficiale ottenuto colla formula (1) senza tener conto della pressione interna, T_4 e T_5 i valori corretti della tensione ottenuti colle formule (4) e (5), A l'iniziale del nome dell'autore e l'indicazione del metodo sperimentale.

$2r$	P	R	$r:R$	$P:2\pi r$	T_4	T_5	A
0,0904	1,97	0,778	0,06	6,94	7,36	7,36	G., bolle
0,14	3,00	0,895	0,08	6,82	7,37	7,37	" goccie
0,50	9,70	1,325	0,190	6,26	7,45	7,32	Q., "
0,66	13,4	1,47	0,22	6,46	7,81	7,69	G., bolle
1,10	21,45	1,72	0,31	6,21	8,01	7,76	L., goccie
1,13	21,0	1,71	0,33	5,93	7,77	7,47	G., bolle
1,93	32,5	1.98	0,49	5,36	7,68	7,36	" "
2,00	36,0	2,05	0,49	5,73	8,19	7,85	" "
2,00	34,0	2,01	0,50	5,41	7,79	7,47	L., goccie
2,48	42,2	2,16	0,574	5,43	8,02	7,82	Q., "
3,40	55,1	2,36	0,72	5,16	7,64	8,51	L., "
0,27	59,9	1,02	0,13	70,6	80,0	79,1	" "
0,308	42,2	0,906	0.17	43,6	51,0	51,1	Q., "
0,63	85,7	1,15	0,274	43,3	54,6	52,8	L., "
1,03	130,7	1,32	0,39	40,4	55.35	52,9	Q., "
1,10	133,8	1.33	0,414	38,7	53,4	51,1	L., "
2,00	220,5	1,58	0,633	35,1	52,6	52,6	" "

Da questa tabella risulta: 1° che il valore della tensione superficiale calcolato colla formula $T_1 = P:2\pi r$ si discosta tanto più da quello trovato cogli altri metodi (che per l'acqua è generalmente compreso fra 7,5 ed 8,1) quanto maggiore è il diametro dell'orifizio e quindi $r:R$, ciò che è d'accordo colle formule (3), (4) e (5).

2° I. valori della tensione superficiale calcolati colle formule (4) e (5) rimangono compresi fra i suddetti limiti, salvo poche eccezioni. I valori ottenuti colla formula (4) sono un po' maggiori di quelli ottenuti colla formula (5) ma sono ugualmente plausibili e concordi; le differenze che essi presentano non accennano (fatta eccezione dei casi estremi) ad alcuna regola, indizio di errore sistematico, ed esse non parranno grandi se si considera che la precedente tabella non rappresenta una serie di esperienze eseguite da uno stesso sperimentatore in condizioni identiche, e con piccolo intervallo di tempo, ma presenta financo differenze di metodo (goccie e bolle); inoltre esse diminuiscono ancora se si prendono le medie dei valori ottenuti in ciascun caso colle due formule (4) e (5).

3°. I valori della tensione ottenuti per i minori valori di r colle formule (4) e (5) sono identici, ma sebbene appunto nel caso di goccioline non si possa dubitare dell'esattezza di queste formule, essi sono un po' minori di quelli generalmente ammessi e di quelli ottenuti per maggiori valori di r.

Non ho riferito i risultati di altre esperienze di Quincke eseguite con rapida successione di goccie, perchè questa è certamente causa di gravi errori, nè altri risultati di Leduc e Sacerdote per maggiori valori di r perchè il diametro indicato dell'orifizio era certamente maggiore di quello del collo della goccia al quale solo si riferisce il calcolo. Il valore della tensione superficiale del mercurio nel caso di $r = 0,27$ così differente dal valore generalmente ammesso e da quello ottenuto da Quincke per $r = 0,31$, è molto probabilmente dovuto ad errori fortuiti nell'esperienze.

Costanza del peso della goccia mentre si stacca. — Una obbiezione che viene fatta frequentemente e sotto varie forme al metodo delle goccie cadenti si è che la condizione d'equilibrio sul quale esso si fonda si riferisce al peso della goccia ancora aderente alla pipetta, mentre il peso determinato coll'esperienza è quello della goccia caduta che può esser diverso dal primo. È stato osservato a tale proposito da Leduc e Sacerdote (l. c.) che la goccia si stacca non per rottura ma per deformazione della superficie, e Worthington fa osservare che la superficie della goccia che sta per distaccarsi è in equilibrio sempre meno stabile, simile a quello delle goccie o bolle cilindriche sottratte alla gravità o di peso trascurabile, studiate da Plateau, delle quasi si fa crescere l'altezza; quindi le goccie si staccherebbero in seguito a tale instabilità e non per l'effetto diretto del peso.

Un grande fondamento di queste critiche era il disaccordo fra la teoria ed i risultati; ora ristabilito l'accordo mediante i precedenti ragionamenti e calcoli, anche le obbiezioni perdono molto del loro peso.

È inoltre da notare che il caso delle goccie o bolle cilindriche suddette come altresì quello della vena liquida è ben diverso da quello delle goccie pesanti, poichè la superficie cilindrica essendo geometricamente identica a tutte le altezze, uno strozzamento può effettuarsi indifferentemente ad una qualsiasi di esse, mentre per la goccia pesante l'altezza ove si produce la separazione (quando siano raggiunte le condizioni perchè essa si produca) è molto ben determinata e non si può concepire che avvenga altrove, solo ivi la stabilità dell'equilibrio è nulla, ed esso vien distrutto dalla minima scossa o aumento di peso.

È bensì probabile che durante lo strozzamento, per effetto dell'adesione al solido o per l'azione della gravità una parte della goccia considerata nella condizione d'equilibrio rimanga aderente al solido, tuttavia nel caso di piccole goccie per le quali $\frac{r}{R}$ è piccolo uno straterello di raggio r e di altezza appena visibile non influirebbe molto sul volume $\frac{4}{3}\pi R^3$ della goccia, e nel caso di goccie grandi la separazione si produce a tal distanza dal solido che l'azione anche mediata di questo è piccola. Proiettando e disegnando le immagini ingrandite di una goccia su uno schermo, osservai che se questa era molto piccola, la quantità di liquido rimasta aderente alla pipetta dopo che si era staccata la goccia era così piccola da essere difficilmente apprezzabile, mentre nel caso di goccie grandi che presentavano nel collo uno strozzamento ben deciso, il volume del liquido al disopra della sezione minima risultò uguale a quello che rimaneva aderente. In entrambi i casi il peso della goccia caduta era uguale a quello considerato nella condizione d'equilibrio.

Influenza della rapidità dell'accrescimento delle goccie sul loro peso. — Se la goccia s'accresce rapidamente, essa s'accresce sensibilmente anche durante il periodo della sua separazione, il quale è molto rapido nella sua ultima fase ma è lento inizialmente quando la forza risultante che produce la separazione è pressochè nulla ed il liquido non ha acquistato velocità; ne risulta che il peso della goccia caduta è certamente maggiore di quello della goccia ancora equilibrata. Un'azione opposta, di solito probabilmente poco sensibile, deriva da ciò che nell'interno della goccia alla pressione idrostatica s'aggiunge quella idrodinamica ed il peso occorrente per produrre la separazione risulta diminuito.

L'aumento del peso delle goccie causato dalla rapidità d'accrescimento delle goccie può compensare in tutto o in parte l'errore proveniente dal trascurare la pressione interna, e perciò forse molte esperienze vennero eseguite con rapido accrescimento delle goccie. È chiaro che avendo eliminato l'errore suddetto, sarebbe dannoso il correggerlo con un errore di segno contrario, e che è preferibile di avvicinarsi il più possibile alle condizioni teoriche rendendo l'accrescimento della goccia così lento che esso non abbia influenza sul peso di essa. In una prossima Nota potranno esser descritte le dispozioni più comode a tale scopo ed alcune esperienze non ancora completate.

Mineralogia. — *Il fahlerz nella miniera di Palmavexi* (Sardegna) (¹). Nota del dott. C. Rimatori, presentata dal Socio G. Strüver (²).

Sino a poco tempo fa la miniera dell'Argentiera della Nurra era ritenuta quale importante giacimento non solo di *galena* e di *blenda* principalmente, ma anche di *fahlerz*.

Evidentemente tutti quelli che asserivano la presenza di questo minerale in quella località, si saranno limitati ad una osservazione troppo superficiale di quei campioni, che da un esame più accurato e completo fatto dal prof. Lovisato (³) risultarono invece costituiti, alcuni da pura *galena* con speciale struttura finamente granulosa, altri da *bournonite*.

(¹) Lavoro eseguito nel Museo di Mineralogia e Geologia della R. Università di Cagliari.

(²) Presentata nella seduta dell'8 novembre 1903.

(³) *La bournonite nella miniera dell'Argentiera della Nurra.* Rend. Acc. Lincei, 21 dicembre 1902.